

**Département
de Mécanique**
Faculté des Sciences

COURS RDM - HAY501Y

Équipe enseignante :
P. Cañadas (L3) & V. Huon (L)

MCC : (1ère session + CC, règle max)*80% + 20% TP
ou
2nde session*80% + 20% TP



- Objectifs
 - Déterminer les déplacements et la déformée
 - Premiers pas vers le dimensionnement 1D (poutre)
 - Premiers pas vers les Éléments Finis (EF)
- Méthodes
 - PFS
 - Méthode des coupures
 - Écrire les équations d'équilibre local dans le cas des poutres
 - Résoudre les équations d'équilibre local
 - Utiliser les méthodes énergétiques

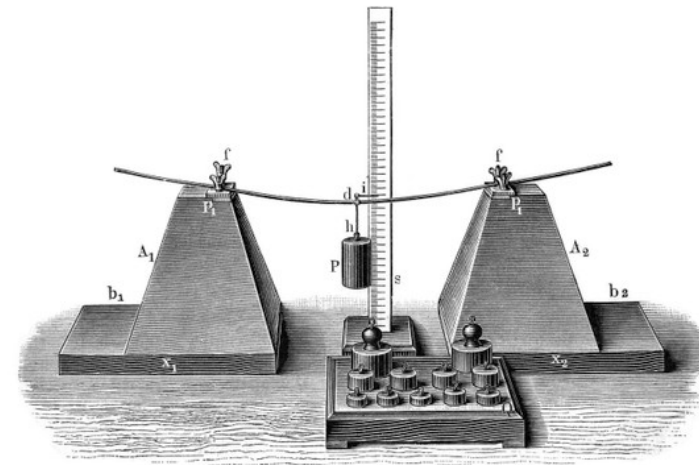


- Merci à Loïc Daridon... qui remercie :
 - Pierre Alain Boucard - «Cours de Dimensionnement des Structures - Résistance des Matériaux»
 - Jean Garrigues - «Statique des poutres élastiques»
 - Patrick Ballard & Alain Millard - Mec553 «structures élancées»
 - R. Boudet et P. Stephan - «Vous avez dit : Résistance des Matériaux ?» - ISBN 2.854284801
 - ...



La résistance des matériaux, aussi appelée RDM, est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus permettant le calcul des contraintes et déformations dans les structures des différents matériaux (machines, génie mécanique, bâtiment et génie civil).

Galileo Galilei



« *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali* »





De quoi a-t-on besoin ?

HLMA101

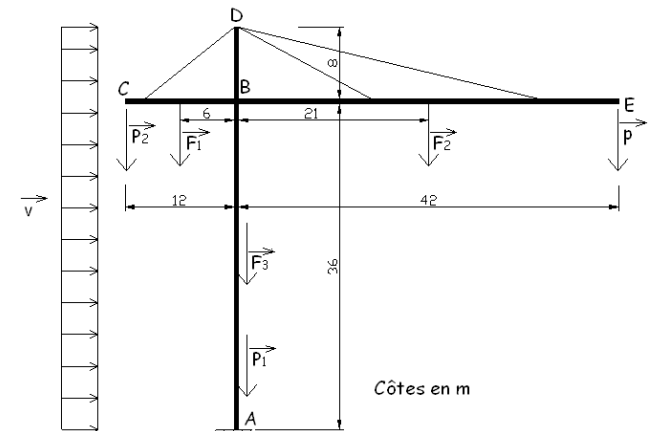
HLMA201

HLME201

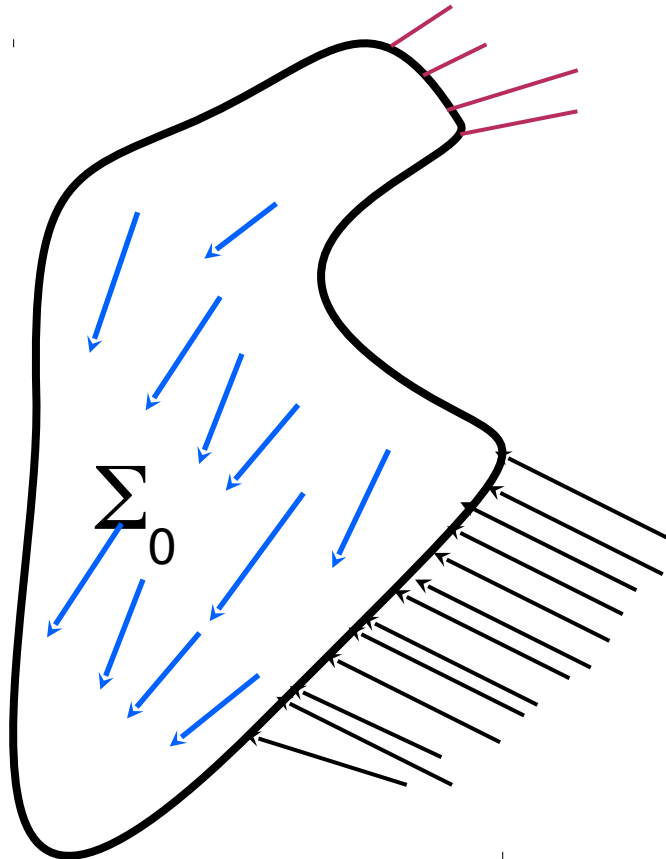
Torseur des actions transmissibles (liaisons)

Torseur des Efforts appliqués:

- Effort réparti (linéique)
- Effort Ponctuel



PFS



- 1. Équations d'équilibre**
 1. MMC
 2. RDM
- 2. Conditions aux limites**
 1. En effort
 2. En déplacement
- 3. Loi de comportement**

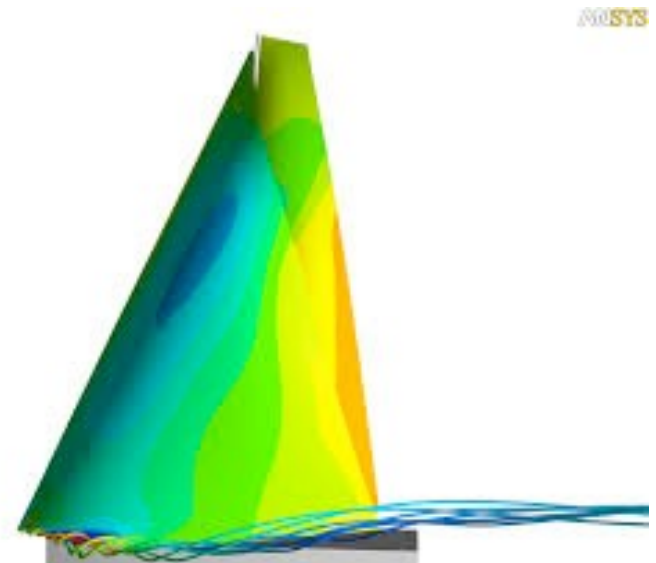
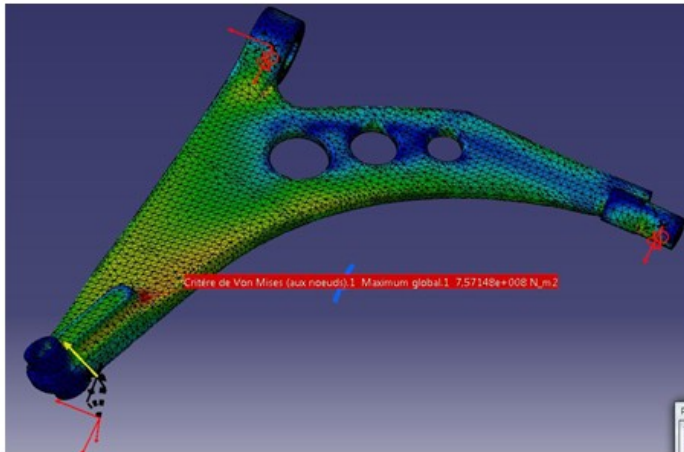
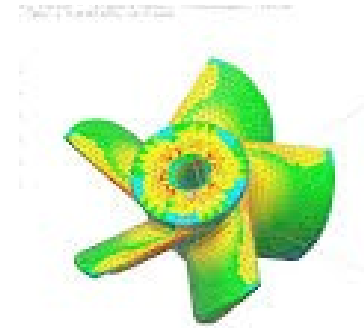
Le comportement du matériau est élastique linéaire
(loi de Hooke).



Hypothèses géométriques



3-D



**Pas d'hypothèse
Pas de solution analytique***

* en règle générale



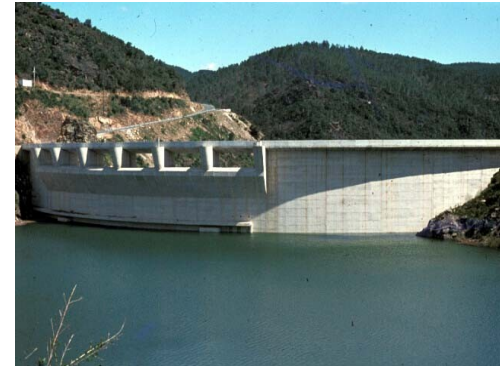
Hypothèses géométriques

2-D Plaques et coques

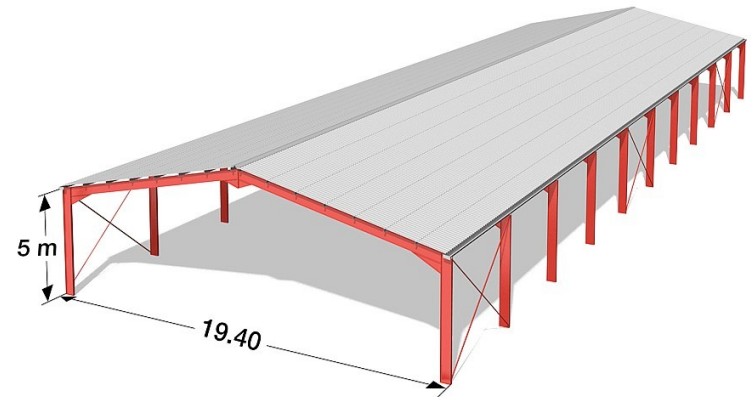
Ce sont des structures pour lesquelles *une dimension* est petite par rapport aux deux autres (l'épaisseur)



Les coques : Réservoirs sphériques, cylindriques, tours de réfrigération, coupoles, éléments de carrosserie...



Les plaques : Ce sont des coques dont la surface moyenne est plane.
Dalles, murs, tabliers de ponts...





1-D Poutres et barres

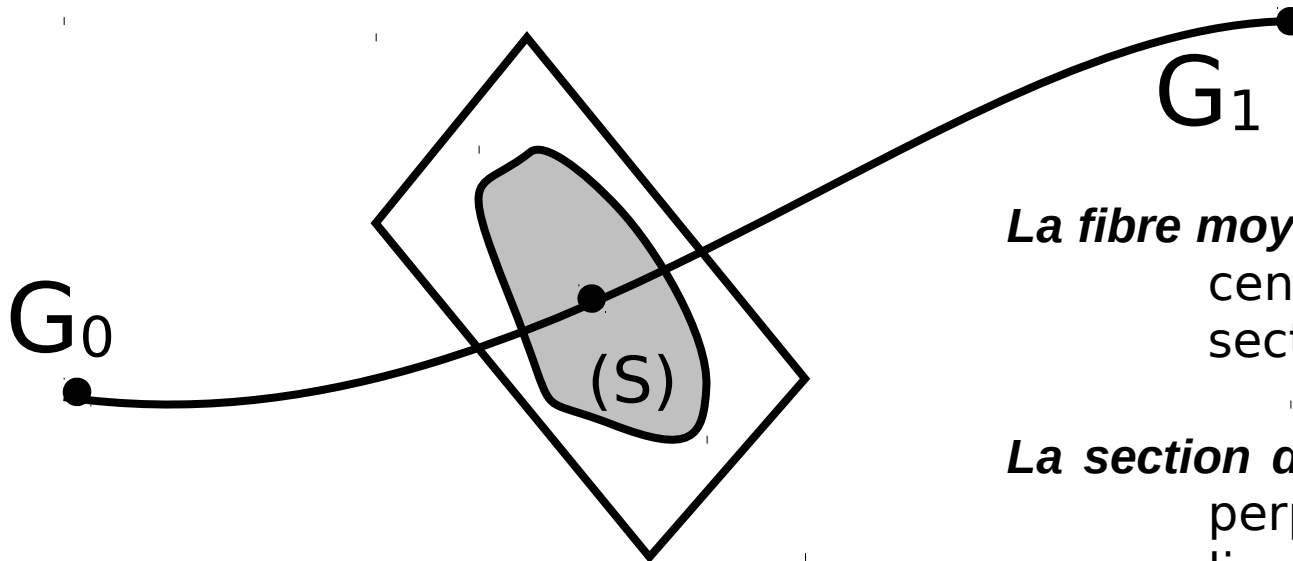
Les Poutres : Ce sont des structures pour lesquelles *deux dimensions* sont petites par rapport à la dernière (épaisseur et largeur).
Poteau, rail, mat, pylône, super structure élancée...



Un peu de vocabulaire



Poutre : le solide occupant dans son état de référence (non déformé) le domaine engendré par la surface plane (S) lorsque G décrit un arc de courbe G_0G_1 , (S) restant normale en G à cet arc.



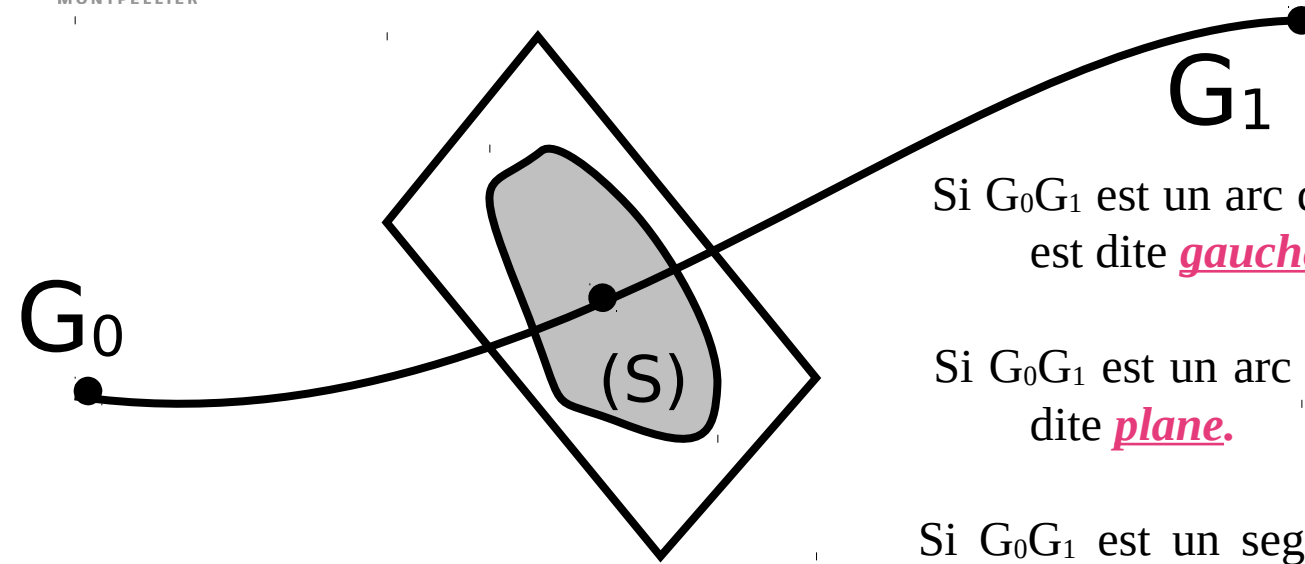
La fibre moyenne est le lieu des centres de gravité des sections.

La section droite est la section perpendiculaire à la ligne moyenne.

La section droite ne peut varier que continûment.



Un peu de vocabulaire

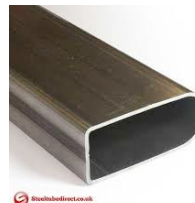


Si G_0G_1 est un arc de courbe non plane, la poutre est dite *gauche*.

Si G_0G_1 est un arc de courbe plane, la poutre est dite *plane*.

Si G_0G_1 est un segment de droite, la poutre est dite *droite*.

Les sections les plus usuelles



Hypothèses de RDM



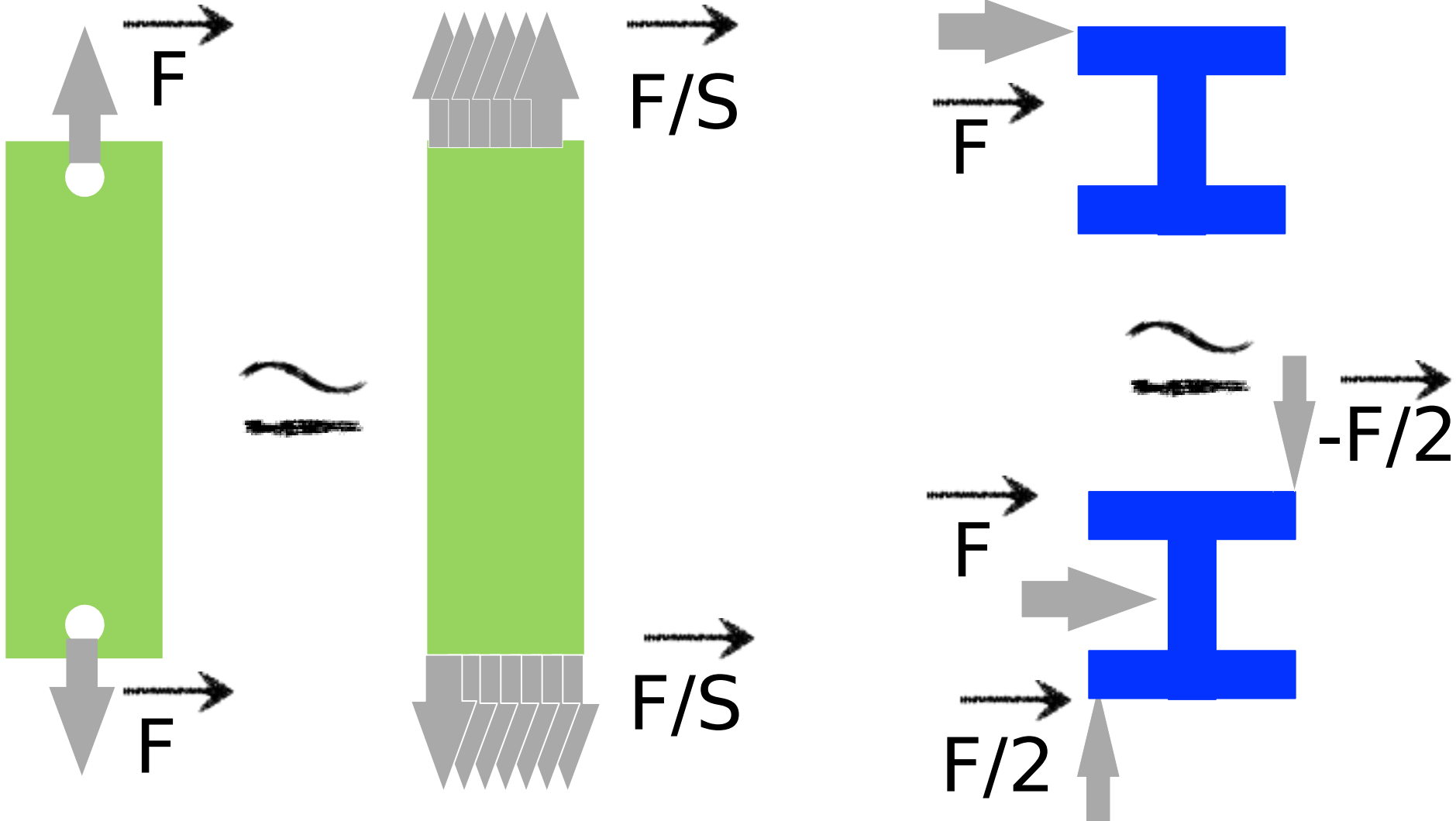
- ✓ Hypothèse de Saint Venant
- ✓ Hypothèse de Navier Bernoulli
- ✓ Hypothèse des Petites Perturbations.(HPP)

Saint Venant : Tous les efforts sont schématisés par leur torseur résultant. On ne connaît pas la répartition des efforts en chaque point de la section mais seulement leur résultante et la résultante des moments en un point.

Navier-Bernoulli : les sections droites restent, après déformation, planes et indéformables dans leur propre plan. Autrement dit, il n'y a pas gauchissement des sections ; cette hypothèse n'est pas toujours valable. Elle est cependant justifiée en hypothèse des petites déformations (HPP).

HPP : La poutre s'écarte «peu» de la configuration de référence. On assimile la configuration de référence et la configuration déformée.

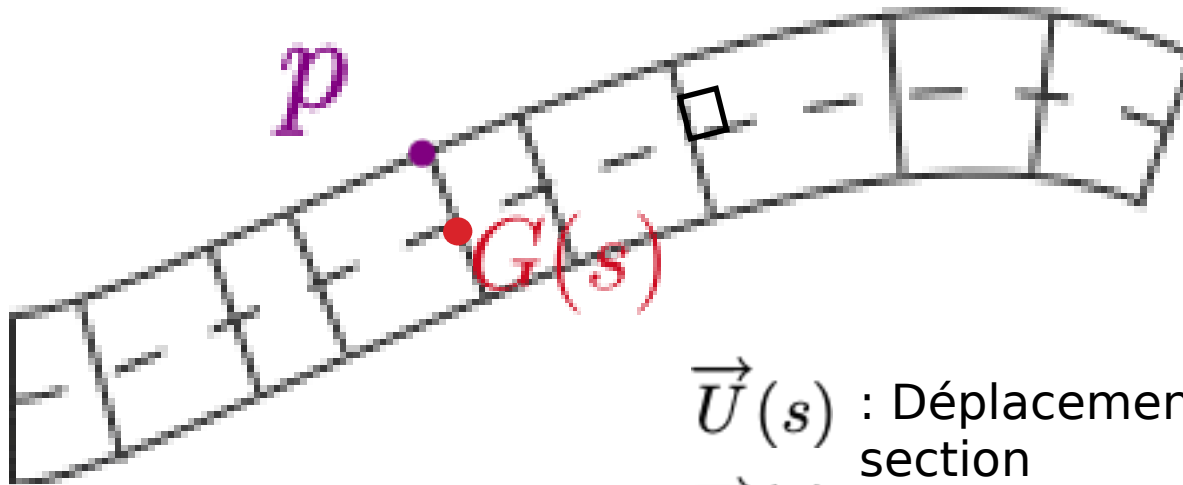
Principe de St Venant



Hypothèse de Navier-bernouilli



Navier-Bernoulli : les sections droites restent, après déformation, **planes et indéformables dans leur propre plan.**



$\vec{U}(s)$: Déplacement de la section

$\vec{\omega}(s)$: Rotation de la section

$$\vec{U}(p) = \vec{U}(s) + \overrightarrow{PG(s)} \wedge \vec{\omega}(s)$$

Cas des poutres rectilignes (plan)



$$\vec{U}(p) = \vec{U}(s) + \overrightarrow{PG(s)} \wedge \vec{\omega}(s)$$

Cinématique de Navier-Bernouilli Cas des poutres rectilignes (plan):

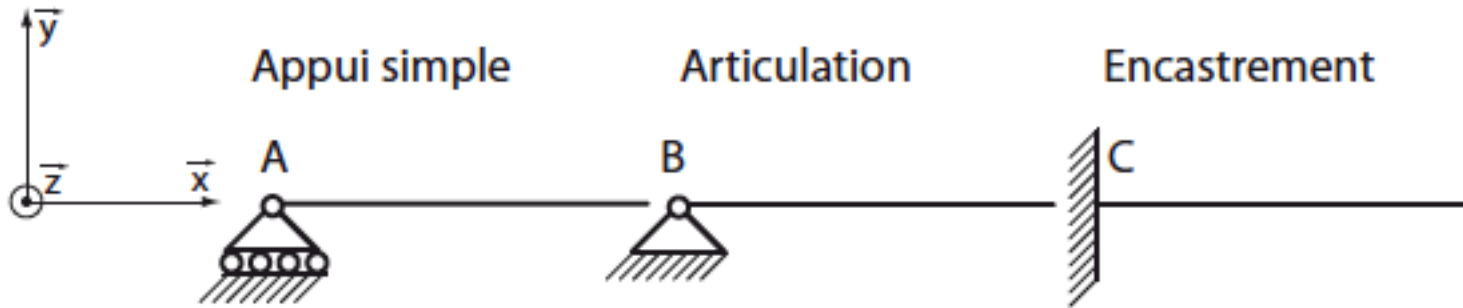
$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

$u(x)$ Déplacement longitudinal de G

$v(x)$ Déplacement vertical de G

y_g Ordonnée de G

Liaisons: Inconnues en 2-D - plan



$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{array} \right\}$$

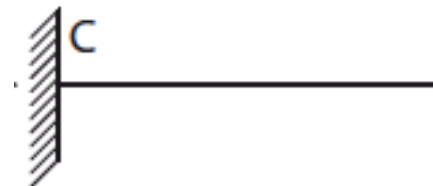


Linéaire annulaire



Rotule

Encastrement





Conditions aux limites en déplacement

Le Champs de Déplacement : $\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$



Linéaire annulaire

$$v(x_A) = 0$$



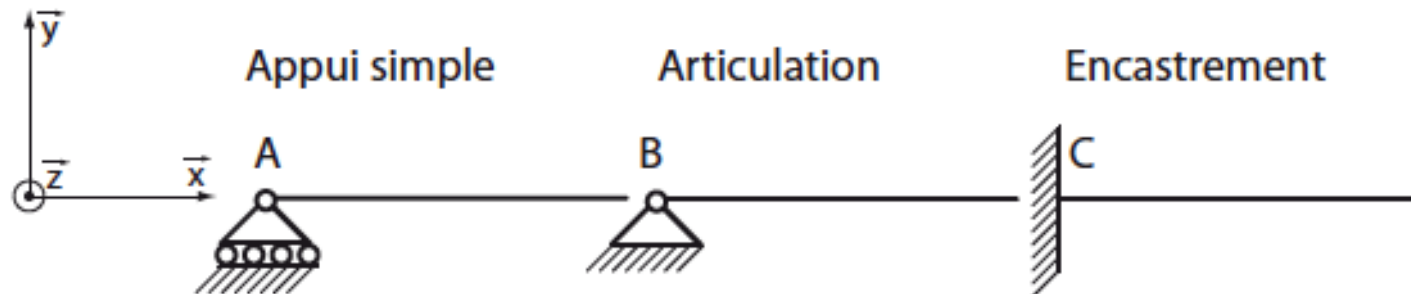
Rotule

$$\begin{aligned} u(x_B) &= 0 \\ v(x_B) &= 0 \end{aligned}$$

Encastrement



$$\begin{aligned} u(x_C) &= 0 \\ v(x_C) &= 0 \quad \text{et} \quad v'(x_C) = 0 \end{aligned}$$





Qu'est ce qu'un Pb de mécanique ?

Qu'est ce qu'une poutre?

La fibre moyenne ?

La section droite ?

Hypothèse de Navier-Bernouilli ?

**Champs cinématique d'une poutre gauche respectant les
Hyp. Ber. ?**

**Champs cinématique d'une poutre droite respectant les
Hyp. Ber. ?**

PFS et alors !!



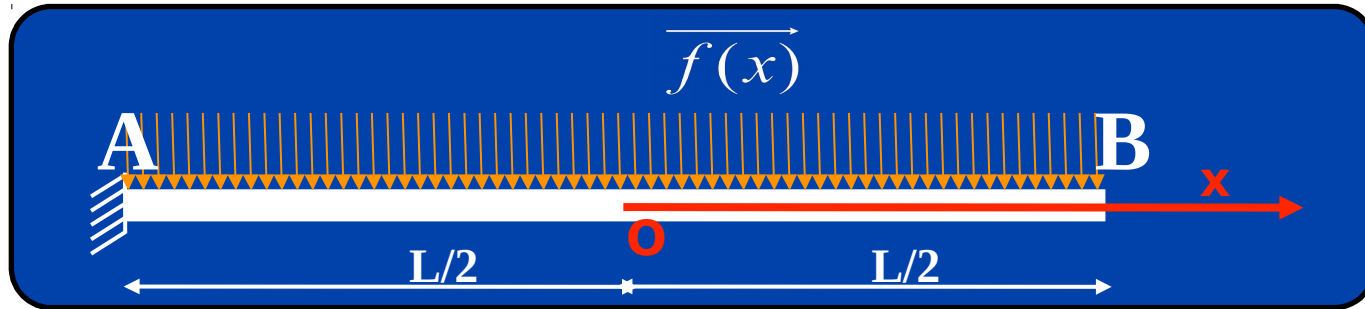
$$\{T\}_A^{ext} = \{0\}_A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{liais} + \vec{F}_{app} \\ \vec{M}_{liais} + \vec{M}_{app} \end{array} \right\}_A^{ext} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Méthode

- 1) **Repérage** du système à isoler
- 2) Bilan des efforts extérieurs
- 3) Écrire les équations et résoudre

PFS : Exemple d'une force uniformément répartie



1) Bilan des Efforts Extérieurs

- ▣ Effort Appliqué

- ▣ Force linéique

- ▣ Efforts de Liaison

- ▣ Réaction et moment d'encastrement

2) Calcul des Éléments de Réduction des Torseurs

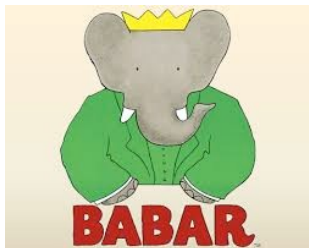
Efforts extérieurs - 2D -plan



Effort Ponctuel en A = Glisseur $\left\{ \begin{array}{c|c} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$

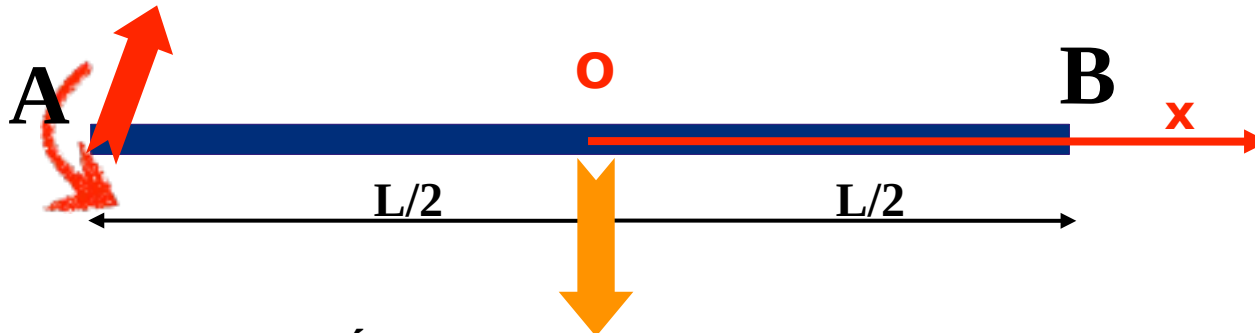
Couple Ponctuel en A = Couple $\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_z \end{array} \right\}_A$

Effort réparti entre A et B = $\left\{ \begin{array}{c} \int_{x_A}^{x_B} \vec{f}(x) dx \\ \vec{M}_{(A)} = \int_{x_A}^{x_B} (x - x_A) \cdot f_y(x) dx \vec{z} \end{array} \right\}_{(A)}$



$$\vec{M}_{(B)} = \vec{M}_{(A)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{(A)}$$

PFS : Exemple d'une force uniformément répartie



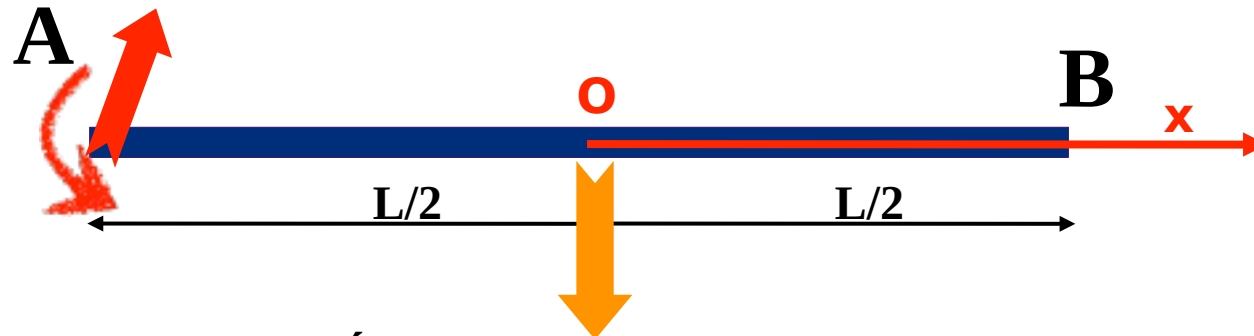
2) Calcul des Éléments de Réduction des Torseurs

$$\int_{x_A}^{x_B} f_y(x) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (-p) dx = -pL$$

$$\int_{x_A}^{x_B} (x - x_0) \cdot f_y(x) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \cdot (-p) dx = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(O)}$$

PFS : Exemple d'une force uniformément répartie

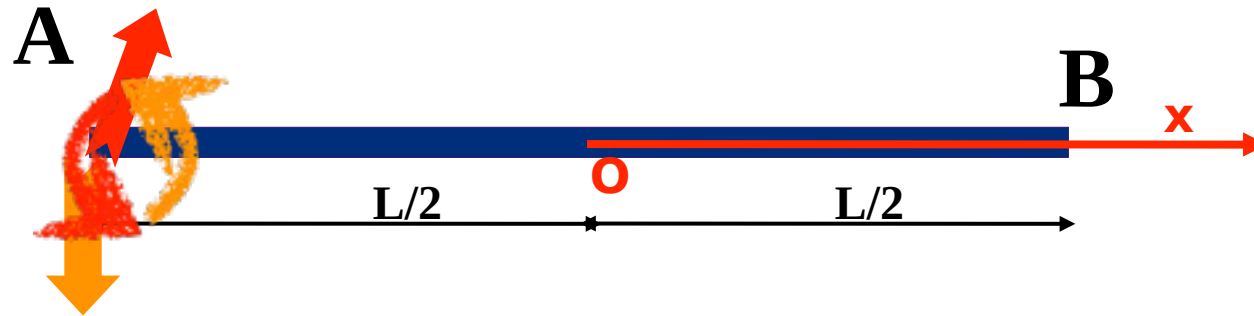


2) Calcul des Éléments de Réduction des Torseurs

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{array} \right\}_{(A)}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(O)}$$

PFS : Exemple d'une force uniformément répartie

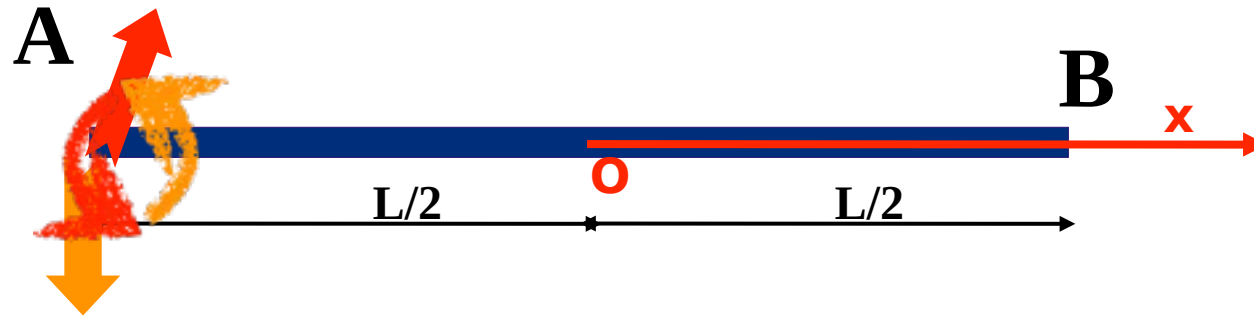


3) Appliquer le PFS au Point A

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{array} \right\}_{(A)} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & 0 + \frac{L}{2}(-pL) \end{array} \right\}_{(A)} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(A)}$$

4) Déterminer les Efforts de Liaison

PFS : Exemple d'une force uniformément répartie

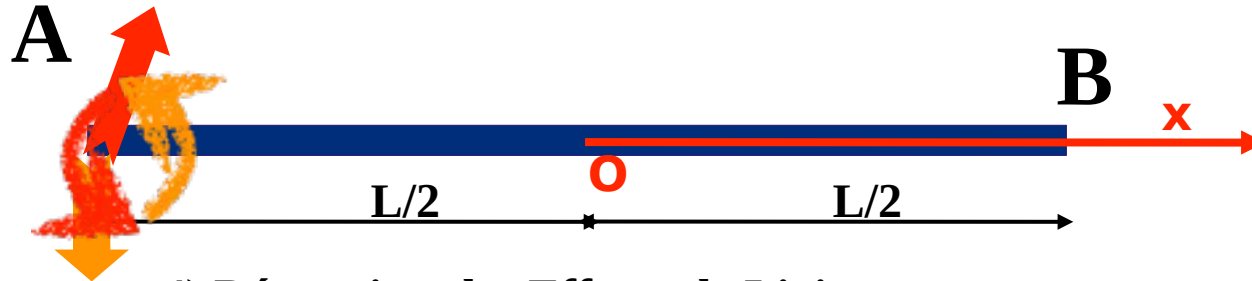


3) Appliquer le PFS au Point A

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{array} \right\}_{(A)}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & 0 + \frac{L}{2}(-pL) \end{array} \right\}_{(A)}$$

PFS : Exemple d'une force uniformément répartie



4) Déterminer les Efforts de Liaison

$$\begin{cases} R_x & = & 0 \\ R_y & = & +pL \\ M_z & = & \frac{pL^2}{2} \end{cases}$$

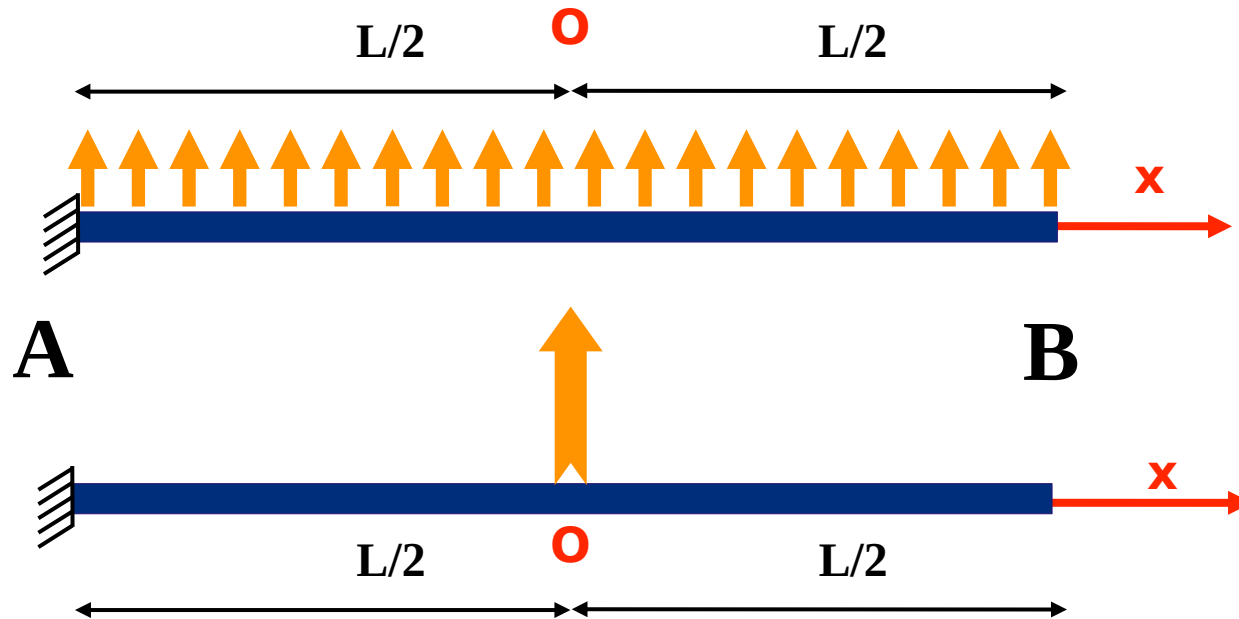


Les efforts de liaison ne dépendent pas du type du chargement

Pourquoi faire alors de la RDM ?



Les efforts de liaison ne dépendent pas du type du chargement (à torseur équivalent)



Les efforts internes dépendent fortement du type du chargement



Les efforts internes dépendent fortement du type du chargement

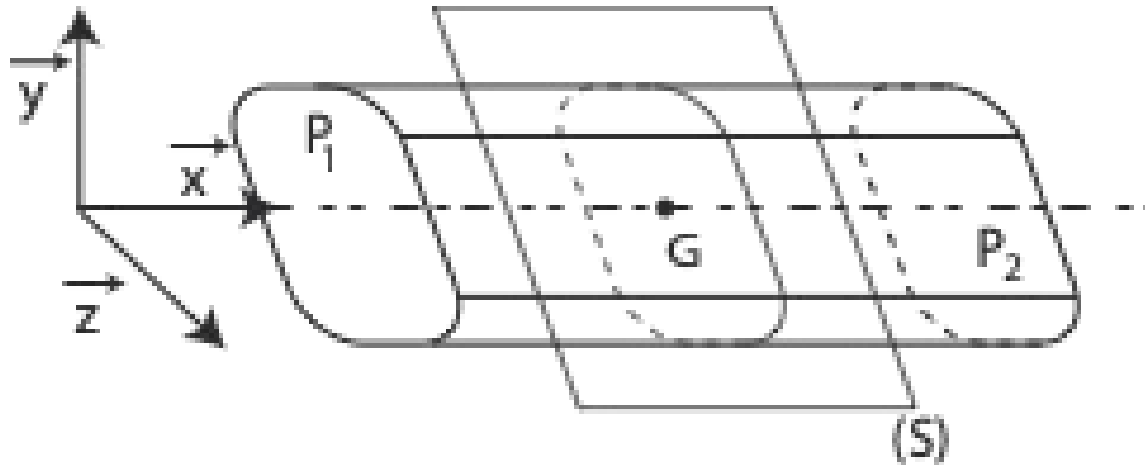
Méthode sthénique ou des coupures (IUT, BTS, EI,...)

Cas simples et répétitifs

Méthode des équations locales

un premier pas vers la MMD et les EF

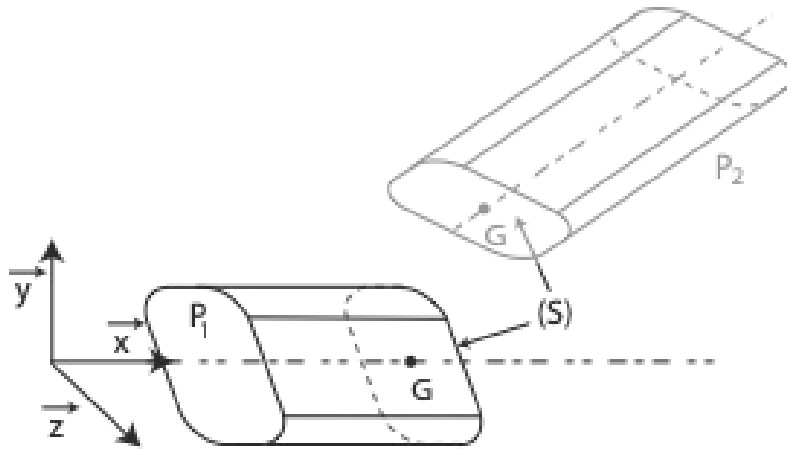
Méthode sthénique ou des coupures



P.F.S. appliqué à la poutre $P = P_1 \cup P_2$

$$\{T\}_G^{ext} = \{0\}_G$$

$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} + \{T\}_G^{ext \rightarrow P_2} = \{0\}_G$$



P.F.S. appliqué à la poutre

$$P = P_1$$

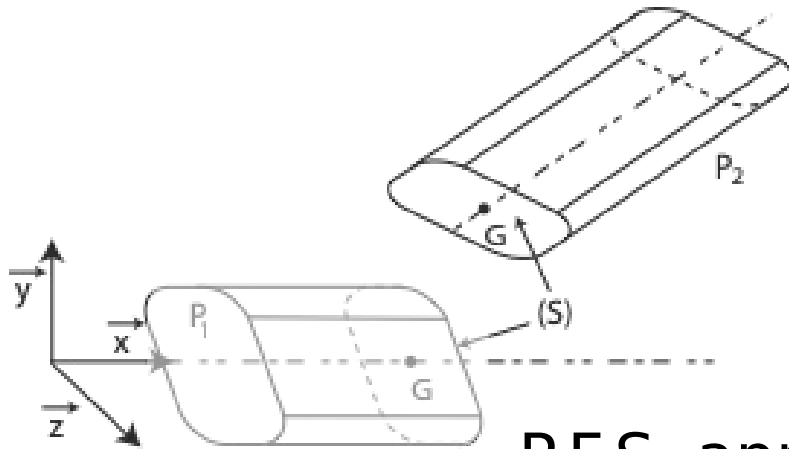
$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} + \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1} = \{0\}_G$$

Par convention

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1}$$

$$\{T\}_G^{coh} = -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1}$$

Méthode sténique ou des coupures



Par convention

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1}$$

P.F.S. appliqué à la poutre $P = P_2$

$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_2} + \{T\}_G^{P_1 \rightarrow P_2} = \{0\}_G$$

$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_2} - \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1} = \{0\}_G$$

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{ext \rightarrow P_2}$$

Sollicitations Élémentaires



Sollicitation élémentaire	Composante(s) non nulle(s)	$\{T\}_G^{coh}$
Traction/Compression	N	$\left\{ \begin{array}{c} N \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$
Cisaillement pur	T_y	$\left\{ \begin{array}{c} T_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$
Torsion	M_t	$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_t \vec{x} \end{array} \right\}_G$
Flexion pure	M_{fz}	$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}_G$
On montrera que dans ce cas, M_{fz} , est constant.		
Flexion simple	T_y et M_{fz}	$\left\{ \begin{array}{c} T_y \vec{y} \\ M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}_G$

Sollicitations Élémentaires



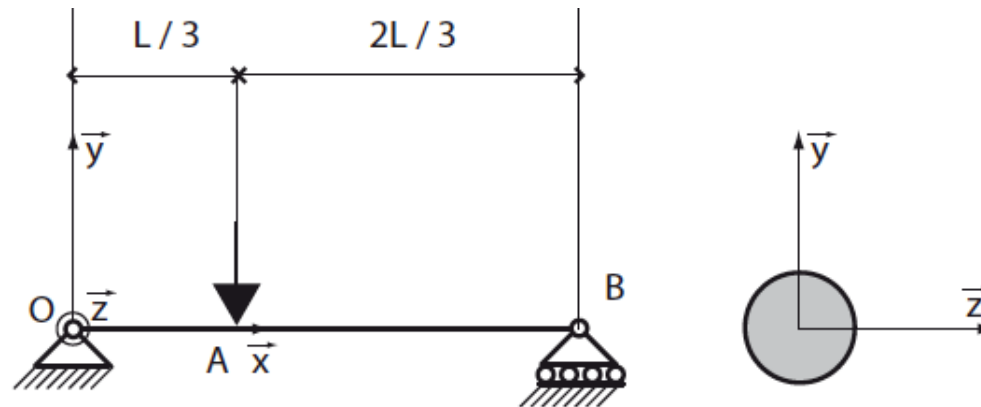
Noms de la composantes	Composante(s) non nulle(s)	$\{T\}_G^{coh}$
Effort Normal	N	$\left\{ \begin{array}{c} N \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$
Effort Tranchant	T_y	$\left\{ \begin{array}{c} T_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$
Moment de Torsion	M_t	$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_t \vec{x} \end{array} \right\}_G$
Moment de Flexion	M_{fz}	$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_{fz} \vec{z} \end{array} \right\}_G$

Exemples



$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1}$$

$$\{T\}_G^{coh} = -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} = \{T\}_G^{ext \rightarrow P_2}$$



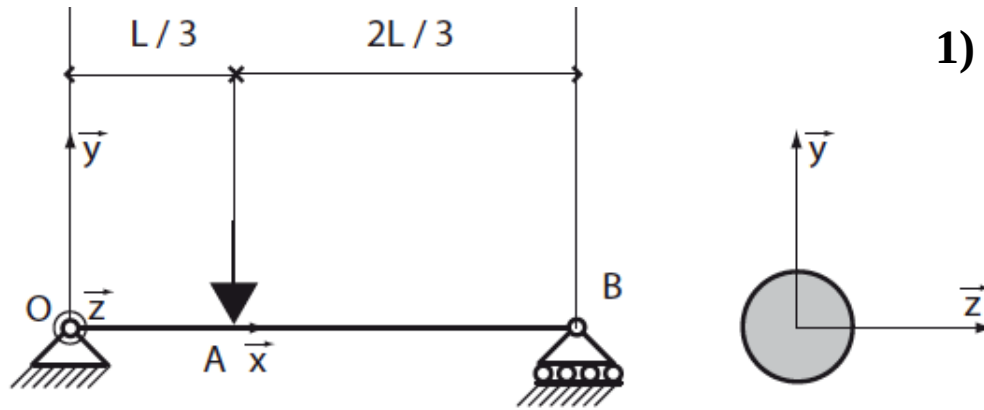
1) Bilan des Efforts Extérieurs

Rotule en O

Linéaire annulaire en B

Force concentrée en A

Exemples



1) Bilan des Efforts Extérieurs

Force concentrée en A

$$\left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Rotule en O

$$\left\{ \begin{array}{c} X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

Linéaire annulaire en B

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$



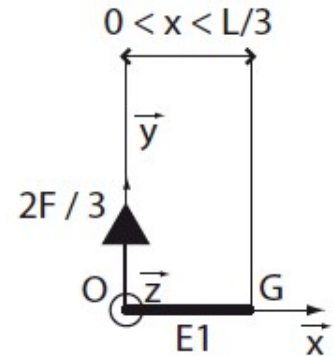
1) On Isole le tronçon de GAUCHE

$$\{T\}_G^{coh} = - \{T\}_G^{ext \rightarrow P_1}$$

$$\{T\}_O^{ext \rightarrow P_1} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O^{ext \rightarrow P_1}$$

$$- \{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ \vec{0} + \vec{GO} \wedge \frac{2F}{3} \vec{y} \end{array} \right\}_G^{ext \rightarrow P_1}$$

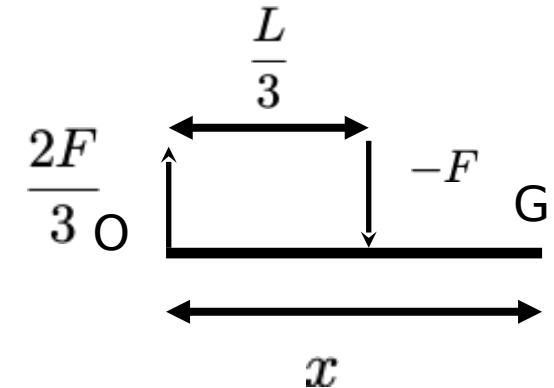
$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{2F}{3} \vec{y} \\ \frac{2F}{3} x \vec{z} \end{array} \right\}_G^{ext \rightarrow P_1} = \{T\}_G^{coh}$$





2) On Isole le tronçon de GAUCHE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

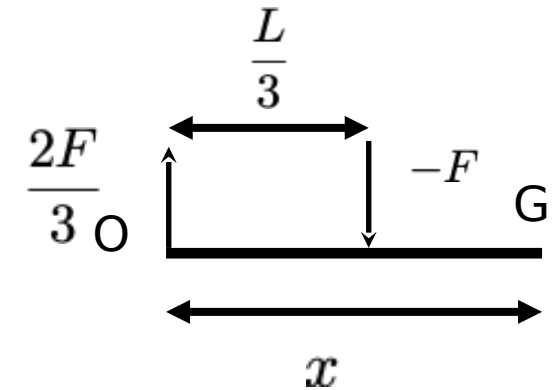
$$\{F\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\begin{aligned} \{T\}_G^{coh} &= -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} \\ &= -\{T\}_G - \{F\}_G \end{aligned}$$



2) On Isole le tronçon de GAUCHE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

$$-\{T\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2F}{3} \vec{y} \\ \frac{2F}{3} x \vec{z} \end{array} \right\}_G$$

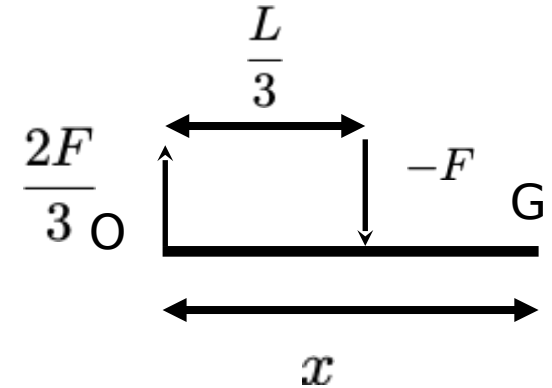
$$\{F\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$-\{F\}_G = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{y} \\ -F(x - \frac{L}{3}) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$



2) On Isole le tronçon de GAUCHE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\{F\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

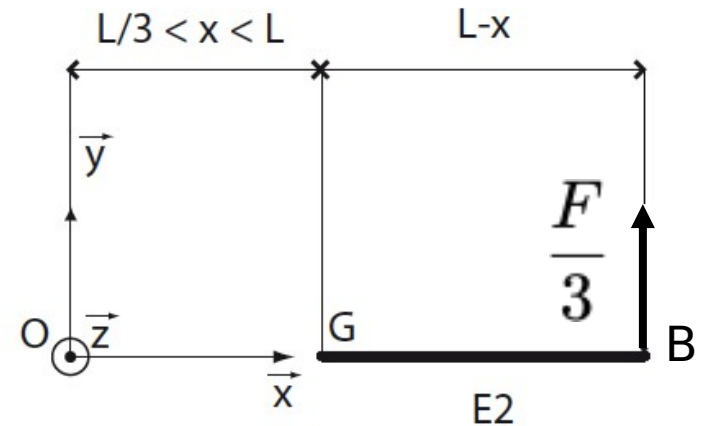
$$\{T\}_G^{coh} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{F}{3} \vec{y} \\ F \frac{1}{3} (L - x) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$



2 bis) On Isole le tronçon de DROITE

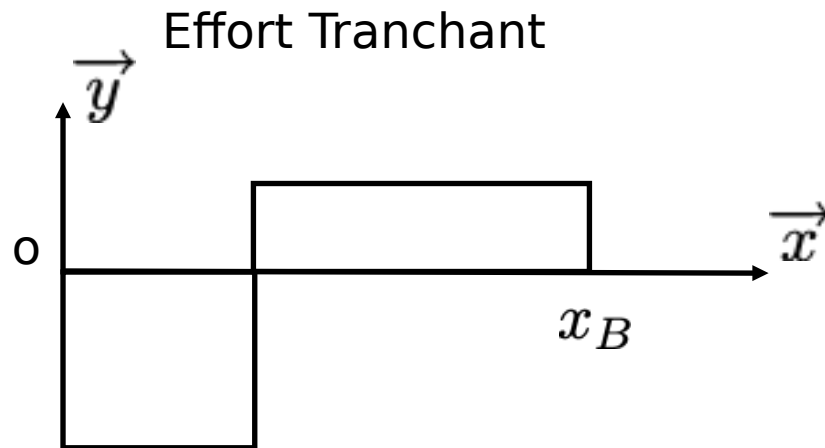
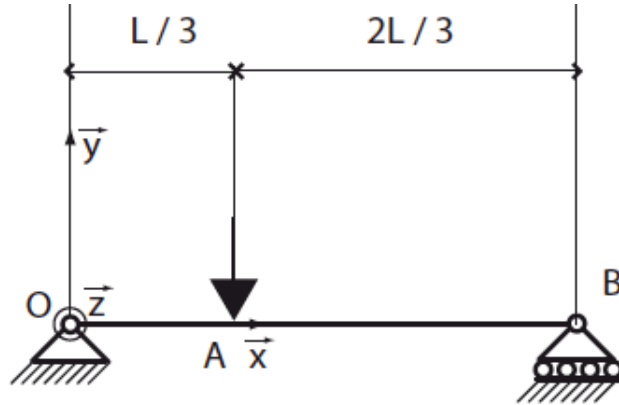
$$\frac{L}{3} < x < L$$

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{ext} \rightarrow P_2$$



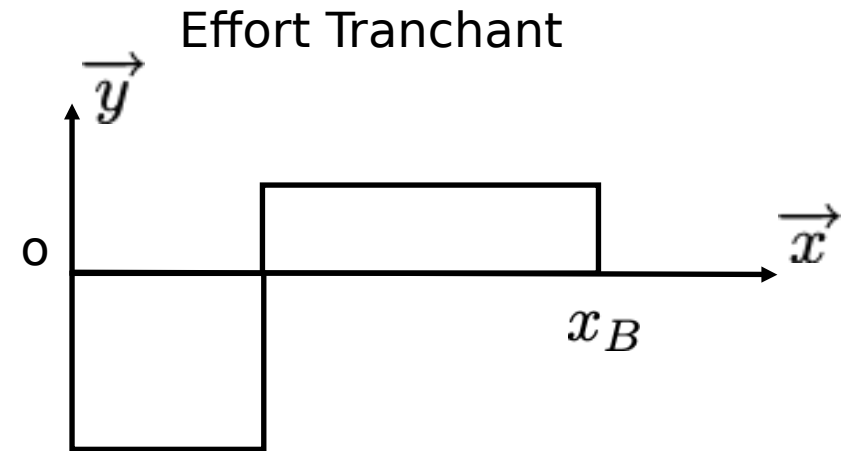
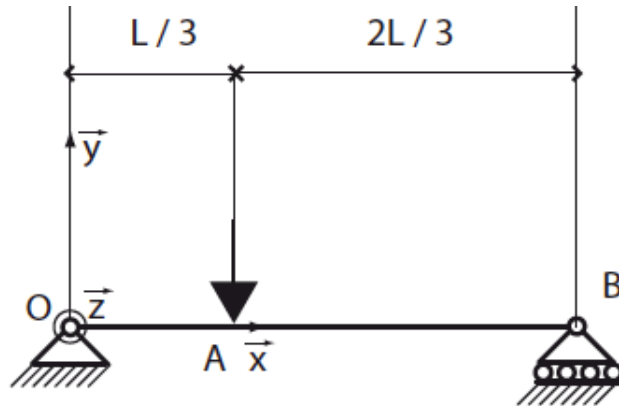
$$\{T\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \frac{F}{3} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O \quad \{T\}_G^{coh} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{F}{3} \vec{y} \\ F \frac{1}{3} (L-x) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$

Diagrammes des efforts

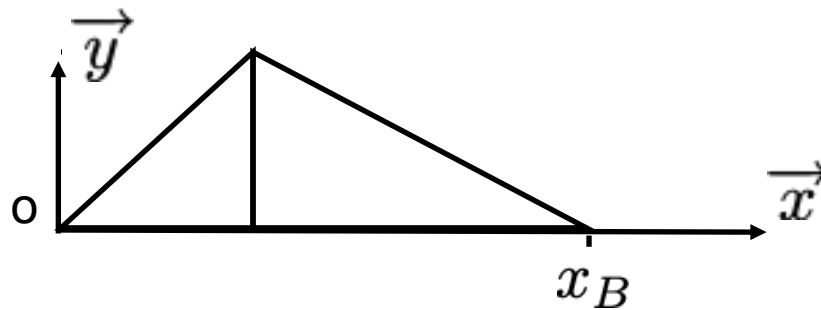




Diagrammes des efforts



Moment Fléchissant





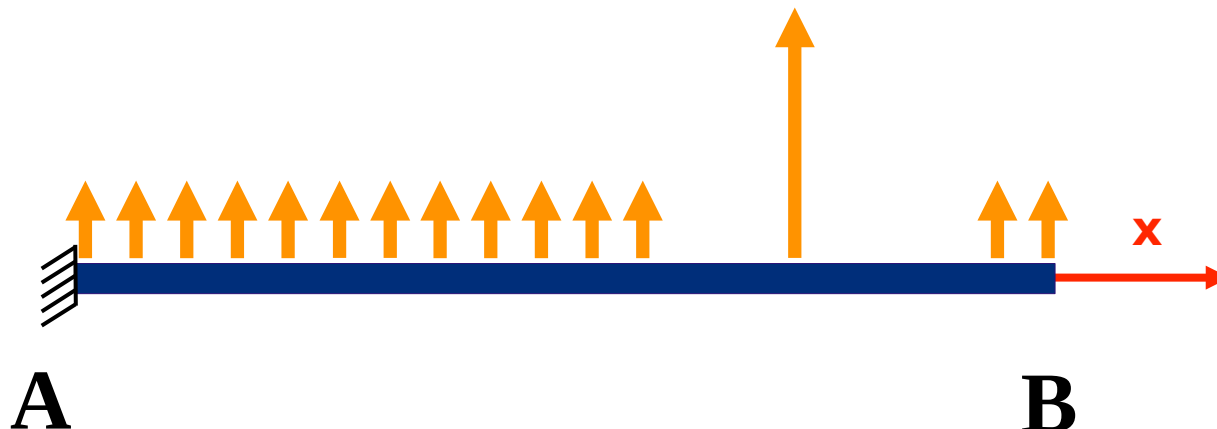
Qu'est ce qu'un Pb de mécanique ?

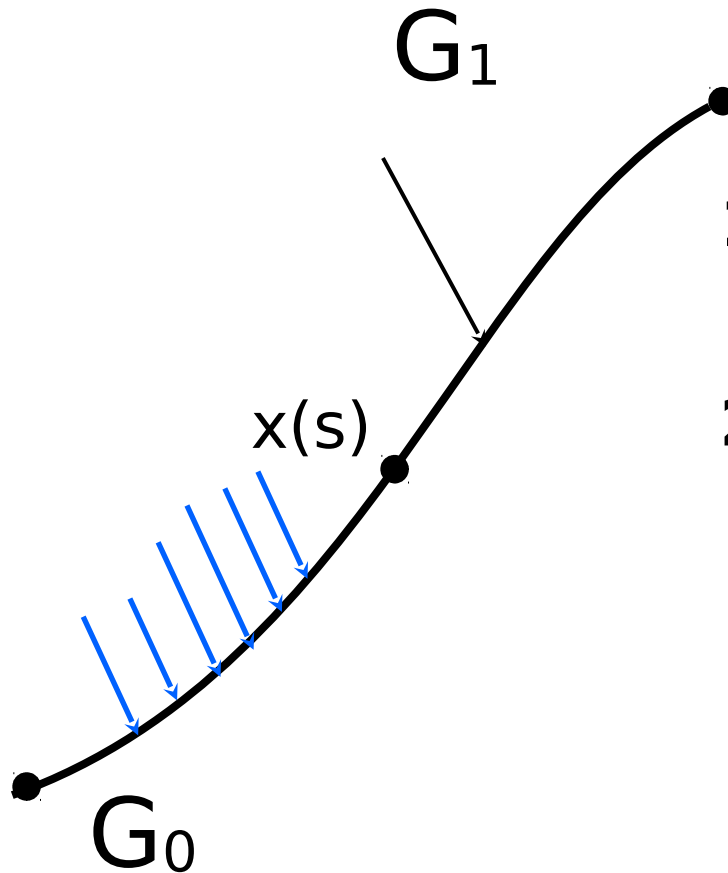
Hypothèse de Bernoulli ?

Champs cinématique dans un repère Cartésien d'une poutre droite respectant les Hyp. Ber. ?

Définition du Torseur de cohésion

Nombre de coupure dans le cas suivant ou de zones d'étude





1. Équations d'équilibre 1-D

1.RDM

2. Conditions aux limites

1.En efforts

1. Ponctuel

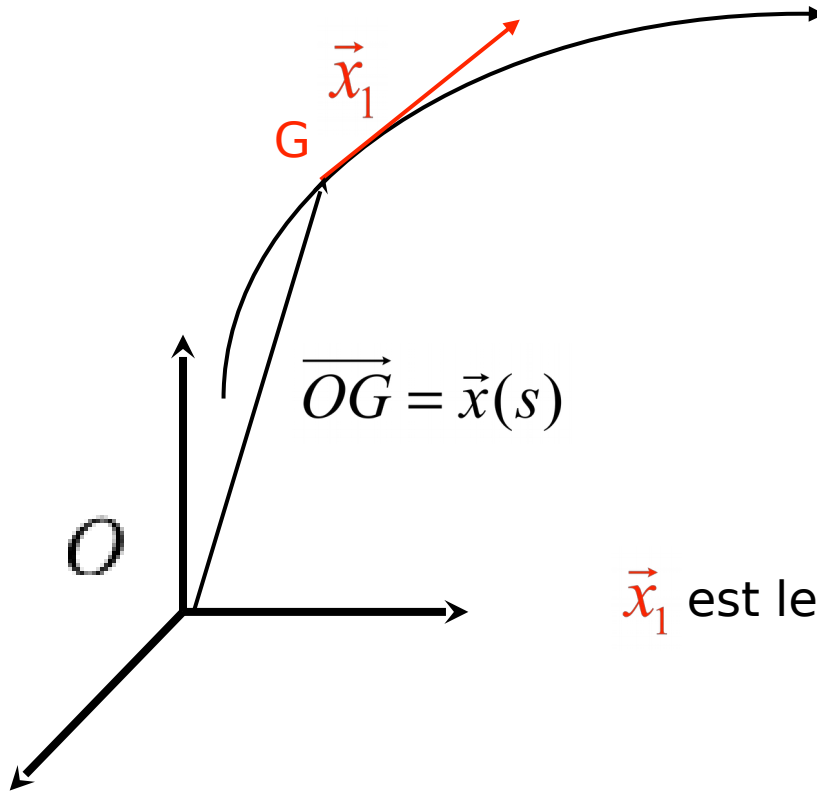
2.Couple de torsion

2.En déplacement

3. Loi de comportement

Les quantités que l'on recherche sont des fonctions d'une seule variable.

Mise en place des équations



La poutre est, d'un point de vue géométrique, une courbe d'équation : $\overrightarrow{OG} = \vec{x}(s)$ où s est l'abscisse curviligne.

\vec{x}_1 est le vecteur unitaire tangent défini par :

$$\vec{x}_1 = \frac{d\overrightarrow{OG}}{ds}$$



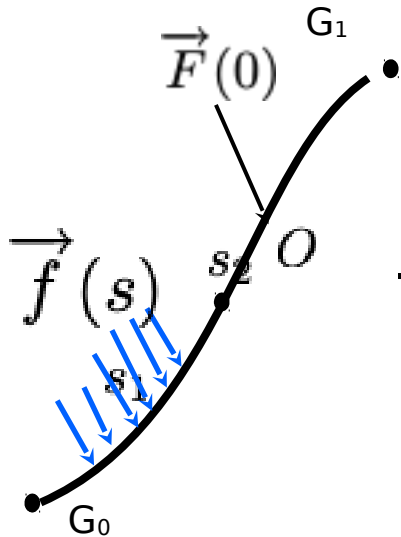
\vec{x}_1 est le vecteur qui **oriente** la poutre !

Torseur des efforts appliqués



-Force linéique

$$T_O^{Lineique} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{s_1}^{s_2} \vec{f}(s) ds \\ \vec{M}(O) = \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds \end{array} \right\}$$



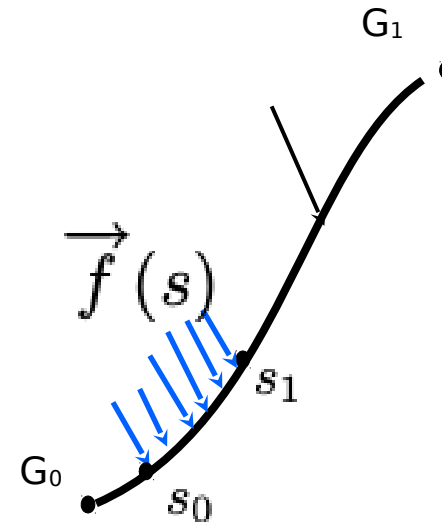
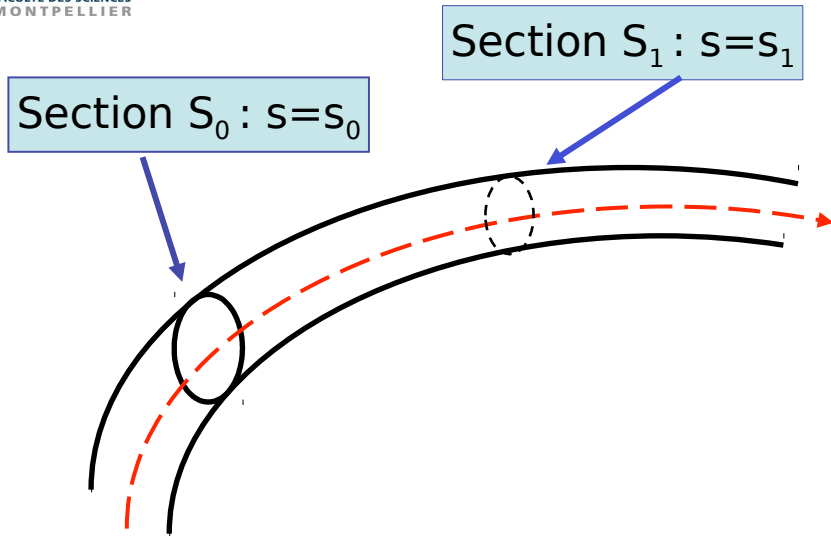
-Effort Ponctuel

$$T_O^{Ponctuel} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(0) \\ \vec{M}(O) \end{array} \right\}$$

Relation fondamentale des torseurs

$$\vec{M}(A) = \vec{M}(O) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}(O)$$

Mise en place des équations



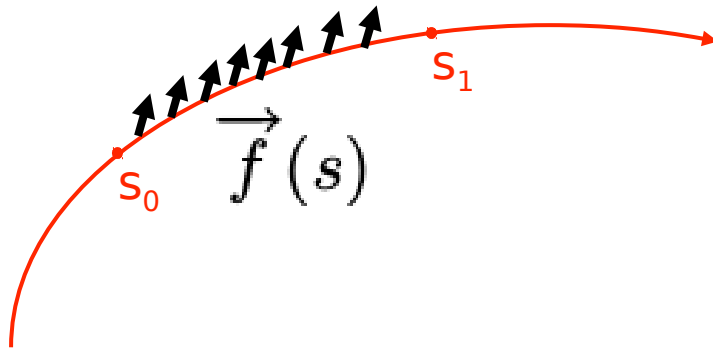
Bilan des efforts :

On applique le PFS à la partie de poutre comprise entre S_0 et S_1 , en supposant qu'il n'y a pas de charges ponctuelles et sous l'effet d'une charge répartie

- Les actions de la partie $\{s > s_1\}$ en s_1
- Les actions de la partie $\{s < s_0\}$ en s_0
- La densité linéique $\vec{f}(s)$



Mise en place des équations



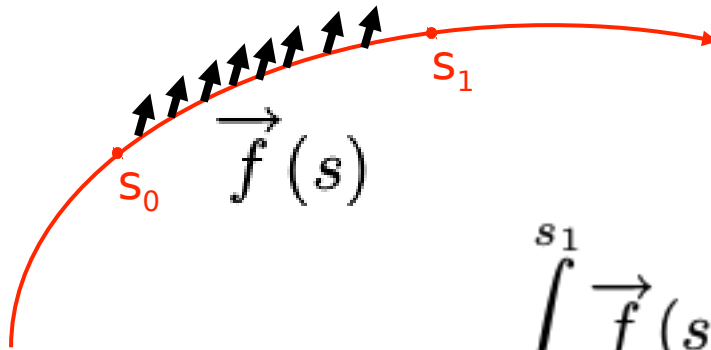
Bilan des efforts :

- Les actions de la partie $\{s > s_1\}$ en s_1
- Les actions de la partie $\{s < s_0\}$ en s_0
- La densité linéique

$$T_{s_0}^{s < s_0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(s_0) \\ \vec{M}(s_0) \end{array} \right\}$$

$$T_{s_1}^{s > s_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(s_1) \\ \vec{M}(s_1) \end{array} \right\}$$

$$T_O^{Lineique} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{s_0}^{s_1} \vec{f}(s) ds \\ \vec{M}(O) = \int_{s_0}^{s_1} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds \end{array} \right\}$$



PFS Résultante

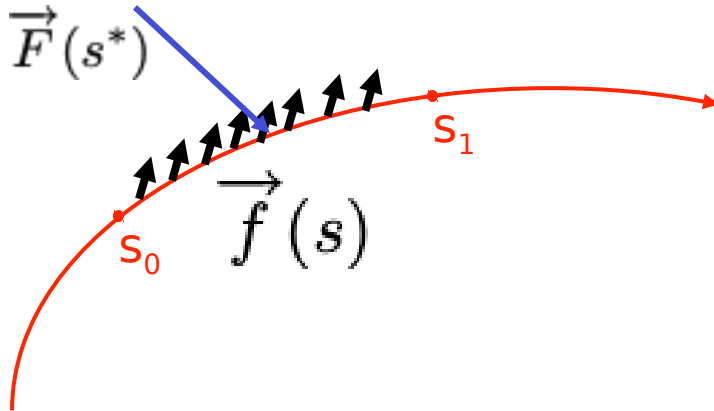
$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{f}(s) ds + \vec{R}(s_1) - \vec{R}(s_0) = \vec{0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{R}(s) \right) ds = \vec{0} \quad \forall s_0, s_1$$

$$\vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{R}(s) = \vec{0} \quad \forall s_0, s_1$$



Mise en place des équations



➤ Bilan des efforts :

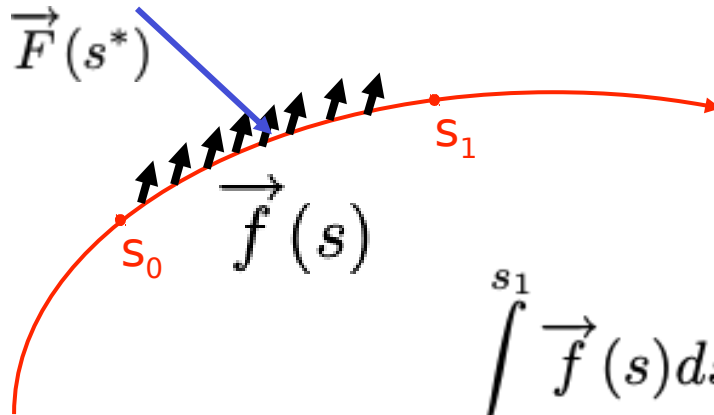
- Les actions de la partie $\{s > s_1\}$ en s_1
- Les actions de la partie $\{s < s_0\}$ en s_0
- La densité linéique
- Une force ponctuelle en s^*

$$T_{s_0}^{s < s_0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(s_0) \\ \vec{M}(s_0) \end{array} \right\}$$

$$T_{s_1}^{s > s_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(s_1) \\ \vec{M}(s_1) \end{array} \right\}$$

$$T_O^{Lineique} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{s_0}^{s_1} \vec{f}(s) ds \\ \vec{M}(O) = \int_{s_0}^{s_1} \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) ds \end{array} \right\}$$

$$T_{s^*}^F = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(s^*) \\ 0 \end{array} \right\}$$



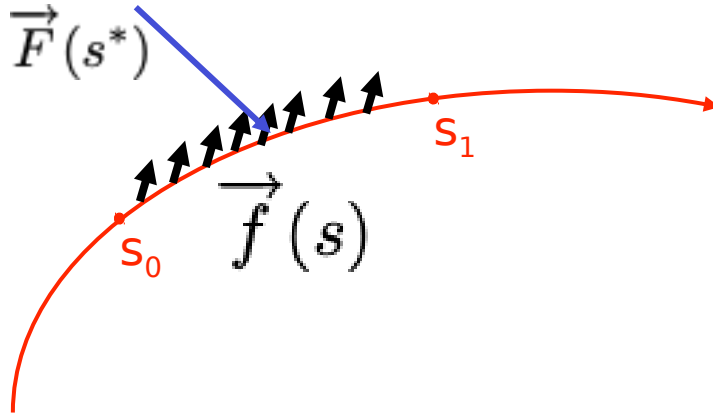
PFS Résultante

$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{f}(s) ds + \vec{R}(s_1) - \vec{R}(s_0) + \vec{F}(s^*) = \vec{0}$$

$$\int_{s_-^*}^{s_+^*} (\vec{f}(s) ds) + \vec{R}(s_+^*) - \vec{R}(s_-^*) + \vec{F}(s^*) = \vec{0}$$

$$[[\vec{R}(s)]]_{s^*} + \vec{F}(s^*) = \vec{0}$$

Mise en place des équations



$$\vec{R}(s) = N(s)\vec{x}_1 + \vec{T}(s)$$

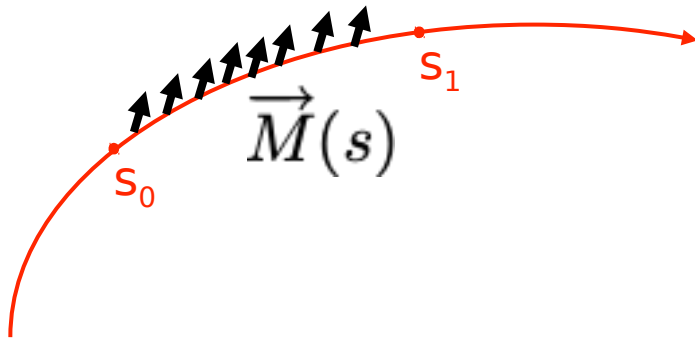
$$\vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{R}(s) = \vec{0} \quad ; \quad \forall s \in]s_0, s^* [\cup]s^*, s_1 [$$

$$[[\vec{R}(s)]]_{s^*} + \vec{F}(s^*) = \vec{0}$$



Mise en place des équations

PFS Moment en O



$$\vec{M}_{\vec{f}}(O) + \vec{M}_{s_1}(O) + \vec{M}_{s_0}(O) = \vec{0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) ds + \vec{M}_{s_1}(G_1) + \vec{OG}_1 \wedge \vec{R}(s_1) - \vec{M}_{s_0}(G_0) - \vec{OG}_0 \wedge \vec{R}(s_0) = \vec{0}$$

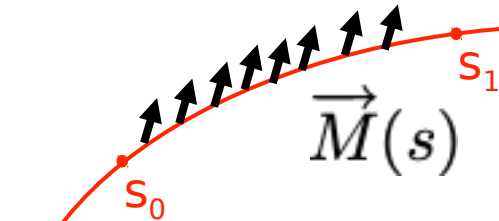
$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \frac{d}{ds} (\vec{OG} \wedge \vec{R}(s)) ds = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \vec{OG} \wedge \vec{R}(s) &= \frac{d}{ds} (\vec{OG}) \wedge \vec{R}(s) + \vec{OG} \wedge \frac{d}{ds} \vec{R}(s) \\ &= \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) - \vec{OG} \wedge \vec{f} \end{aligned}$$



Mise en place des équations

PFS Moment en O



$$\int_{s_0}^{s_1} \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \overrightarrow{M}(s) + \frac{d}{ds} (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}(s)) ds = \vec{0}$$

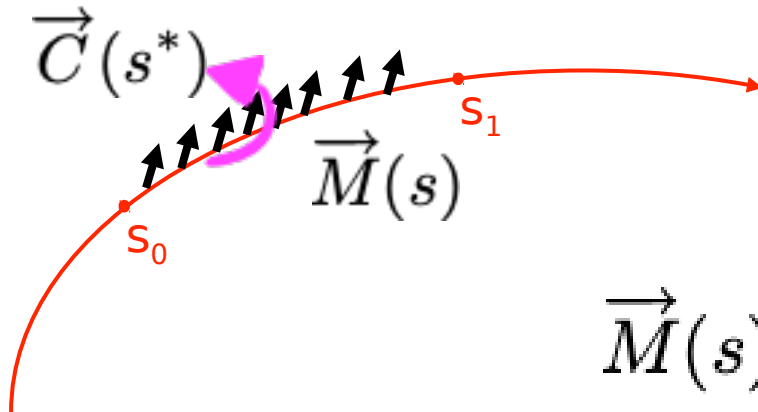
$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \overrightarrow{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) ds = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \overrightarrow{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$



Mise en place des équations

PFS Moment



$$\vec{M}(s) = M_{torsion}(s) \vec{x}_1 + \vec{M}_{flexion}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0} \quad \forall s \in]s_0, s^* [\cup]s^*, s_1 [$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{s^*} + \vec{C}(s^*) = \vec{0}$$

Les équations vectorielles RDM



$\vec{x}_1 =$ Vecteur unitaire tangent à la ligne moyenne
 $\frac{d}{ds} \vec{x}_1 = r \vec{n}$; \vec{n} Normale principale unitaire

$$\vec{R}(s) = N(s) \vec{x}_1 + \vec{T}(s)$$

$$\vec{M}(s) = M_{torsion}(s) \vec{x}_1 + \vec{M}_{flexion}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

$$\forall s \in]s_0, s^* [\cup] s^*, s_1 [$$

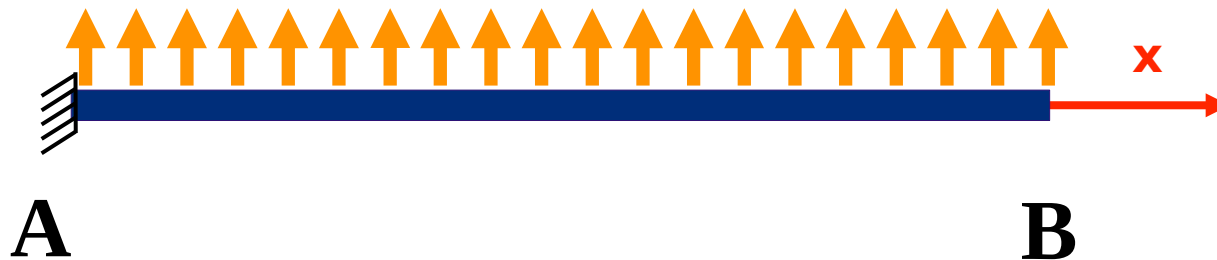
$$[[\vec{R}(s)]]_{s^*} + \vec{F}(s^*) = \vec{0}$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{s^*} + \vec{C}(s^*) = \vec{0}$$



Champs cinématique dans un repère Cartésien d'une poutre droite respectant les Hyp. Ber. ?

Résoudre par la méthode des coupures et tracer le diagramme des efforts

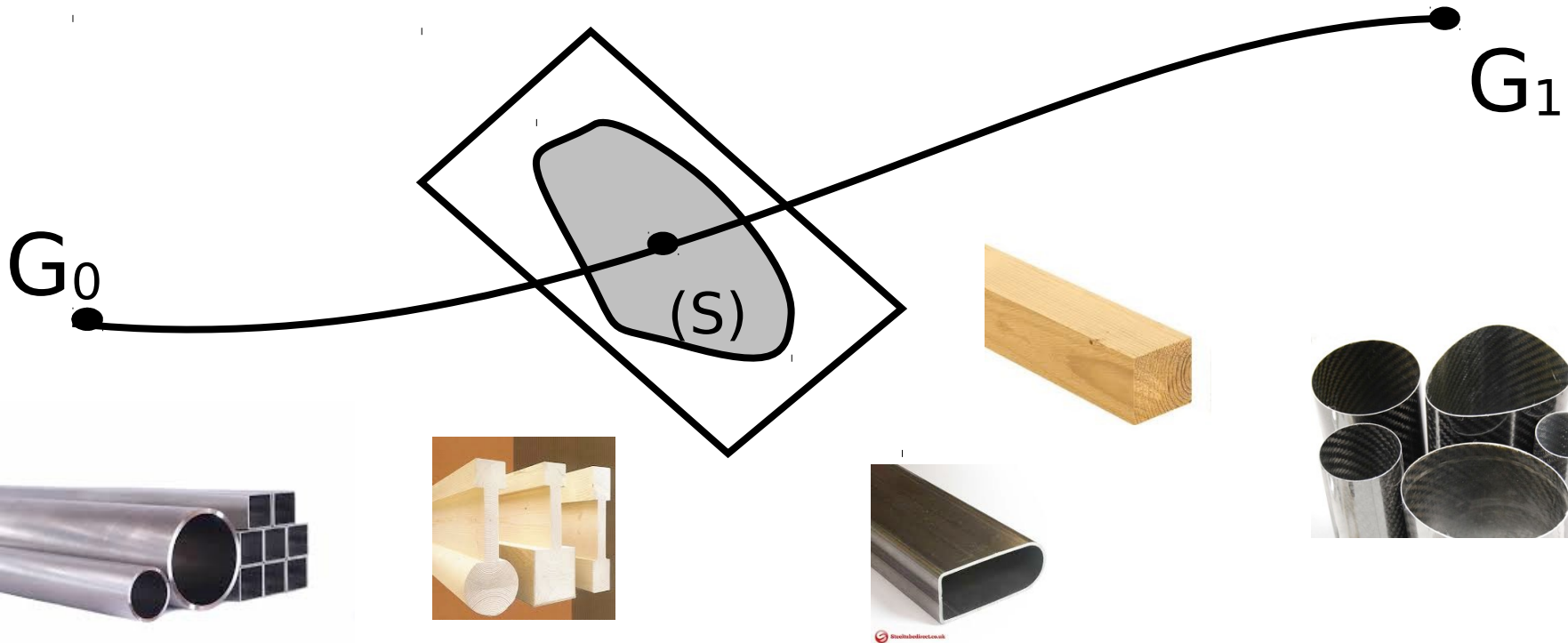




En Coordonnées Cartésiennes

Cas des poutres droites

Si G_0G_1 est un segment de droite, la poutre est dite *droite*.



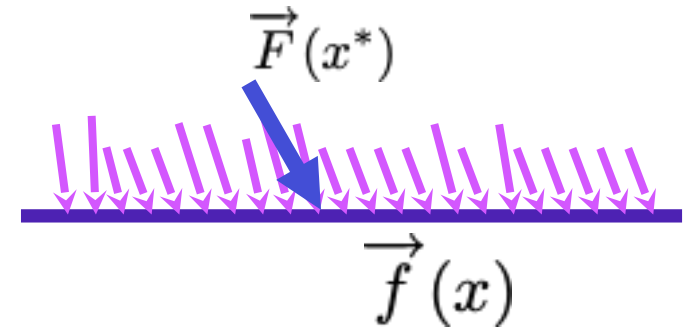


Mise en place des équations

En Coordonnées Cartésiennes

$$\vec{x}_1 = \vec{x}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{x}_1 = \frac{d}{dx} \vec{x} = \vec{0}$$



$$\vec{R}(x) = N(x)\vec{x} + T_y(x)\vec{y} + T_z(x)\vec{z}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0}$$

$$[[\vec{R}(x)]]_{x^*} + \vec{F}(x^*) = \vec{0}$$



Mise en place des équations

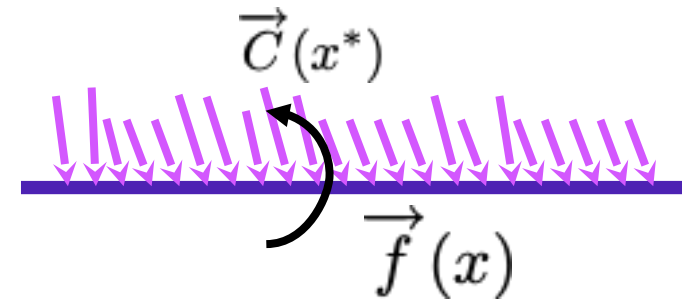
Coordonnées Cartésiennes

$$\vec{x}_1 = \vec{x}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{x}_1 = \frac{d}{dx} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{R}(x) = N(x) \vec{x} + T_y(x) \vec{y} + T_z(x) \vec{z}$$

$$\vec{M}(x) = M_{tor}(x) \vec{x} + M_{flex_y}(x) \vec{y} + M_{flex_z}(x) \vec{z}$$



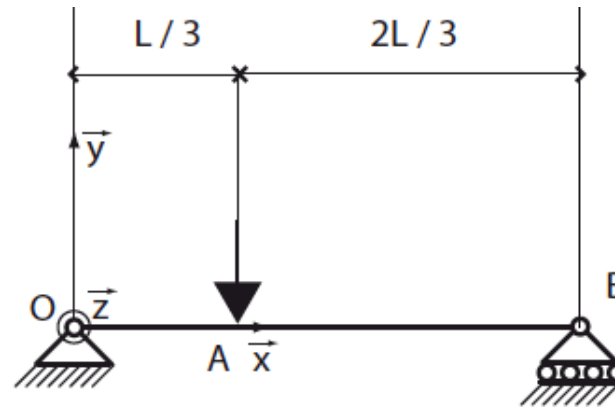
$$\frac{d}{dx} \vec{M}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$

$$[[\vec{M}(x)]]_{x^*} + \vec{C}(x^*) = \vec{0}$$

Exemples



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$R_x(L) = 0$$

Équations d'équilibre local

$$\frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

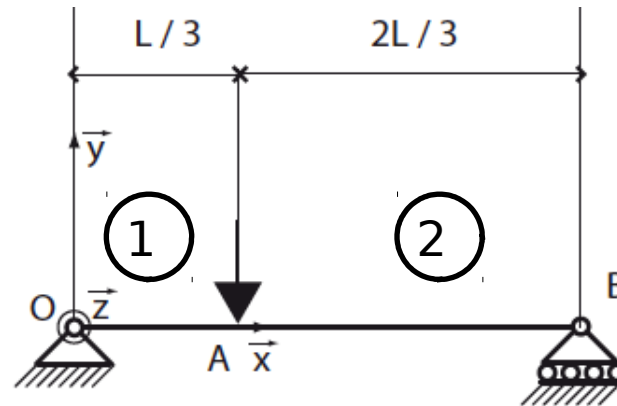
$$\frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

$$[[\vec{R}]]_{(\frac{L}{3})} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

Avec $\vec{f}(s) = \vec{0}$ et $s = x$

Exemples



$$R_x^{(2)}(L) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^1(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^{(2)}(x) = \vec{0}$$

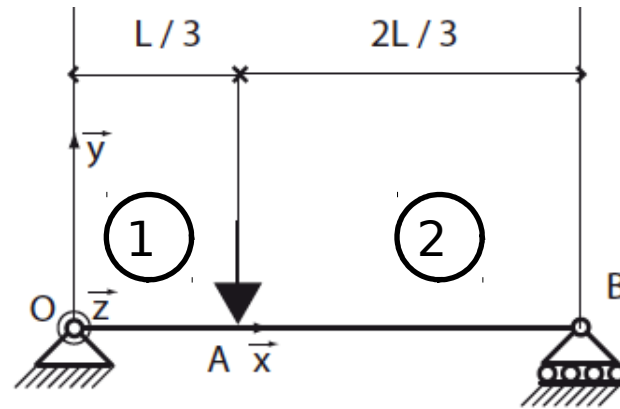
$$[[\vec{R}]]_{(\frac{L}{3})} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} R_x^1 = 0 \\ \frac{d}{dx} R_y^1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} R_x^{(2)} = 0 \\ \frac{d}{dx} R_y^{(2)} = 0 \end{cases}$$



Exemples



$$R_x(L) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^1(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^2(x) = \vec{0}$$

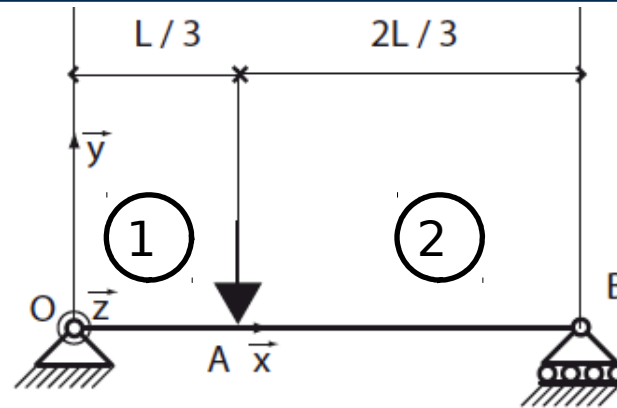
$$[[\vec{R}]]_{(L/3)} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} R_x^1 = C_1 \\ R_y^1 = K_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 - C_1 = 0 \\ K_2 - K_1 = -(-F) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x^2 = C_2 \\ R_y^2 = K_2 \end{cases}$$

Exemples



$$R_x(L) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^1(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^2(x) = \vec{0}$$

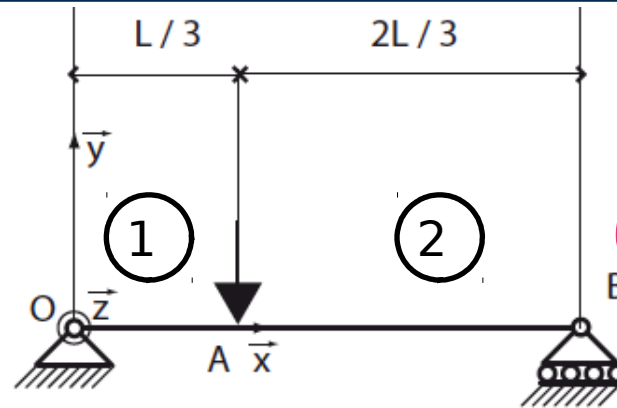
$$[[\vec{R}]]_{(L/3)} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} C_2 & = & C_1 & = & 0 \\ K_2 - K_1 & = & -(-F) & & \end{cases}$$

Exemples



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^1(x) + R_y^1(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^2(x) + R_y^2(x) = 0$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

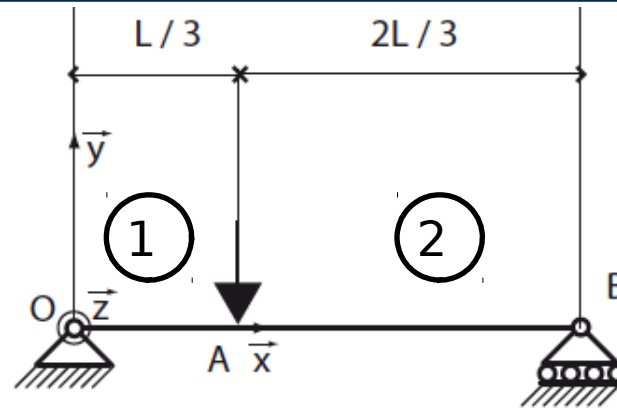
$$\frac{d}{dx} M^1(x) + K_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^2(x) + K_2 = 0$$

Exemples



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{1}}(x) + R_y^{\textcircled{1}}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{2}}(x) + R_y^{\textcircled{2}}(x) = 0$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

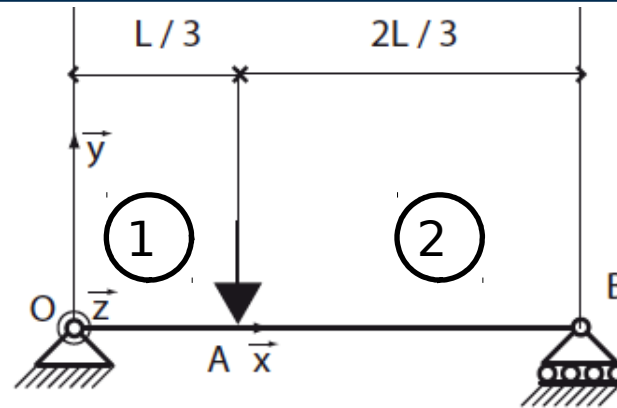
$$M^{\textcircled{1}}(x) = -K_1 x$$

$$M^{\textcircled{2}}(x) = -K_2(x - L)$$

Exemples



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{1}}(x) + R_y^{\textcircled{1}}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{2}}(x) + R_y^{\textcircled{2}}(x) = 0$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

$$M^{\textcircled{1}}(x) = -K_1 x$$

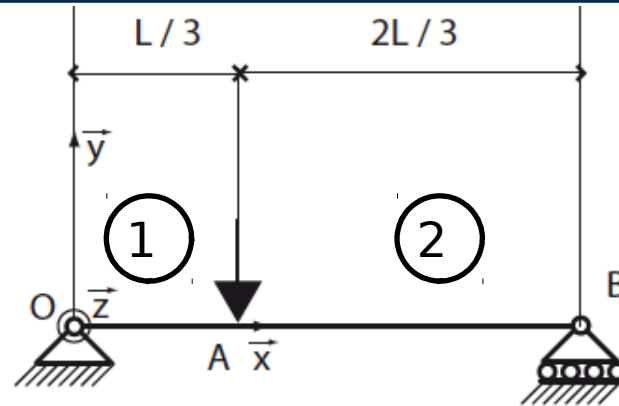
$$M^{\textcircled{2}}(x) = -K_2 (x - L)$$

$$-K_1 \frac{L}{3} = -K_2 \left(\frac{L}{3} - L \right)$$

Exemples



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$R_x(L) = 0$$

$$\begin{cases} R_x^1 &= 0 \\ R_y^1 &= K_1 \\ M^1(x) &= -K_1 x \end{cases}$$

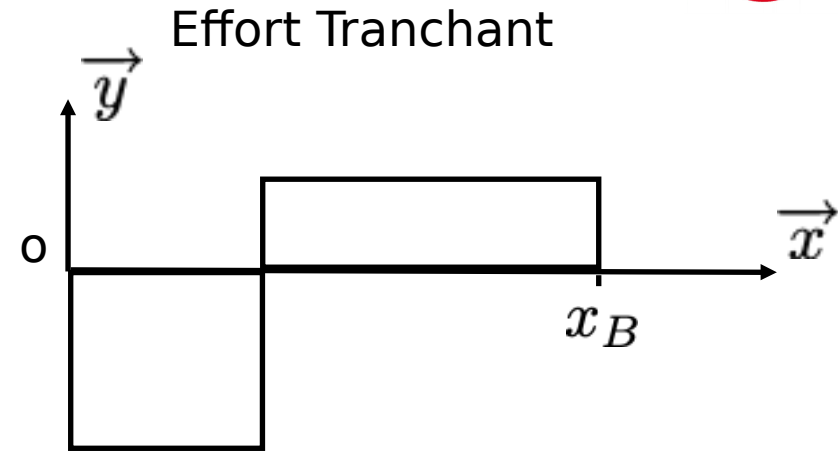
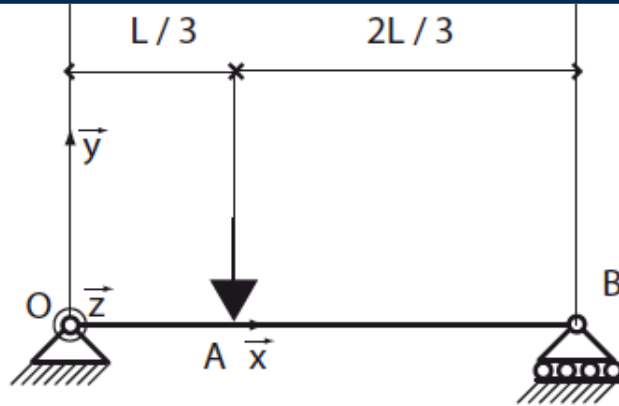
$$\begin{cases} R_x^2 &= 0 \\ R_y^2 &= K_2 \\ M^2(x) &= -K_2(x - L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 &= -2K_2 \\ K_2 - K_1 &= F \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 &= -2\frac{F}{3} \\ K_2 &= \frac{F}{3} \end{cases}$$



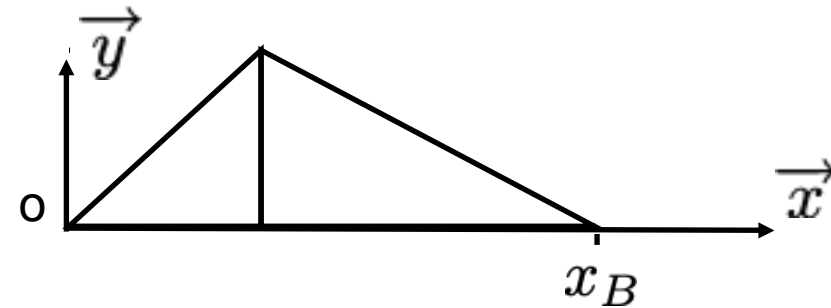
Exemples



$$\begin{cases} R_y^1 &= \frac{-2F}{3} \\ M^1(x) &= \frac{2F}{3}x \end{cases}$$

Moment Fléchissant

$$\begin{cases} R_y^2 &= \frac{F}{3} \\ M^2(x) &= -\frac{F}{3}(x - L) \end{cases}$$





Équations vectorielles d'équilibre en coordonnée curviligne

$$\frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

Équations **vectorielles** en coordonnée cartésienne

$$\frac{d}{dx} \vec{R}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{M}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$

Selon Vous !!



Quelles sont les différences
entre
MdC et MeL





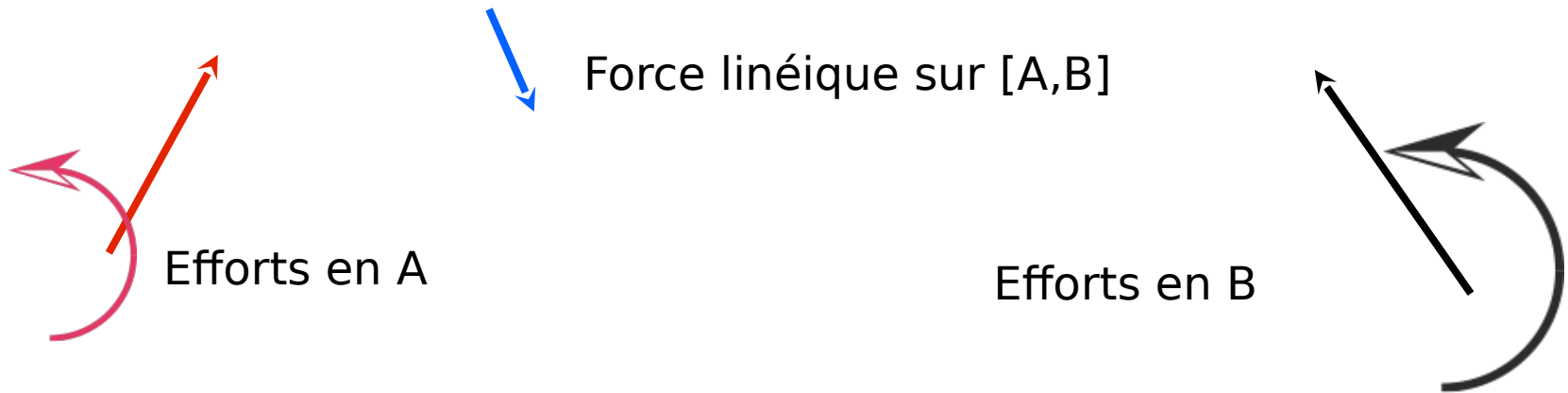
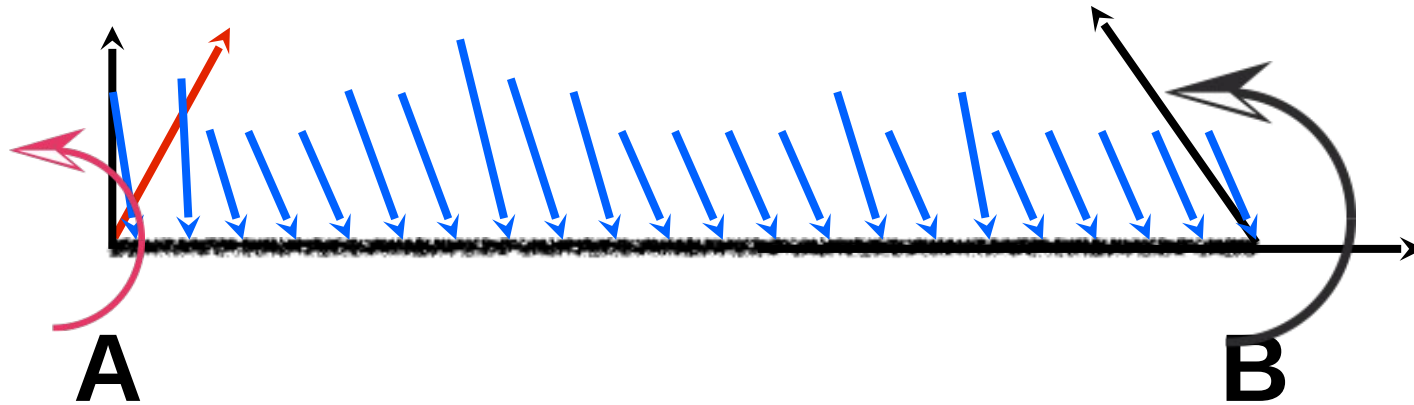
Équations vectorielles d'équilibre en coordonnée cartésienne

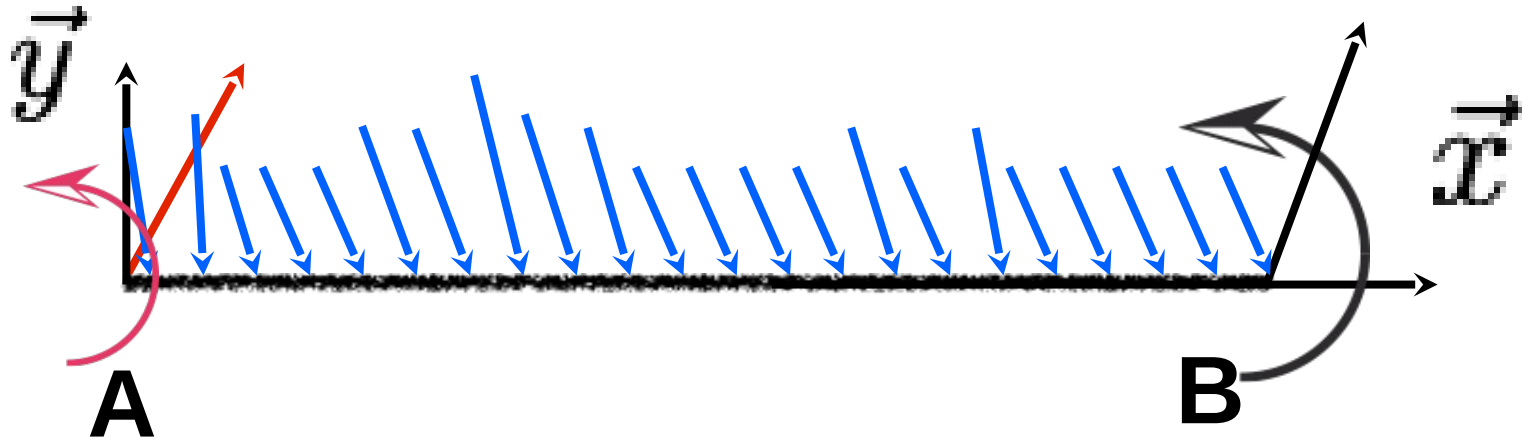
$$\frac{d}{dx} \vec{R}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{M}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$

Équations scalaires d'équilibre en coordonnée cartésienne

=> généralisation dans le cas traction-flexion





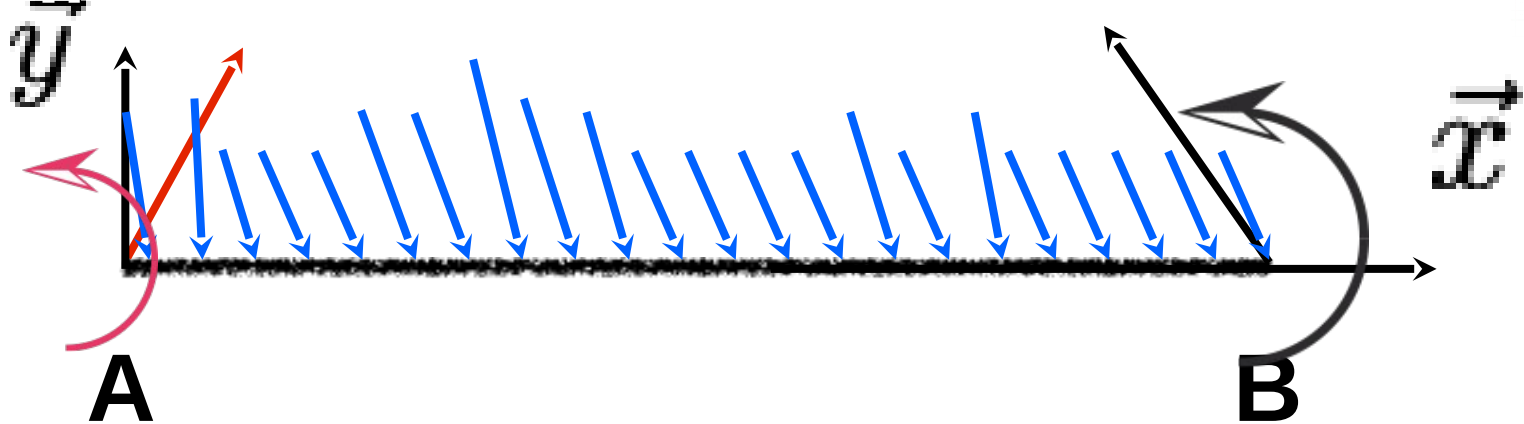
s est remplacé par x

$$\frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{M}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$



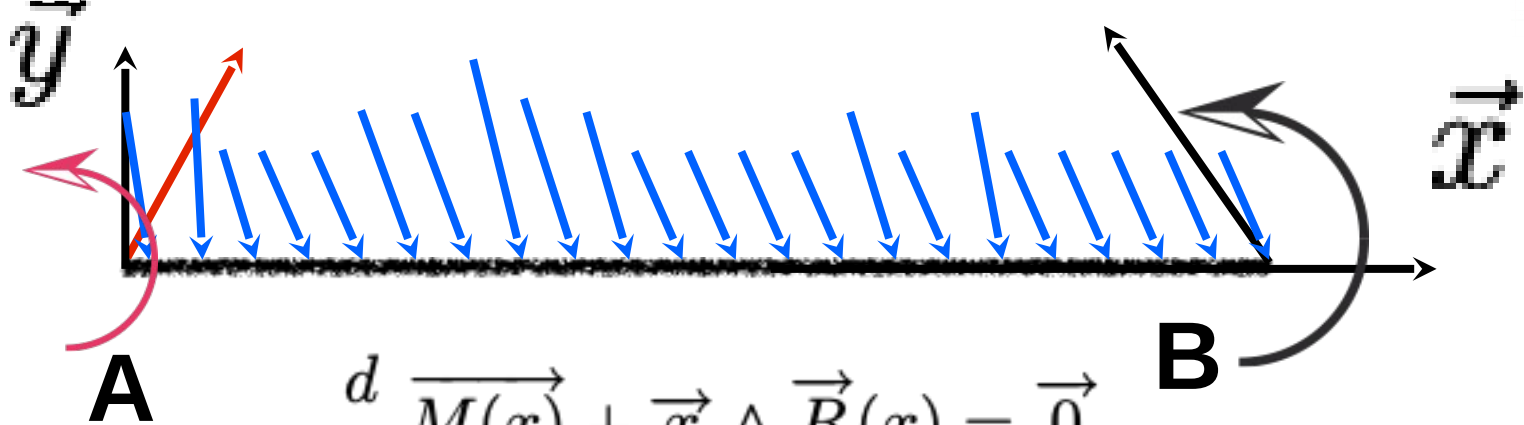
$$\frac{d}{dx} \vec{R}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0}$$

En projetant on obtient

$$\vec{R}(x) = N(x)\vec{x} + T(x)\vec{y}$$

$$\vec{f}(x) = f_x\vec{x} + f_y\vec{y}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N(x) + f_x = 0 \\ \frac{d}{dx} T(x) + f_y = 0 \end{cases}$$

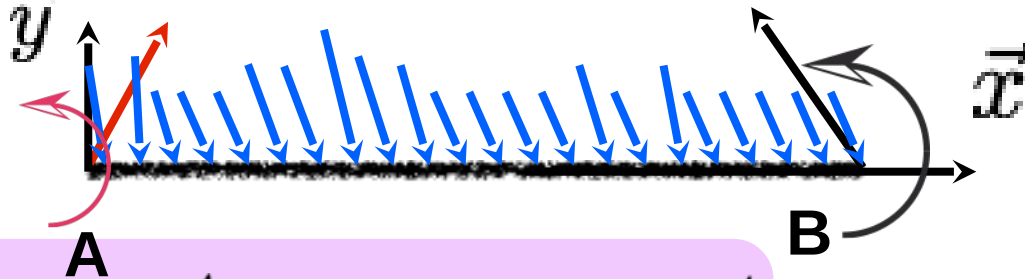


$$\frac{d}{dx} \vec{M}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$

En projetant on obtient $\vec{M}(x) = M(x)\vec{z}$

$$\frac{d}{dx} M(x) + T(x) = 0$$

Poutre droite - Pb Plan - (Flexion - Traction)



$$\begin{aligned} N(0) &= -F_x^A & u(0) &= u_d^A \\ T(0) &= -F_y^A & \text{ou} \quad v(0) &= v_d^A \\ M(0) &= -M_z^A & \omega(0) &= \omega_d^A \end{aligned}$$

Cas des poutres droites
Chargement plan

6 conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x & = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N(L) &= F_x^B & u(L) &= u_d^B \\ T(L) &= F_y^B & \text{ou} \quad v(L) &= v_d^B \\ M(L) &= M_z^B & \omega(L) &= \omega_d^B \end{aligned}$$

Sollicitations simples



Traction

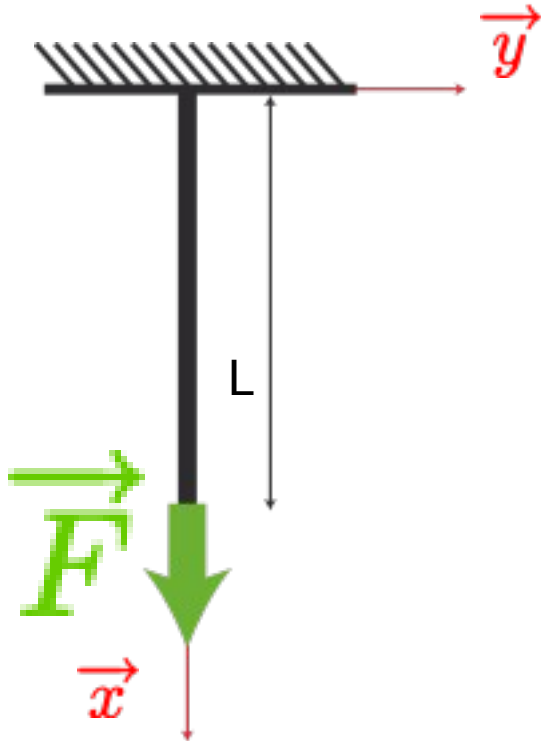


flexion



Torsion

Poutre droite - Pb Plan - (Traction)



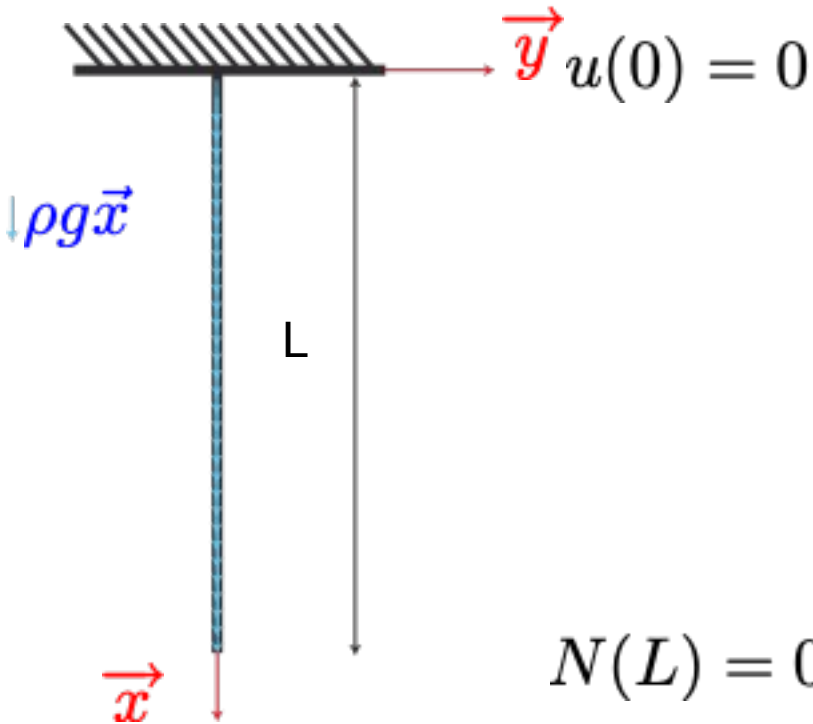
$$u(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx} N(x) = 0$$

$$N(L) = F$$



Poutre droite - Pb Plan - (Traction)



$$\frac{d}{dx}N(x) + \rho g = 0$$

$$N(x) = -\rho g x + Cste$$

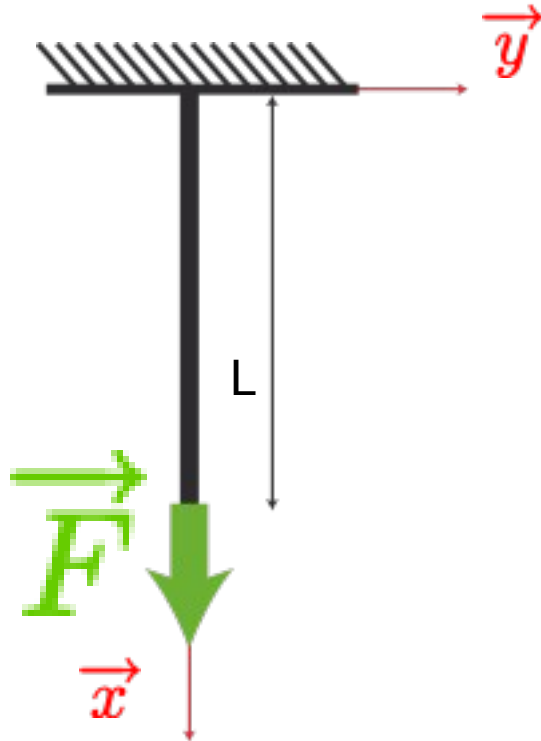
$$N(L) = 0 \Rightarrow Cste = \rho g L$$

$$N(x) = -\rho g(x - L)$$

$$N(0) = F_x \Rightarrow F_x = \rho g L$$



Poutre droite - Pb Plan - (Traction)



$$u(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx} N(x) = 0$$

$$N(L) = F$$

$$N(x) = Cste$$

$$N(x) = F$$

Densité d'effort interne

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}$$



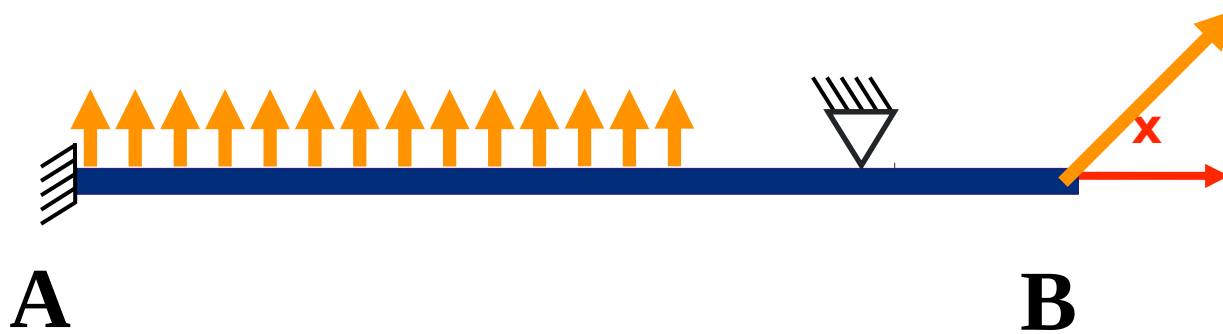


Équations d'équilibre vectorielles en coordonnée curviligne

Équations d'équilibre scalaires en coordonnées cartésiennes

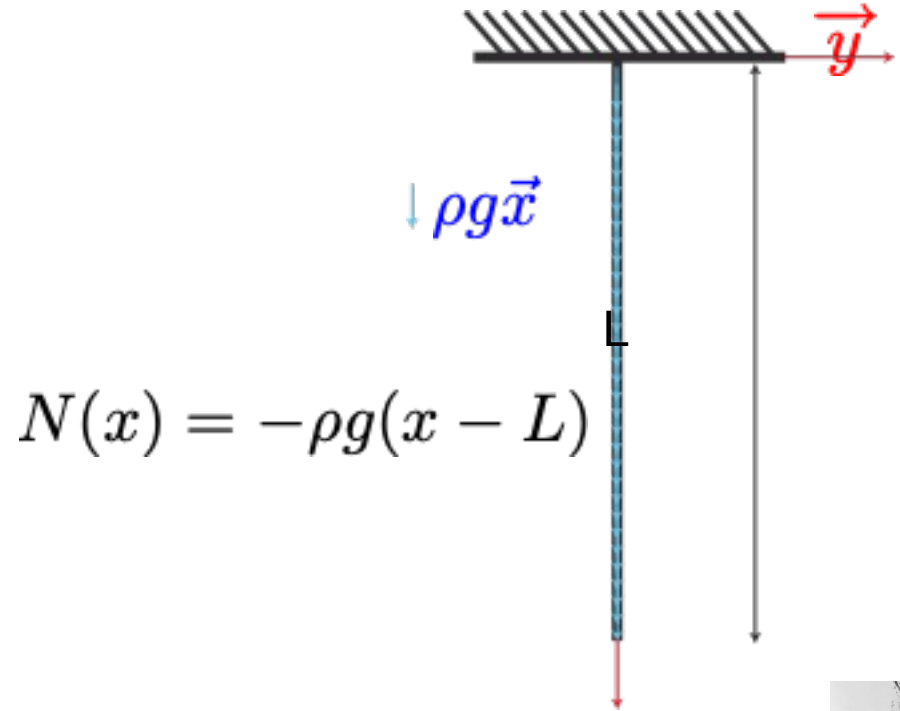
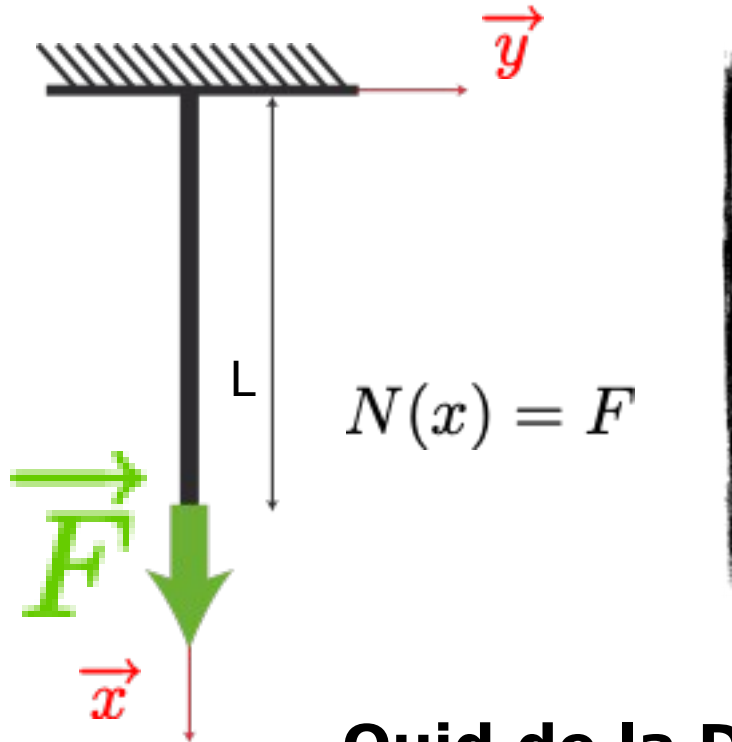
Combien de zones à étudier ?

Conditions aux limites et de raccords en effort du problème :





Poutre droite - Pb Plan - (Traction)



Quid de la Densité d'effort interne



$$N(x) = \int_{s(x)} \text{densitedeseffortsinterns}(y, z) ds$$

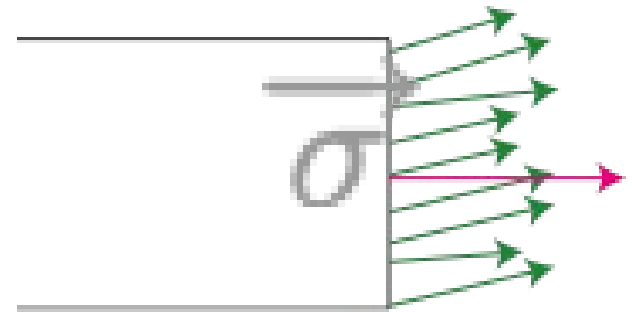
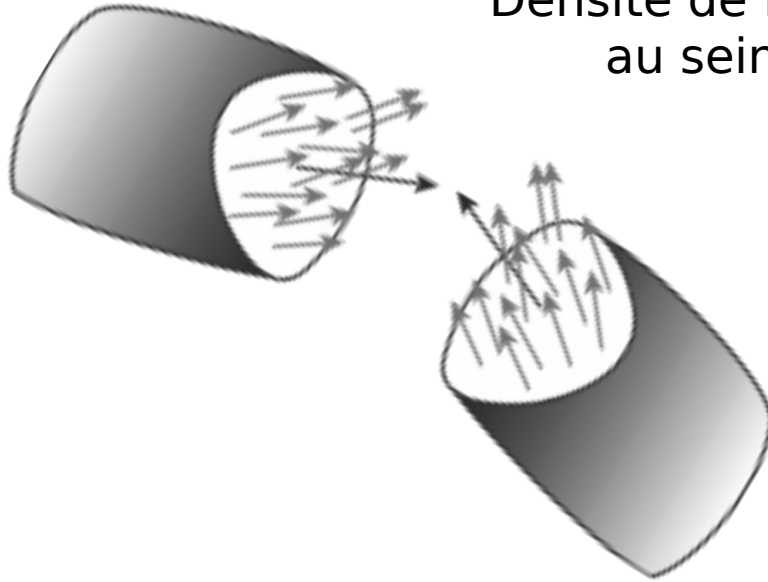
$$N(x) = \int_{s(x)} \sigma ds$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}$$



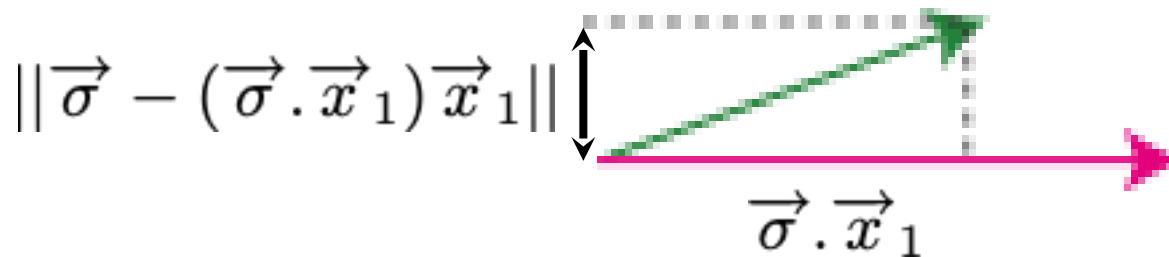
Notion de vecteur contrainte

Densité de force de cohésion
au sein du matériau



Projection

2-D



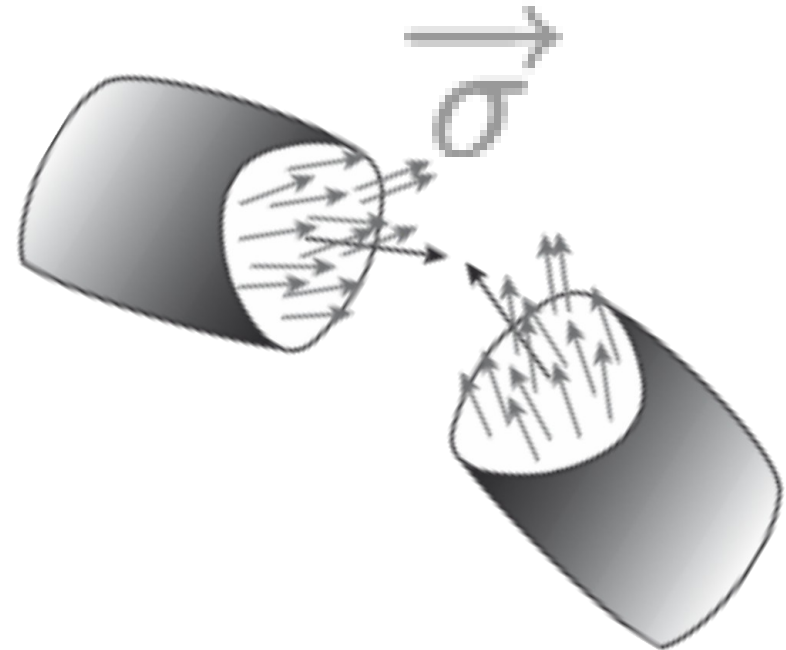


Notion de
Vecteur Contrainte

Densité de force de cohésion
au sein du matériau

$$N(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} \cdot \vec{x}_1 dS$$

$$\vec{T}(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}_1) \vec{x}_1 dS$$



Notion de vecteur contrainte



Notion de
Vecteur Contrainte

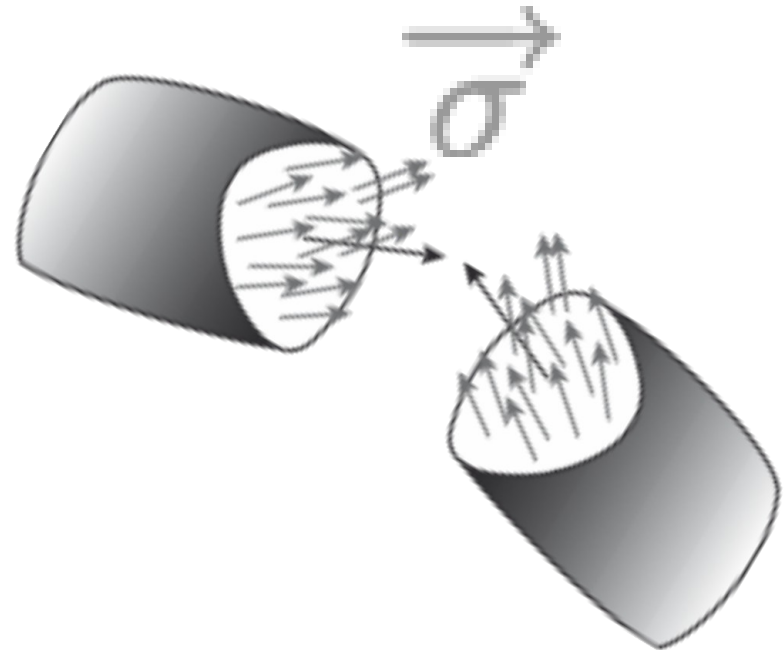


Densité de force de cohésion
au sein du matériau

Efforts Généralisés

$$N(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} \cdot \vec{x}_1 dS$$

$$\vec{T}(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}_1) \vec{x}_1 dS$$





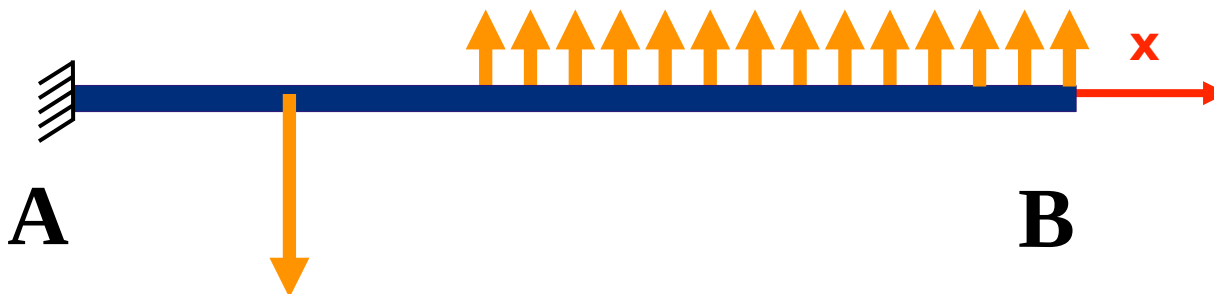
Équations d'équilibre locales de la résultante en coordonnée curviligne sous forme vectorielle

Équations d'équilibre locales du moment en coordonnée curviligne sous forme vectorielle

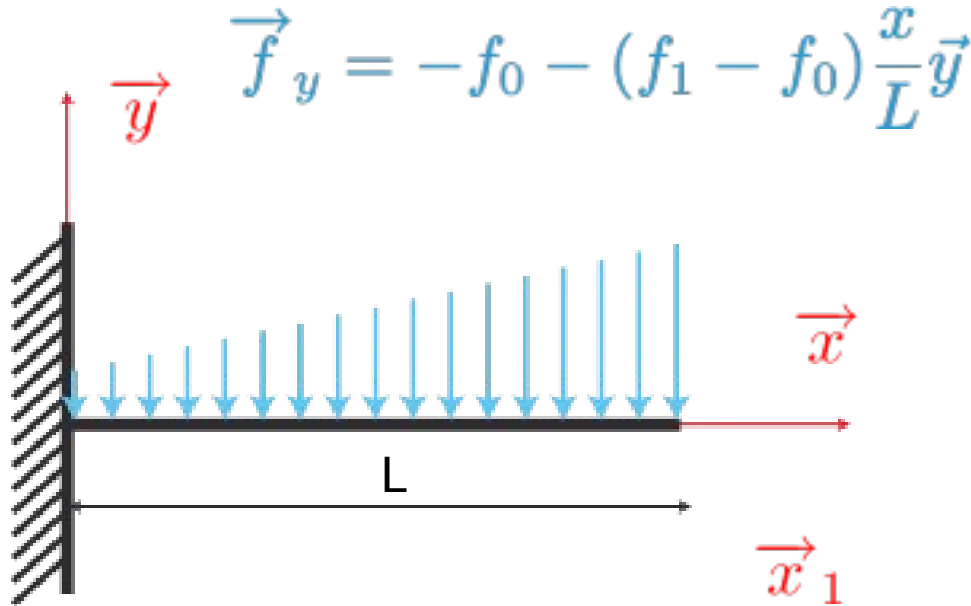
Équations d'équilibre locales scalaire dans le cas d'une poutre rectiligne

Combien de zones à étudier ?

Conditions aux limites et de raccords en effort du ce problème :



Exemple : Flexion Plane



$$\frac{d}{dx}T(x) + f_y = 0$$

$$\frac{d}{dx}M(x) + T(x) = 0$$

$$v(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

$$M(L) = 0$$

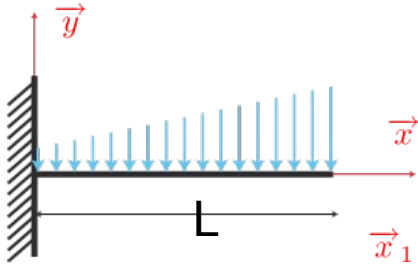
$$T(L) = 0$$

$$T(x) = Cste + f_0x + (f_1 - f_0)\frac{x^2}{2L}$$



Exemple : Flexion Plane

$$\vec{f}_y = -f_0 - (f_1 - f_0) \frac{x}{L} \vec{y}$$



$$\begin{aligned} v(0) &= 0 & M(L) &= 0 \\ \omega(0) &= 0 & T(L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} T(x) + f_y = 0$$

$$\frac{d}{dx} M(x) + T(x) = 0$$

$$T(x) = Cste + f_0 x + (f_1 - f_0) \frac{x^2}{2L}$$

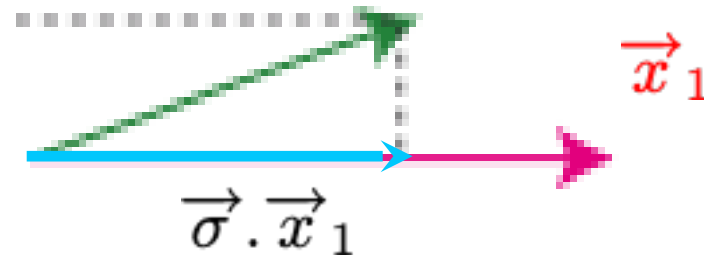
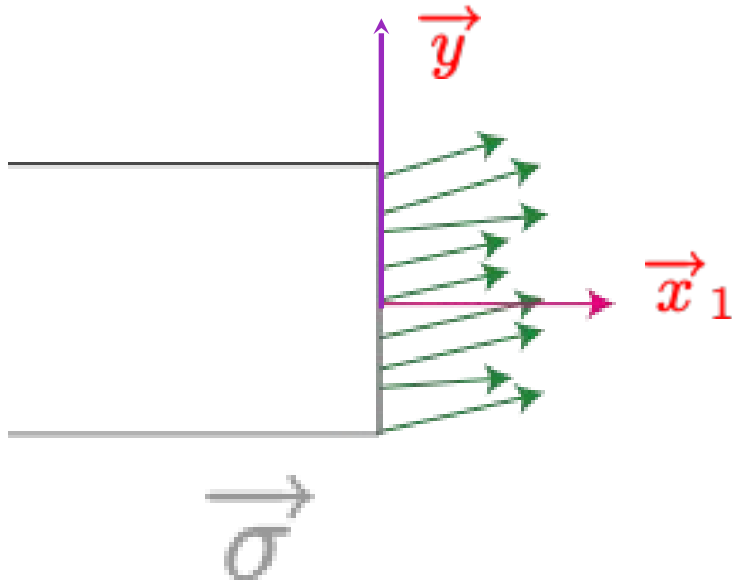
$$T(L) = 0 \Rightarrow Cste = -\frac{L}{2}(f_0 + f_1)$$

$$M(x) = Cste + \frac{L}{2}(f_0 + f_1)x - f_0 \frac{x^2}{2} - (f_1 - f_0) \frac{x^3}{6L}$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow Cste = -\frac{1}{6}L^2(2f_1 + f_0)$$

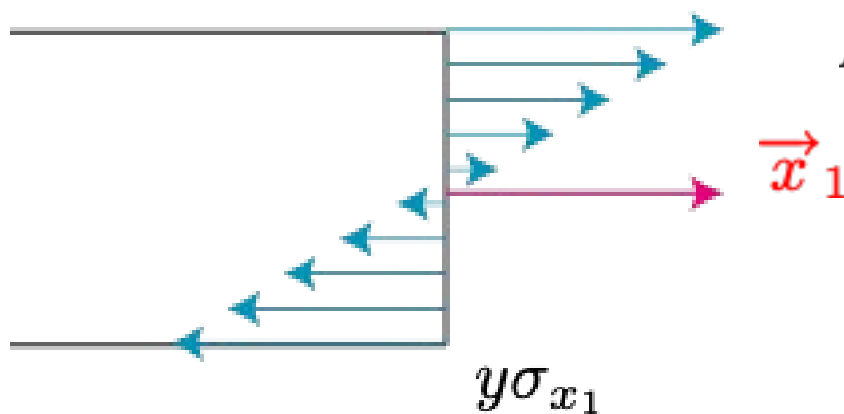


Exemple : Flexion Plane



Projection

2-D



$$M(s) = \int_{Sec} \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{x}_1) \cdot \overrightarrow{x}_1 ds$$

$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds$$



Notion de vecteur contrainte

Notion de
Vecteur Contrainte



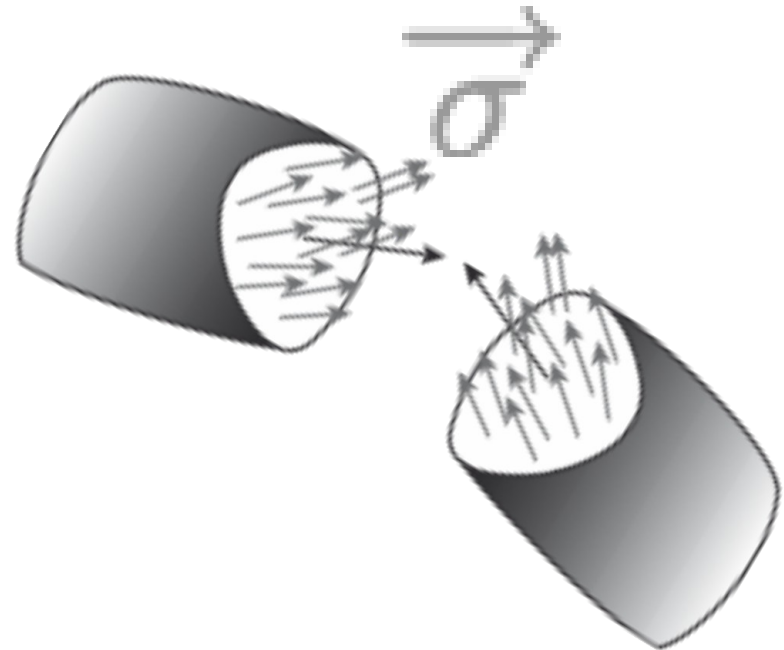
Densité de force de cohésion
au sein du matériau

Efforts Généralisés

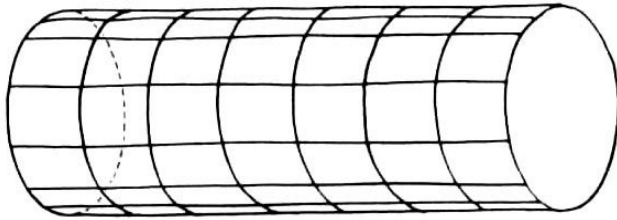
$$N(s) = \int_{Sec} \sigma_{x_1} dS$$

$$\vec{T}(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} - \sigma_{x_1} \vec{x}_1 dS$$

$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds$$

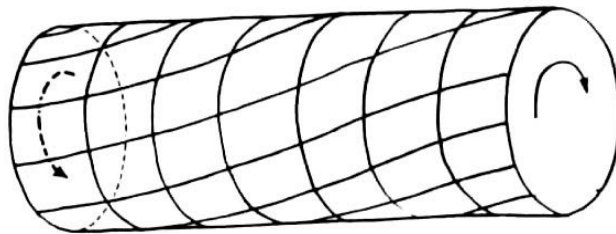


Notions de Déformation

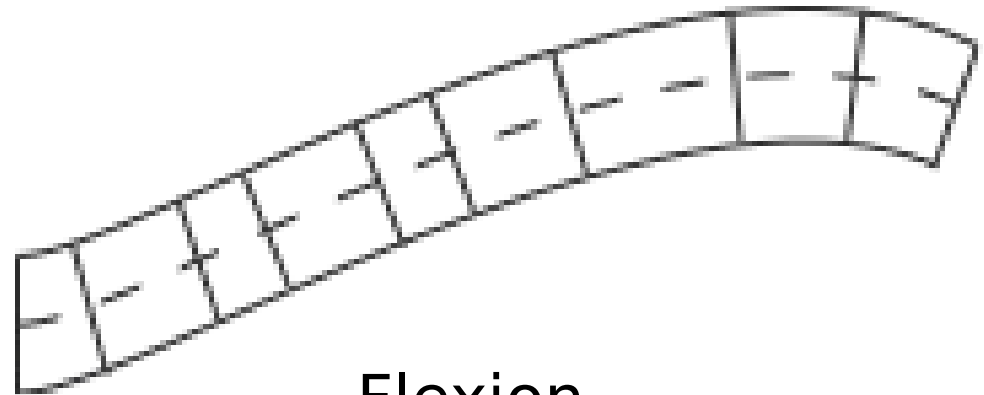


(a)

Torsion



(b)



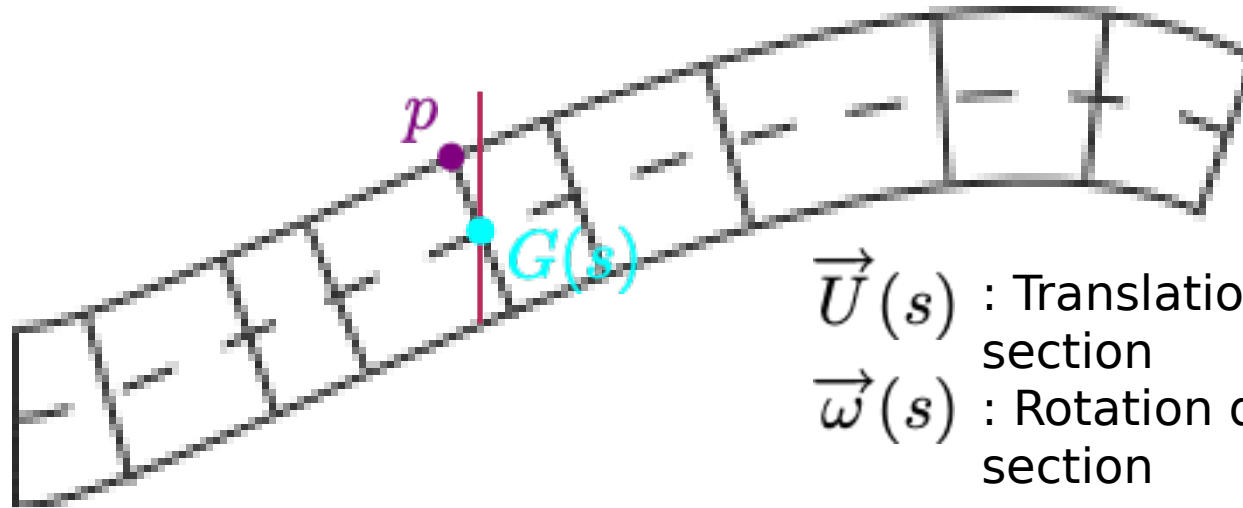
Flexion

Notions de Déformation



HPP : La poutre s'écarte «peu » de la configuration de référence. On assimile la configuration déformée à la configuration de référence.

Navier-Bernouilli : les sections droites restent, après déformation, **planes et indéformables dans leur propre plan**.



$\vec{U}(s)$: Translation de la section
 $\vec{\omega}(s)$: Rotation de la section

$$\vec{U}(p) = \vec{U}(s) + \overrightarrow{PG(s)} \wedge \vec{\omega}(s)$$

Notions de Déformation



$$\vec{U}(p) = \vec{U}(s) + \overrightarrow{PG(s)} \wedge \vec{\omega}(s)$$

Navier-Bernouilli :

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

$u(x)$ Déplacement longitudinal de G

$v(x)$ Déplacement vertical de G

y_g Ordonnée de G

Déformation - RDM - 2-D plan

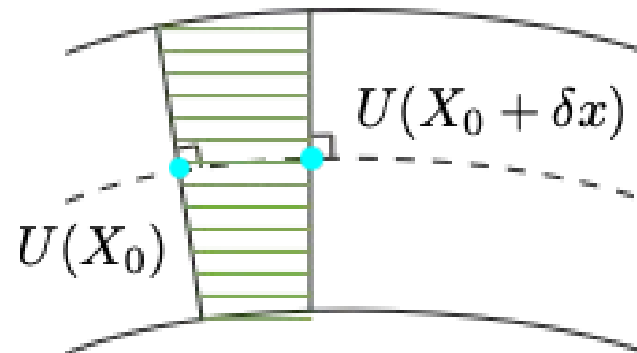
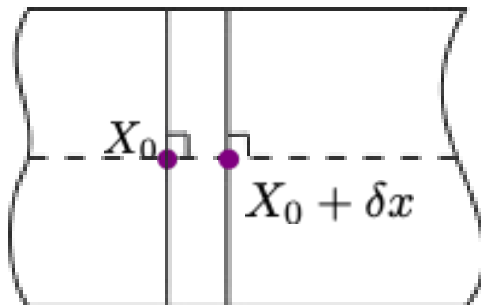


Navier-Bernoulli :

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

Après déformation les SECTION restent planes et indéformables dans leur propre plan.

Seule déformation possible = selon \vec{x}



Déformation - RDM - 2-D plan



Navier-Bernoulli :

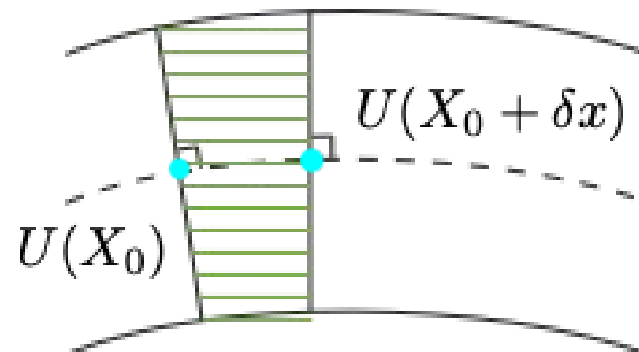
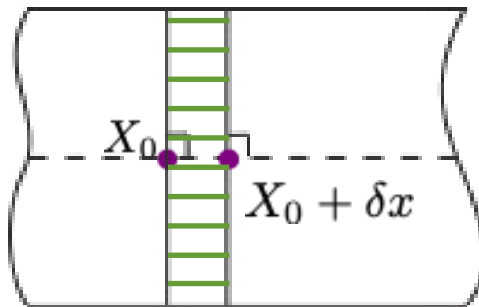
$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

$$U_1(X_0 + \delta x, y) = U_1(X_0, y) + \delta x \frac{\partial}{\partial x} U_1(X_0, y) + o(\delta x)$$

Dans le cas d'un
ressort 1-D

$$\frac{\partial}{\partial x} U_1(X_0, y) = \frac{U_1(X_0 + \delta x, y) - U_1(X_0, y)}{\delta x}$$

$$\frac{\Delta L}{L_0}$$



Déformation - RDM - 2-D plan



Navier-Bernoulli :

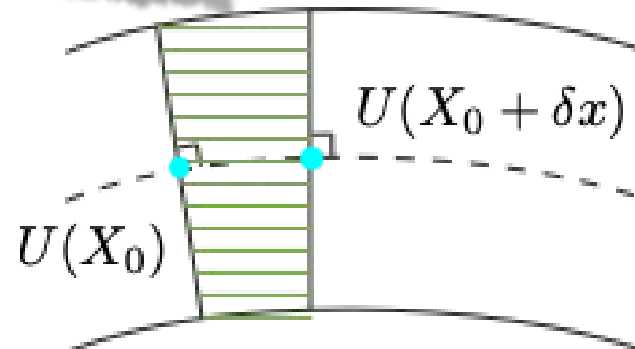
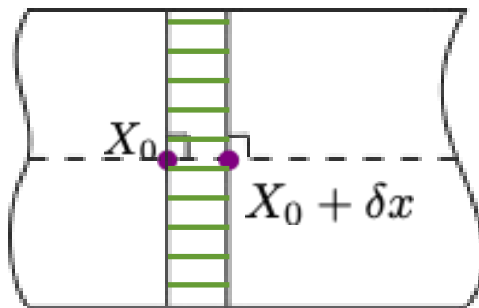
$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

d'où la déformation longitudinale en HPP

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_g)v''(x) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un
ressort 1-D

$$\frac{\Delta L}{L_0}$$



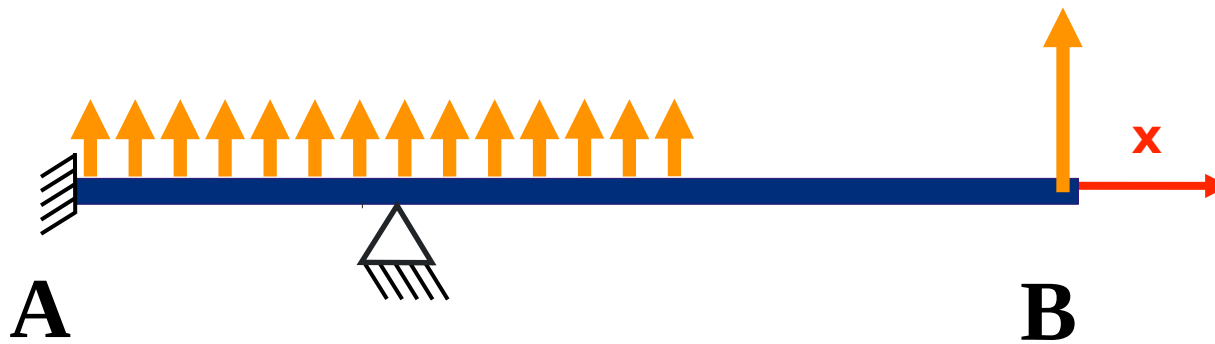


Définition des efforts généralisés

Équations d'équilibre scalaire en coordonnée cartésienne

Combien de zones à étudier ?

Conditions aux limites et de raccords en effort du problème :



Récapitulatif



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire
homogène

Equations scalaire d'équilibre

Efforts généralisés

Déplacements

Déformations



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equations scalaire d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x & = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

Déplacements

Navier-Bernouilli :

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

Efforts généralisés

$$N(s) = \int_{Sec} \sigma_{x_1} dS$$

$$\vec{T}(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} - \sigma_{x_1} \vec{x}_1 dS$$

$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds$$

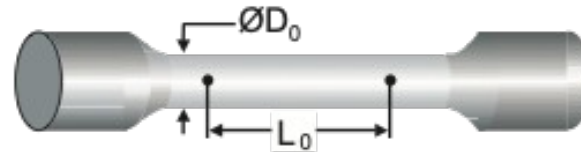
Déformations

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_g)v''(x) \end{aligned}$$

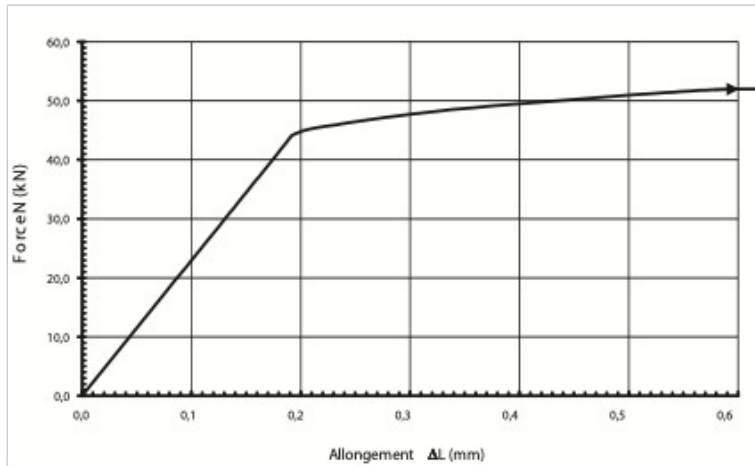
Relation Déformation- Contrainte



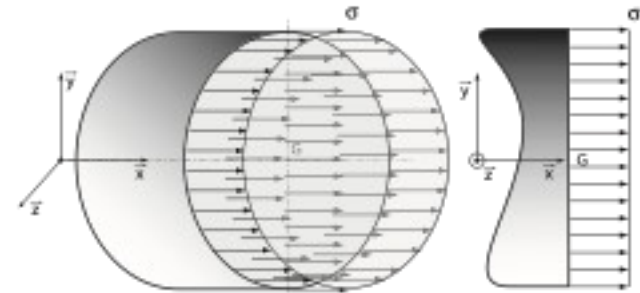
Traction uniaxial :



Éprouvette de traction



Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction



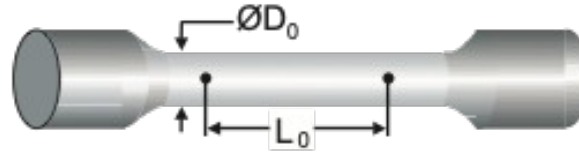
$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \epsilon = \frac{\delta L}{L_0}$$

Figures : P.A Boucard

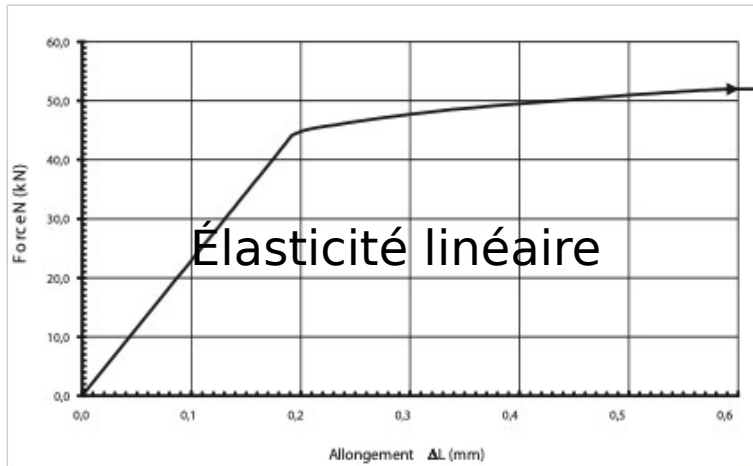
Relation Déformation- Contrainte



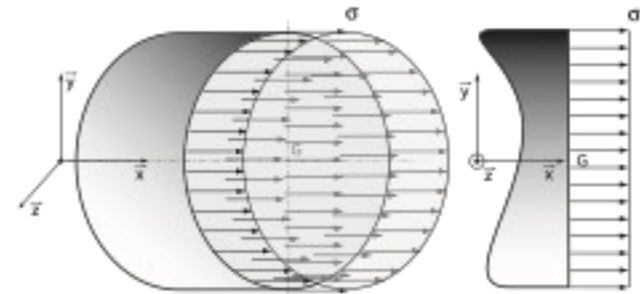
Traction uniaxial :



Éprouvette de traction



Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction



Figures : P.A Boucard

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\epsilon$$

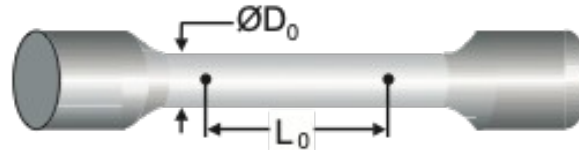
E = Module d' Young



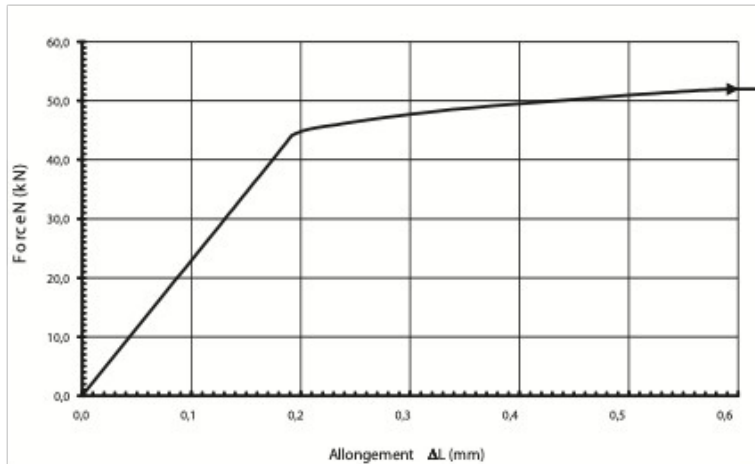
Relation Déformation- Contrainte



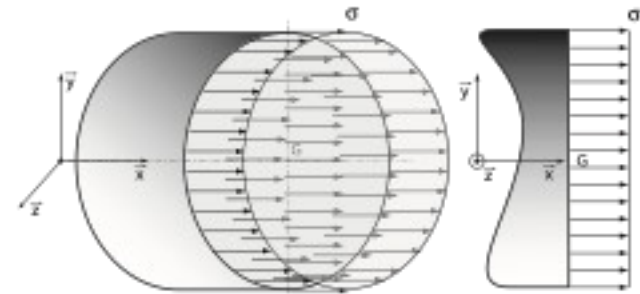
Traction uniaxial :



Éprouvette de traction



Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction



Figures : P.A Boucard

$$E = \frac{\sigma(x)}{\varepsilon(x)}$$


E = Module d' Young

Récapitulatif - TRACTION Simple -



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire
homogène

Equation d'équilibre



Loi de comportement locale



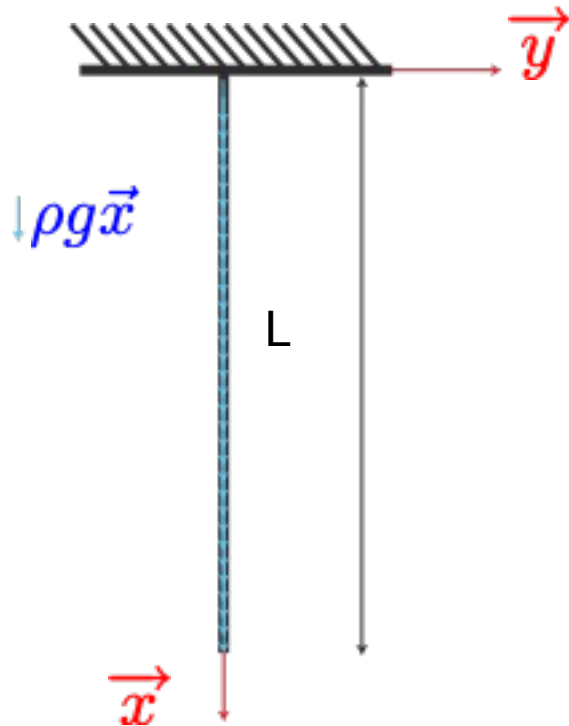
Déplacements



Loi de comportement macro

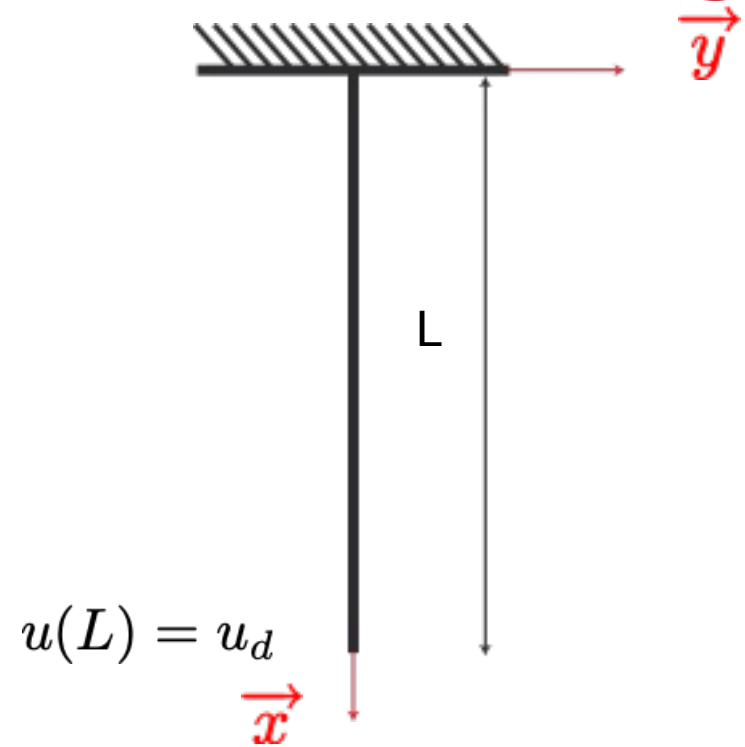


Selon Vous !!



Déterminer E tel que

$$u(L) \leq u_{max}$$



Déterminer E tel que

$$\sigma \leq \sigma_{max}$$



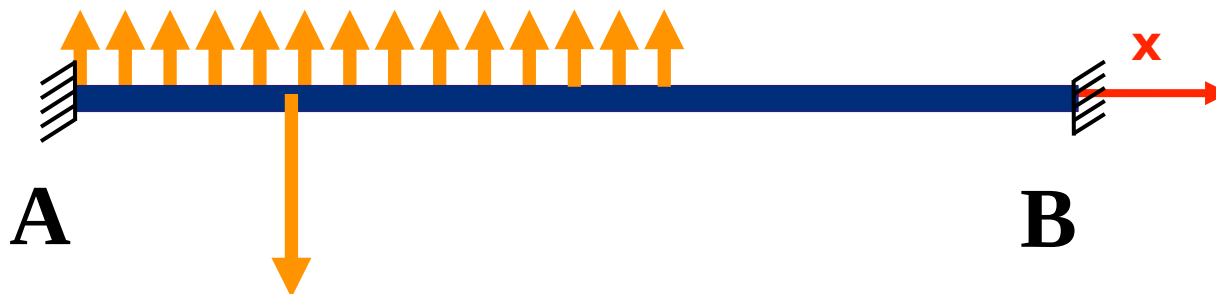
Équations d'équilibre local de la résultante en coordonnée curviligne sous forme vectorielle

Équations d'équilibre local du moment en coordonnée curviligne sous forme vectorielle

Équations d'équilibre local scalaires dans le cas d'une poutre rectiligne

Combien de zones à étudier ?

Conditions aux limites et de raccord en efforts de ce problème :



Récapitulatif - TRACTION Simple -



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire
homogène

Equation d'équilibre



Loi de comportement locale



Déplacements



Loi de comportement macro

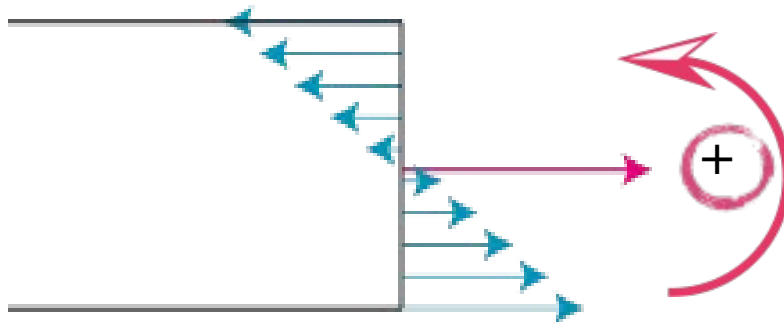


Flexion SIMPLE - Mat homogène



$$\sigma_{x_1} = Cste$$

$$N(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} \cdot \vec{x}_1 dS$$



$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds$$

$$-y \sigma_{x_1}$$

Flexion SIMPLE - Mat homogène



Navier-Bernouilli :

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

d'où la déformation longitudinale en HPP

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_g)v''(x) \end{aligned}$$

$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds = EI v''(x) \quad \sigma_{x_1} = E \epsilon_{11}$$

$$M(s) = EI v''(x)$$

Flexion SIMPLE - Mat homogène



http://www.xr6805.fr/school/sti_web/rdm/quadra/quadrat.htm

I_{Gz} (mm ⁴)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4-d^4)}{64}$
I_0 (mm ⁴)	$\frac{bh^3+hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4-d^4)}{32}$

Moment polaire

$$I_{G_z} = \int_{Sec} y^2 ds$$

$$I_O = \int_{Sec} z^2 + y^2 ds$$



Récapitulatif - FLEXION Simple -

cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

Déplacement

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = -y v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

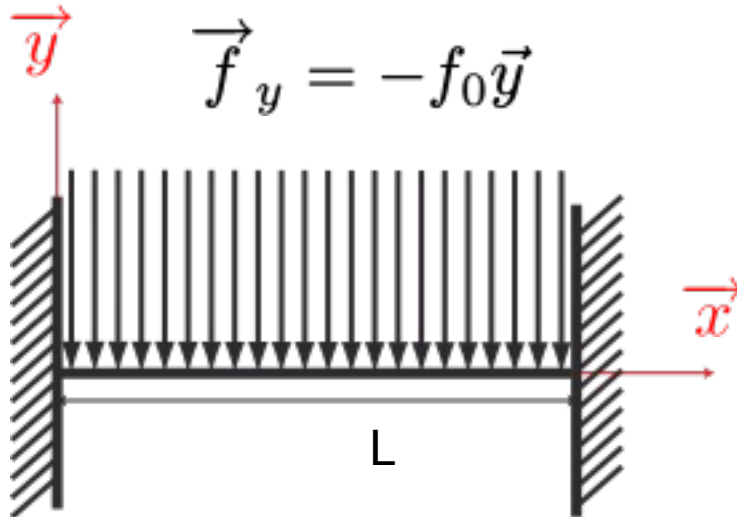
Loi de comportement locale

$$\sigma = E \epsilon$$

$$M(x) = EI v''(x)$$

$$\sigma(x) = -\frac{M(x)}{\frac{I}{y}} = -y \frac{M(x)}{I}$$

Exemple



Équation d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} T(x) - f_0 = 0 \\ \frac{d}{dx} M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

Loi de comportement

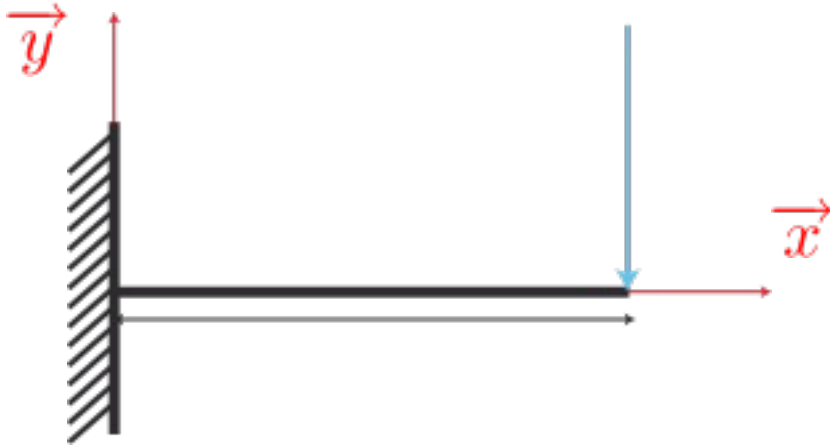
$$M(x) = EI v''(x)$$

$$\begin{array}{ll} v(0) = 0 & v(L) = 0 \\ v'(0) = 0 & v'(L) = 0 \end{array}$$

Conditions aux limites

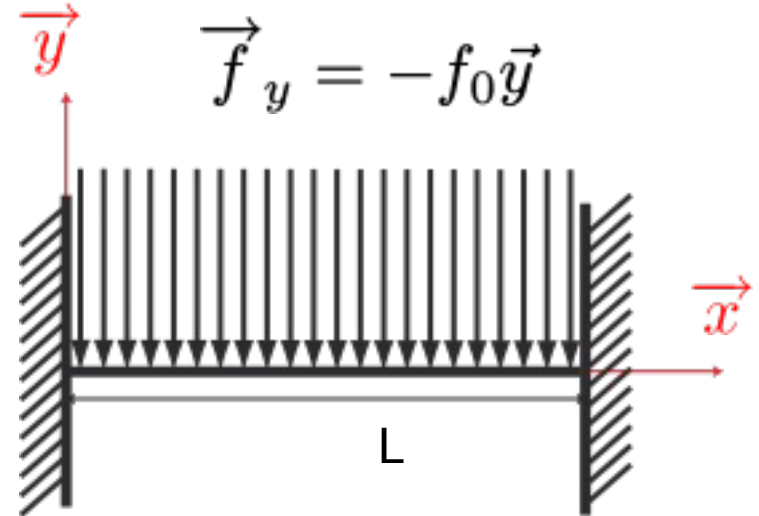
Y'a plus qu'à résoudre

Selons VOus !!



Déterminer I telque

$$v(L) \leq V_{max}$$



Déterminer I telque

$$\sigma \leq \sigma_{max}$$

Récapitulatif - FLEXION Simple -



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire
homogène

Equations scalaire d'équilibre



Loi de comportement locale



Déplacements



Loi de comportement macro





cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x & = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

Conditions aux limites :

Efforts ou déplacements

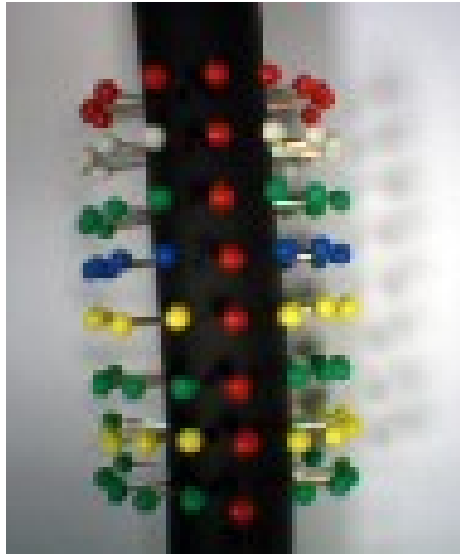
$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ v(x) \end{cases}$$

$$N(x) = ESu'(x) = ES e(x)$$

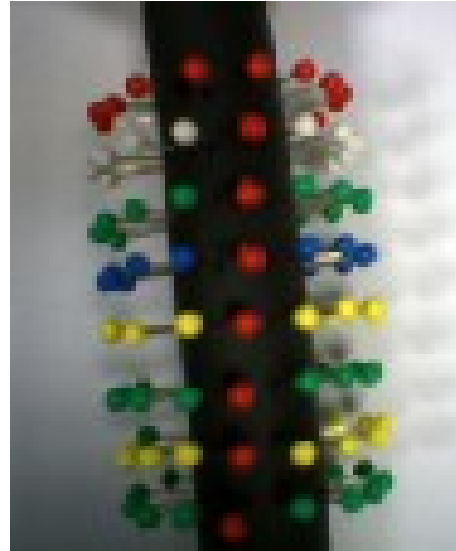
$$M(x) = -EIv''(x) = EI k(x)$$



Cas de la Torsion



Avant



Après

<http://meca.iutcachan.free.fr>

http://meca.iutcachan.free.fr/dds_cours/dds_cours.html

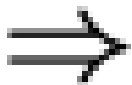
Cas de la Torsion cas rectiligne

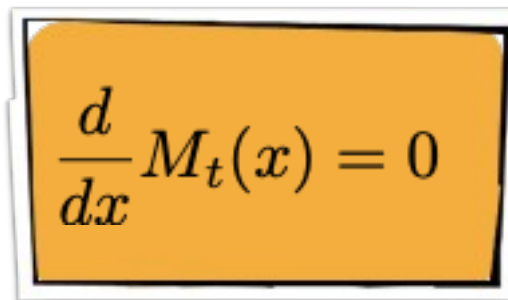


$$\vec{R}(x) = N(x)\vec{x} + T_y(x)\vec{y} + T_z(x)\vec{z}$$

$$\vec{M}(x) = M_t(x)\vec{x} + \vec{M}_{z_{fl}}\vec{z} + \vec{M}_{y_{fl}}\vec{y}$$

$$\frac{d}{dx}\vec{M}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$





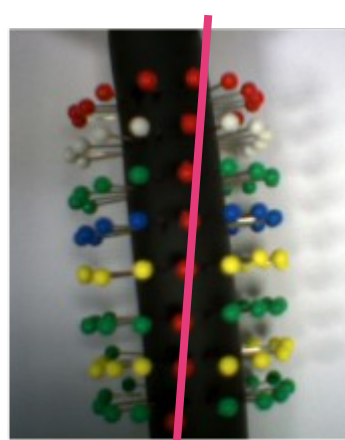
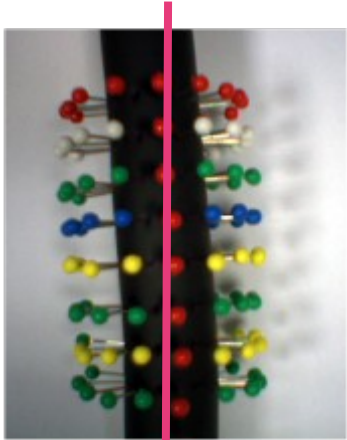
$$\frac{d}{dx}M_t(x) = 0$$

Dans le cas où il n'y a pas de couple réparti le long de la poutre



Torsion:

Figures : P.A Boucard

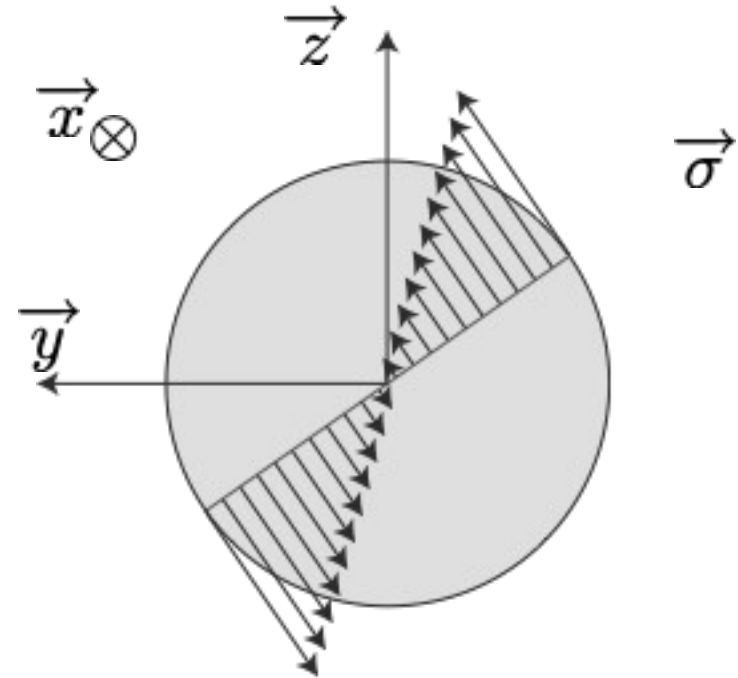
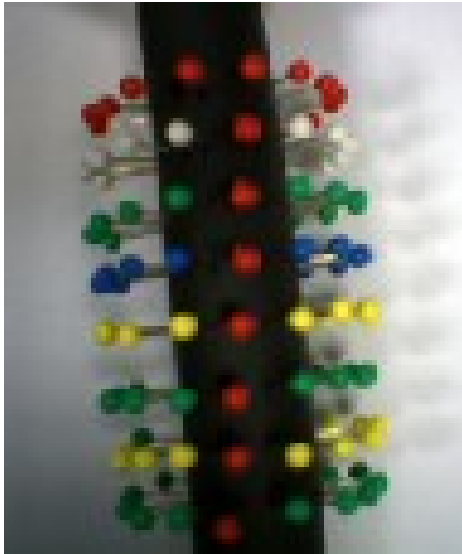


$$\frac{d}{dx} M_t(x) = 0$$

$\theta(x)$ Angle de rotation unitaire $\theta(x) = \frac{d\phi}{dx}(x)$

$\phi(x)$ Rotation d'une section

Relation Déformation- Contrainte



Répartition des contraintes
dans une section droite



Équation d'équilibre

$$\frac{d}{dx} M_t(x) = 0$$

Condition aux limites

$$M_t(L) = C_{imp}$$

$$M_t(0) = C'_{imp}$$

$$\phi(0) = \phi_{imp}$$

$$\phi(L) = \phi'_{imp}$$

Loi de comportement

$$\theta(x) = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t(x)}{GI_{Gx}}$$

$$M_t(x) = GI_{Gx}\theta(x)$$

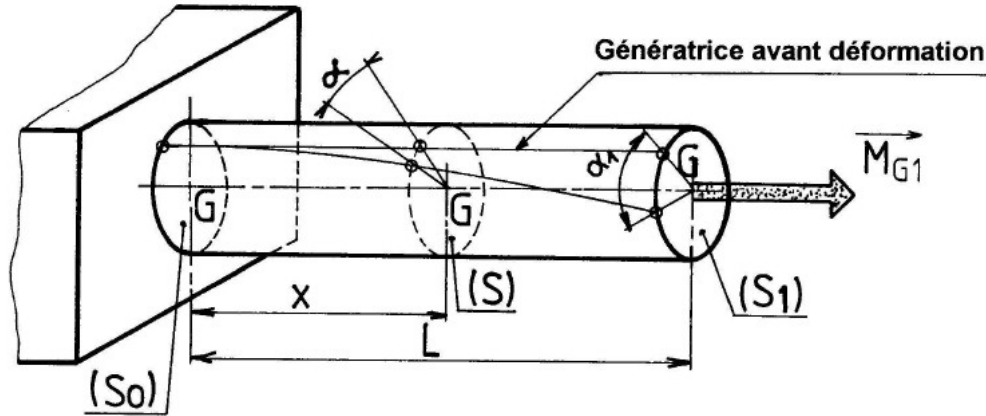
G : Module de cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Torsion pure - Matériau homogène



L.P. AULNOYE

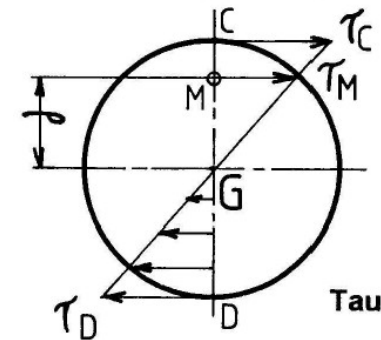


Angle de torsion
des sections

$$\alpha = \theta x$$

Angle de torsion unitaire $\theta = \frac{\alpha_1}{L} = \frac{\alpha}{x}$

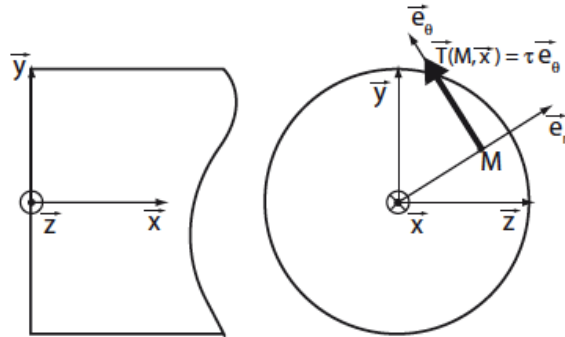
$$\tau(r) = G \theta r$$



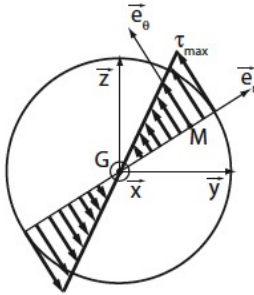


Torsion pure - Matériau homogène

Cours de Dimensionnement des Structures
Résistance des Matériaux
Pierre-Alain Boucard
<http://meca.iutcachan.free.fr>



Répartition de la contrainte dans la section



$$\vec{T} = \tau \vec{e}_\theta$$

Cisaillement = $f(\text{angle unitaire de rotation})$

$$\gamma = r\theta$$

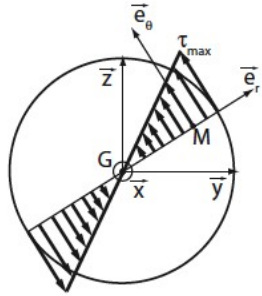
Loi de comportement Locale

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\tau(r) = G\theta r$$

Torsion pure - Matériau homogène



$$\iint_S \vec{T} ds = \iint_S \tau \vec{e}_\theta ds = \vec{0}$$

Cours de Dimensionnement des Structures

Résistance des Matériaux
Pierre-Alain Boucard

<http://meca.iutcachan.free.fr>

Loi de comportement

$$\vec{M}_t = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{T} ds = \iint_S r \vec{e}_r \wedge G \theta r \vec{e}_\theta ds$$

$$\tau = G \gamma$$

$$\vec{M}_t = G \theta \iint_S r^2 ds \vec{x}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$I_0 = \iint_S r^2 ds$$

$$\vec{M}_t = G \theta I_0 \vec{x}$$

Moment de Torsion ou Moment Polaire



cas plan - Poutre rectiligne - HPP - Élasticité linéaire homogène

Équation d'équilibre

$$\frac{d}{dx} M_t(x) = 0$$

Loi de comportement locale

$$\tau = G\gamma$$

Contrainte

$$\tau(x) = \frac{M_t(x)}{\frac{I_O}{r}} = r \frac{M_t(x)}{I_O}$$

$$\vec{M}_t = G \theta I_0 \vec{x}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Selons VOus !!



La broche d'une fraiseuse transmet un couple maximal de 80 N.m.

On l'assimile à un tube en acier pour lequel $D = 2d$ et $G = 8.104$ Mpa.


La déformation est limitée à 0,25 degré par mètre.

- Calculez le diamètre, extérieur D et intérieur d , de cette broche.
- Calculez la contrainte maximale dans le tube soumis à un moment de torsion de 80 N.m.



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire
homogène

Equation d'équilibre



Loi de comportement locale



Déplacements



Loi de comportement macro





cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Élasticité

Équation d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

Déplacements

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = -y v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

Loi de comportement locale

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

$$\sigma(x) = -\frac{M(x)}{\frac{I}{y}} = -y \frac{M(x)}{I}$$

Loi de comportement macro

$$M(x) = EIv''(x)$$



cas plan - Poutre rectiligne - HPP - Élasticité linéaire homogène

Équation d'équilibre

$$\frac{d}{dx} M_t(x) = 0$$

Loi de comportement locale

$$\tau = G\gamma$$

Contrainte

$$\tau(x) = \frac{M_t(x)}{\frac{I_O}{r}} = r \frac{M_t(x)}{I_O}$$

$$\vec{M}_t = G \theta I_0 \vec{x}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Principe de superposition





Que faire dans ce cas là !!

Méthodes Énergétiques
Christian La Borderie
Institut Supérieur Aquitain du
Bâtiment et des Travaux Publics

<http://web.univ-pau.fr/~clb/>

MS1-POUTRES: Les méthodes
énergétiques: des méthodes «
éclair» pour les poutres à
appuis multiples



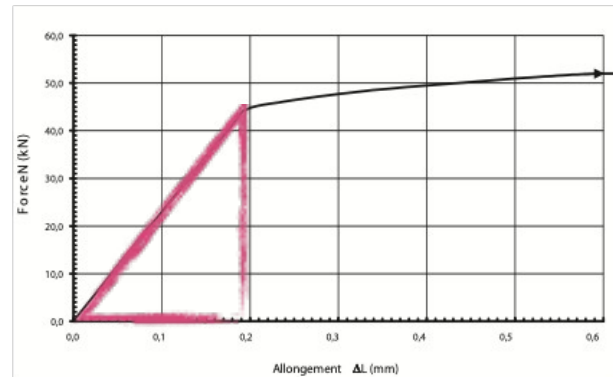
Cas d'un ressort 1-D

$$F = k\Delta x$$

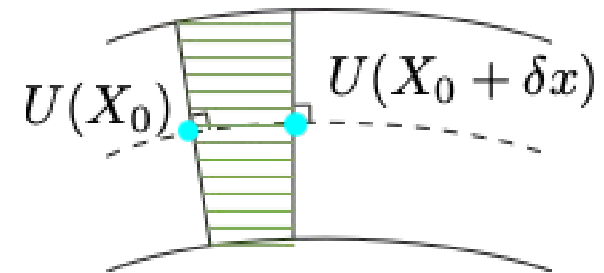
$$\begin{aligned} W_{ressort} &= \frac{1}{2} F \Delta x \\ &= \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$\sigma = E \epsilon$$



Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction

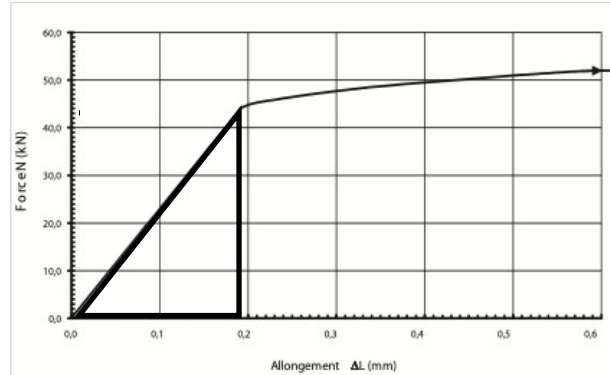




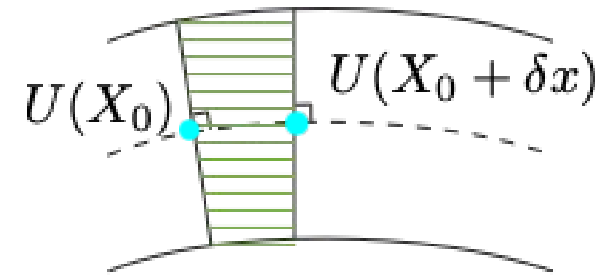
Énergie de déformation

Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$\sigma = E\epsilon$$



Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction



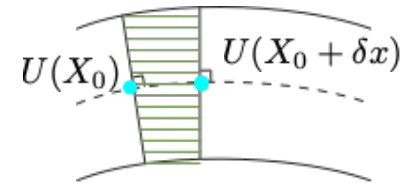
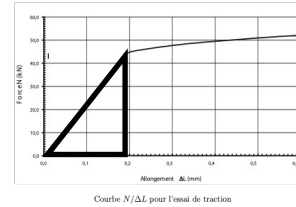
$$w_{Poutre}(s) = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(X) \epsilon(X) d\omega$$



Énergie de déformation

Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)



$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(X) \epsilon(X) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{\text{sect}} \sigma(x) \epsilon(x) dydz \right) dx$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_G) v''(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{\text{sect}} \sigma(x) (u'(x) - (y - y_G) v''(x)) dydz \right) dx$$



Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(u'(x) \left(\int_{sect} \sigma(x) dydz \right) - v''(x) \left(\int_{sect} (y - y_G) \sigma(x) dydz \right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(u'(x) \left(\int_{sect} \sigma(x) dydz \right) + v''(x) \left(- \int_{sect} (y - y_G) \sigma(x) dydz \right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L (u'(x)N(x) + v''(x)M(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (N(x)e(x) + M(x)k(x)) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e(x) = u'(x) \\ k(x) = v''(x) \end{cases}$$

$$N(x) = \int \sigma(x) dS$$

$$M(x) = - \int_{Sec} y \sigma(x) dS$$



Loi de comportement

$$k(x) = -v''(x) \quad e(x) = u'(x) \quad \sigma = E\epsilon \quad \epsilon = u'(x) - (y - y_g)v''(x)$$

$$N(x) = \int_{Sec} \sigma(x) dS$$

$$= \int_{Sec} E\epsilon(x) dS$$

$$= \int_{Sec} E(u'(x) - (y - y_g)v''(x)) dS$$

$$= ES(x)u'(x) = ES(x)e(x)$$

$$N(x) = ES(x)u'(x) = ES(x)e(x)$$



Loi de comportement

$$k(x) = v''(x) \quad e(x) = u'(x) \quad \sigma = E\epsilon \quad \epsilon = u'(x) - (y - y_g)v''(x)$$

$$M(x) = - \int_{Sec} y\sigma(x)dS$$

$$M(x) = EI(x)v''(x) = EI(x)k(x)$$

$$= - \int_{Sec} yE\epsilon(x)dS$$

$$= - \int_{Sec} Ey(u'(x) - (y - y_g)v''(x))dS$$

$$= EI(x)v''(x) = EI(x)k(x)$$



Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_0^L (N(x)e(x) + M(x)k(x)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L (ESe(x)^2 + EIv''(x)^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{M(x)^2}{EI} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k(x) &= -v''(x) \\
 e(x) &= u'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(x) &= ESu'(x) = ESe(x) \\
 M(x) &= -EIv''(x) = EI k(x)
 \end{aligned}$$



Cas du ressort 1-D

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ressort}} &= \frac{1}{2} F \Delta x \\
 &= \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2
 \end{aligned}$$

Cas de la poutre rectiligne

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_0^L (N(x)e(x) + M(x)k(x) + M_t(x)\theta(x)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L (ES(x)e(x)^2 + EIv''(x)^2 + GI_{Gx}\theta(x)^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{M(x)^2}{EI} + \frac{M_t(x)^2}{GI_{Gx}} \right) dx
 \end{aligned}$$



Énergie potentielle : on la définit pour n'importe quel champ de type Navier Bernoulli, respectant les conditions aux limites cinématiques (portant sur les déplacements et les rotations)

$$U \in CA \quad \Leftrightarrow \quad U(x, y) = u_d \quad \forall x \in D_u$$

$U \in CA \quad \Leftrightarrow \quad U$ vérifie les conditions aux limites imposées en déplacements

$$\Pi_d(u) = W(u) - W_d(u)$$

Énergie élastique

Travail des efforts données



$$W_d(u) = \int_0^L \vec{f}(x) \cdot \vec{U}(x) dx + \vec{F}(x_0) \cdot \vec{U}(x_0)$$

Force linéique

Force ponctuelle





Énergie Complémentaire : on la définit pour n'importe quel champ de contrainte, respectant les équations d'équilibre et les conditions aux limites sthéniques

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x & = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

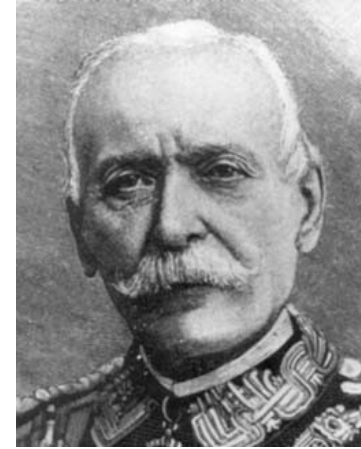
$$\Pi_c(N, T, M) = W(N, T, M) - W_{dd}(N, T, M)$$

Énergie élastique

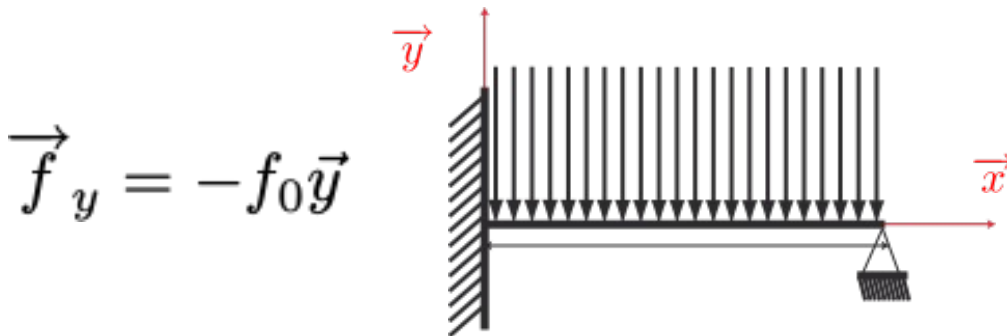
Travail des
déplacements donnés

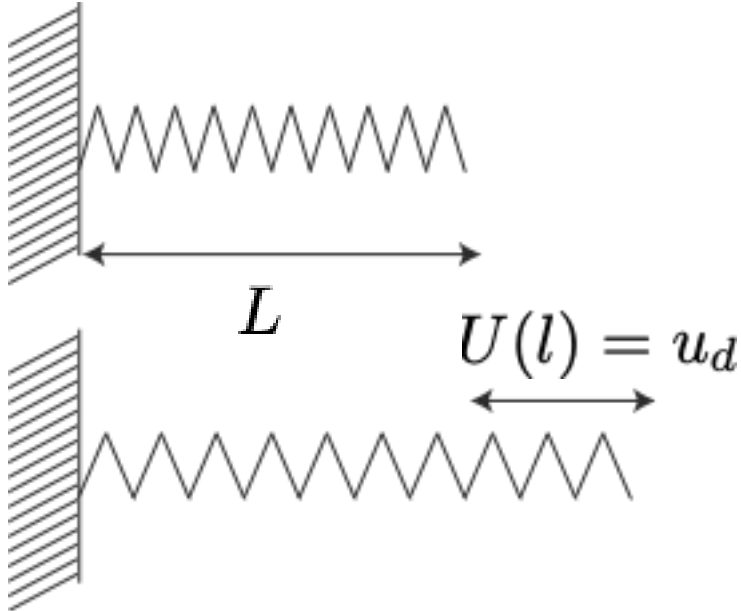


Si le système est hyperstatique de degré p , on peut exprimer les efforts intérieurs en fonction de p inconnues. Ces inconnues hyperstatiques prennent alors la valeur qui minimise l'énergie complémentaire (= énergie élastique car les liaisons sont parfaites).



Luigi Federico Menabrea





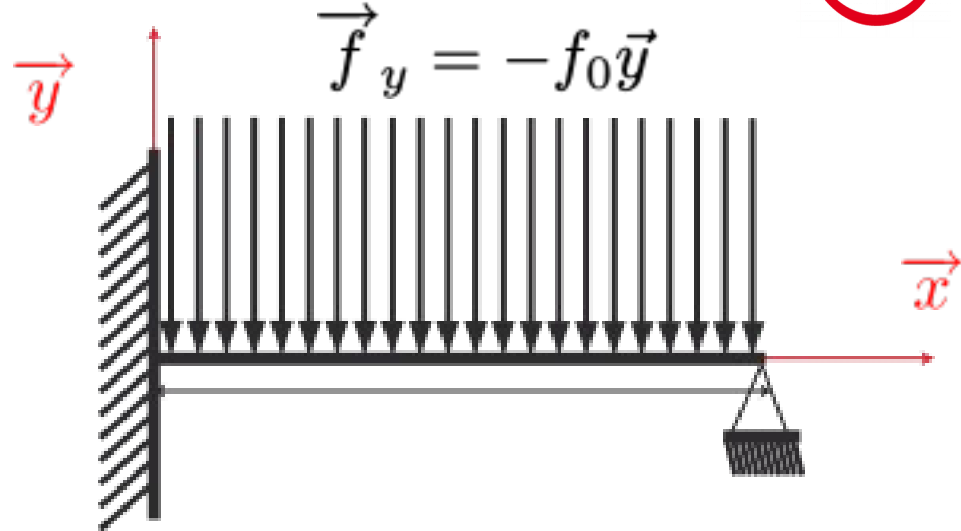
$$\Pi_c(F) = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K} - F \cdot u_d$$

F Minimise
l'énergie complémentaire

$$\underline{F = K \cdot u_d}$$

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial F} = 0$$

Théorème de Menabrea



$$M_z(x) = \frac{f_y}{2}(x - L)^2 - R_L(x - L)$$

$$T_y(x) = -f_y(x - L) + R_L$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$

Théorème de Menabrea

R_L Minimise l'énergie complémentaire

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial R_L} = 0$$

Théorème de Menabrea

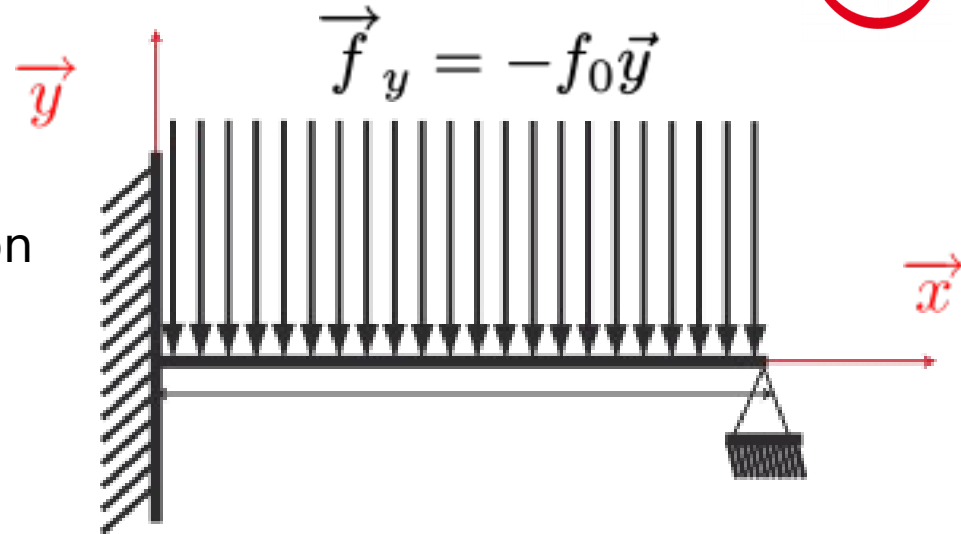


R_L Minimise l'énergie de déformation

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial R_L} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial R_y} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{-f_y}{8} L^4 + \frac{R_y}{3} L^3 \right) = 0$$

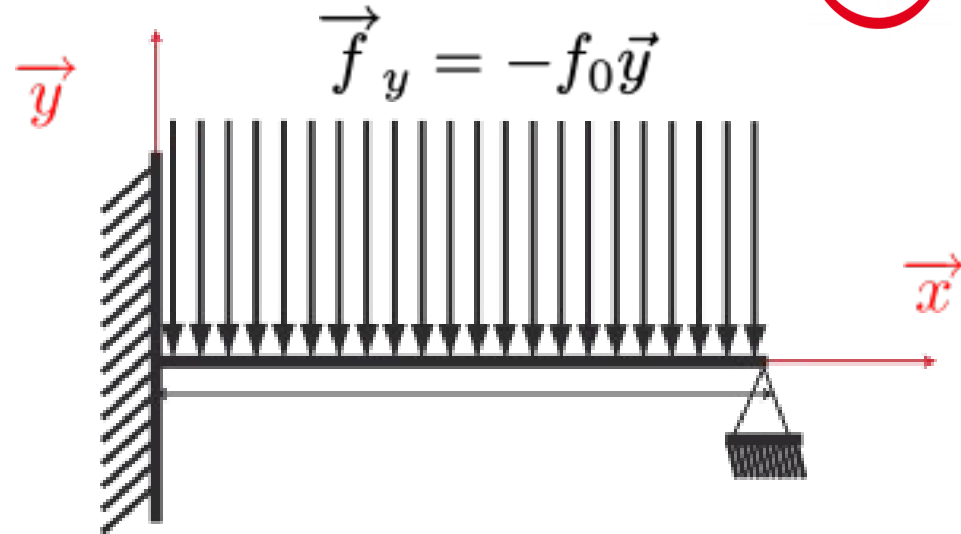
$$R_y = \frac{3f_y L}{8}$$



Théorème de Menabrea



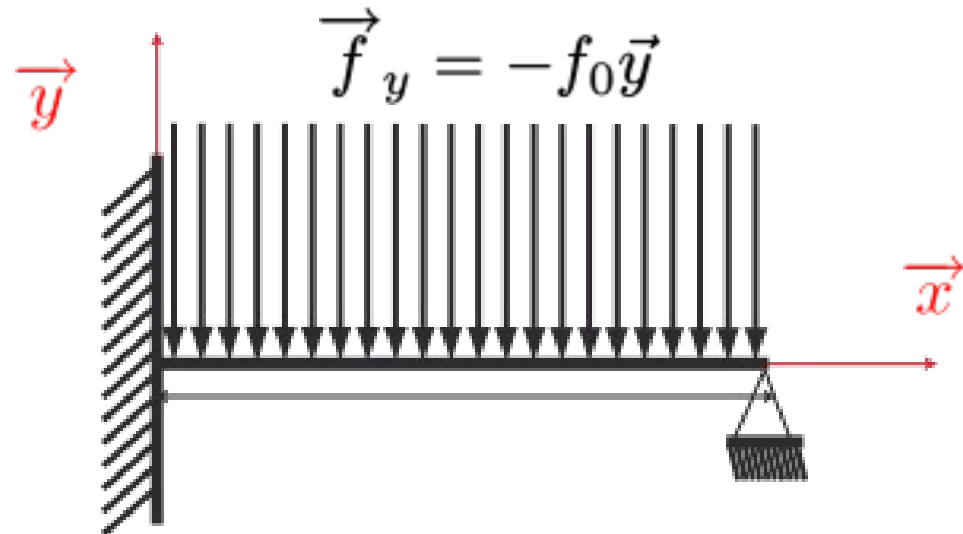
$$R_y = \frac{3f_y L}{8}$$



- On peut déterminer les efforts sans calculer le déplacement dans un cas hyperstatique.
- On peut calculer directement certains efforts.
- On aurait pu prendre de la même façon la réaction ou le moment au point d'encastrement.



Déterminer le moment au point d'encastrement A.



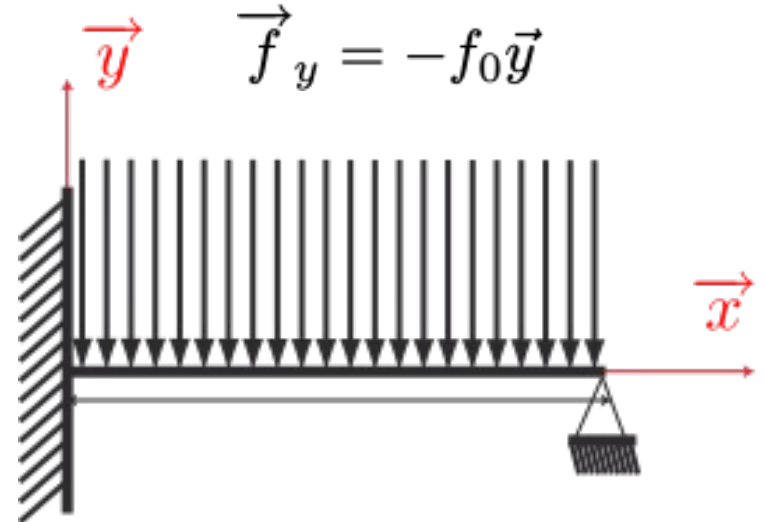


Déterminer le moment au point d'encastrement A.

Équations d'équilibre

Conditions aux limites

Énergie de déformation interne

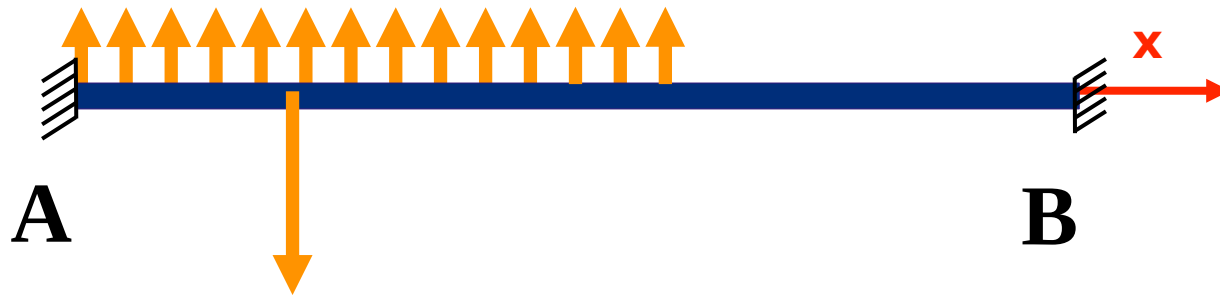




Énergie Complémentaire :

Équations d'équilibre locales scalaires dans ce cas de chargement

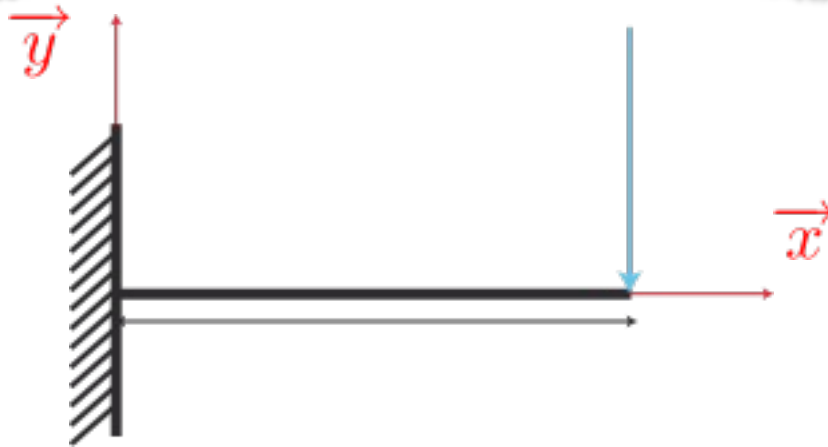
Conditions aux limites et de raccords en effort de ce problème





Théorème de Castigliano

Si une structure est soumise à une force (respectivement un couple) concentrée alors la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à cette force (resp. ce couple) donne le déplacement (resp. la rotation) de son point d'application dans sa direction (de la force ou du couple)



$$v(L) = \frac{\partial W}{\partial F}$$

Théorème de Castigliano



$$\frac{d^2}{dx^2} M(x) = 0$$

Eq. d'Eq.

$$M(L) = 0$$

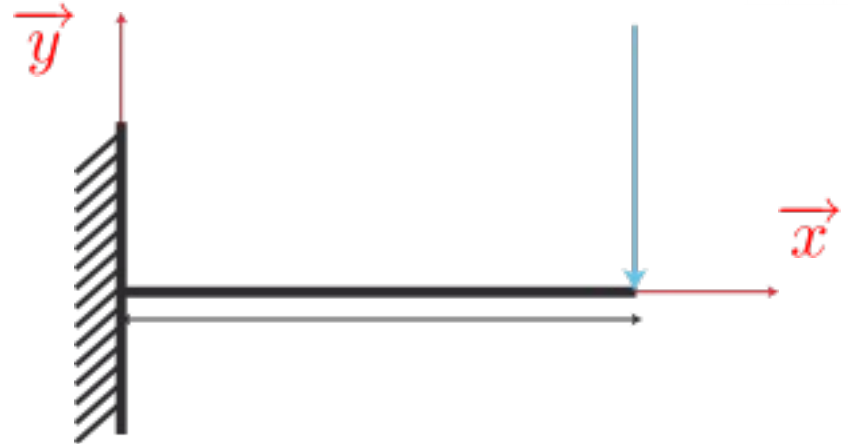
$$M'(L) = F$$

Cdt aux Lim

$$M(x) = F(x - L)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$

$$W = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$



$$v(L) = \frac{\partial W}{\partial F}$$

$$v(L) = -\frac{FL^3}{3EI}$$



Méthode des charges fictives : Calcul de déplacements et de rotations autre part que sous les charges

Méthode

Pour calculer, $U(A)$, la projection du déplacement dans la direction \vec{x}

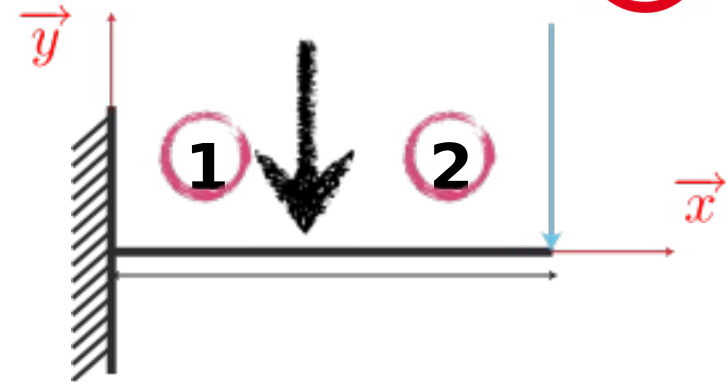
On applique sur la structure un charge fictive $\vec{F}_{fic} = F_{fic}\vec{x}$ en A

On calcule l'énergie élastique due au chargement réel et au chargement fictif

$$U(A) = \frac{\partial W}{\partial F_{fic}} \Big|_{F_{fic}=0}$$



Équations d'équilibre



Conditions aux limites

Énergie de déformation interne

Théorème de Castigliano



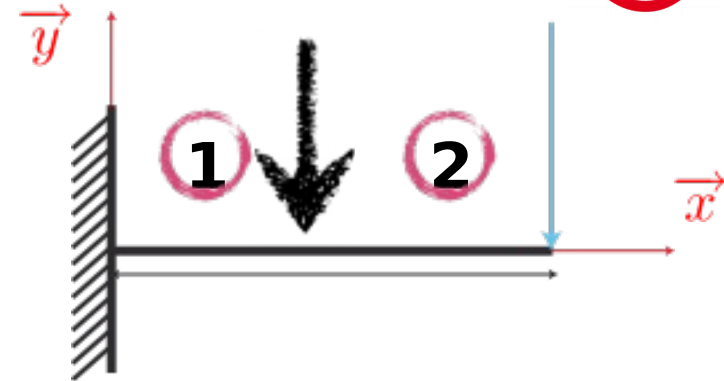
$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{M_1(x)^2}{EI} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{M_2(x)^2}{EI} \right) dx$$

$$M_2(x) = F(x - L)$$

$$M_1(x) = F(x - L) + F_{fic} \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$W = \frac{1}{48 EI} (7 F^2 + 5 F F_{fic} + F_{fic}^2) L^3$$

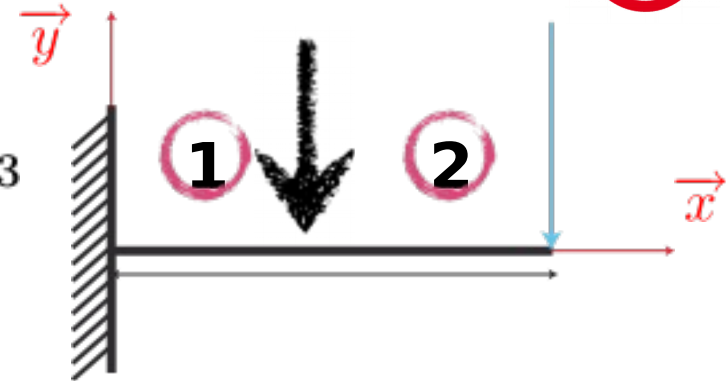


$$U(A) = \frac{\partial W}{\partial F_{fic}} \Big|_{F_{fic}=0}$$

Théorème de Castigliano



$$W = \frac{1}{48 EI} (7 F^2 + 5 F F_{fic} + F_{fic}^2) L^3$$



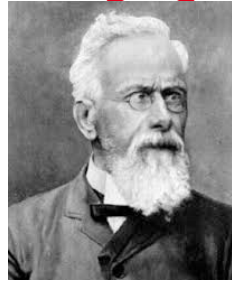
$$\frac{\partial W}{\partial F_{fic}} = -\frac{1}{48 EI} (5 F + 2 F_{fic}) L^3$$

$$V(L/2) = -\frac{5FL^3}{48 EI}$$

$$U(A) = \frac{\partial W}{\partial F_{fic}} \Big|_{F_{fic}=0}$$

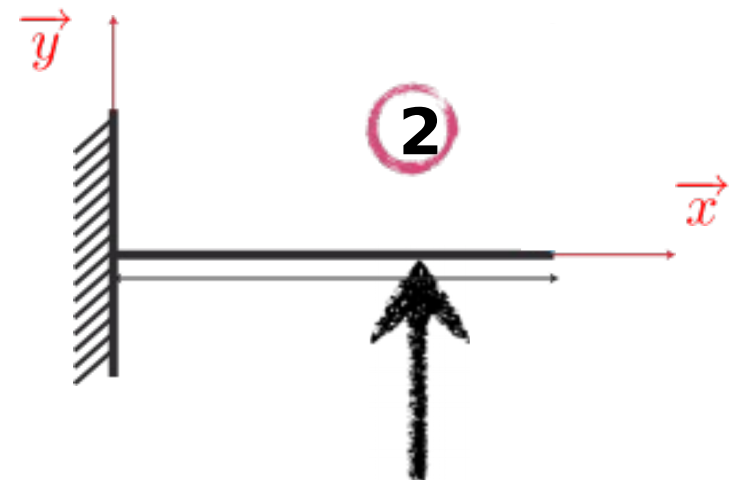
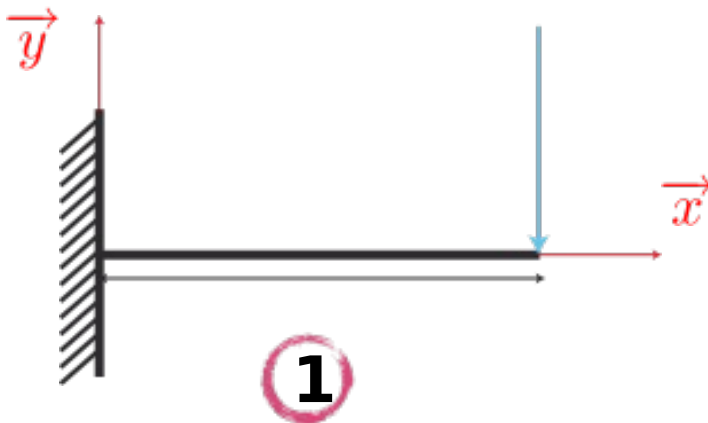
$$v(x) = 1/6 F (x - L)^3 - 1/2 FL^2 x + 1/6 FL^3$$

Théorème de réciprocité (Maxwell-Betti)



On étudie deux chargements différents sur une même structure. Le travail du chargement 1 dans le déplacement solution du problème 2 est égale au travail du chargement 2 dans le déplacement solution du problème 1.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le Principe des Travaux Virtuels.

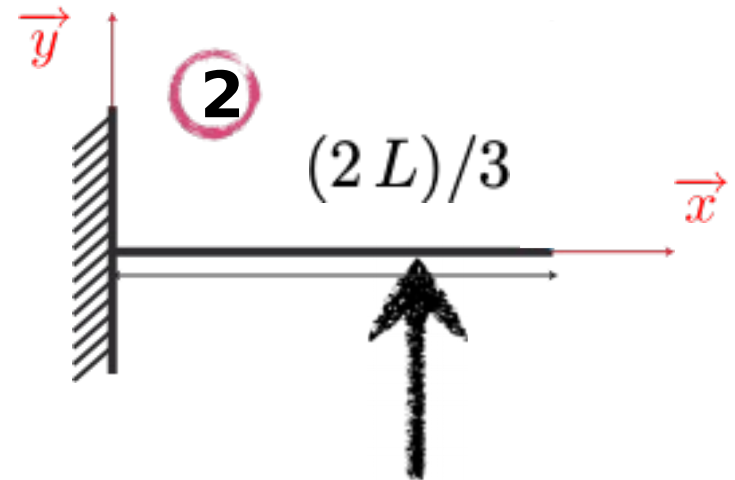
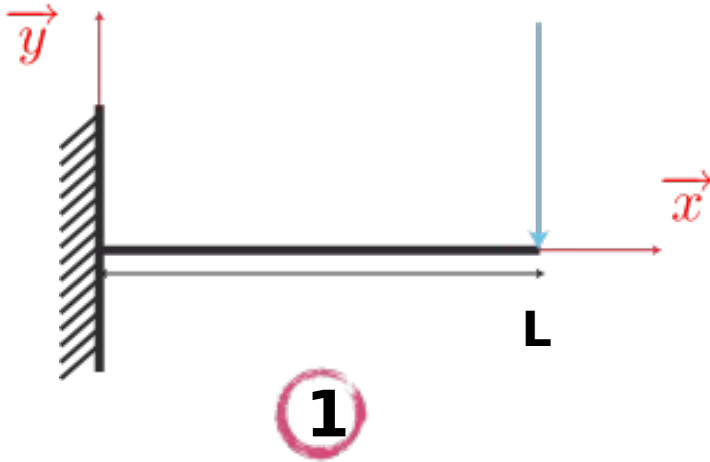


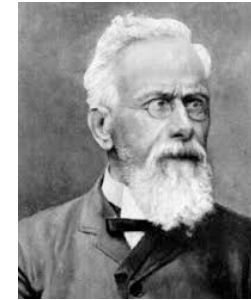


Théorème de réciprocité (Maxwell-Betti)

$$F_2 v_1\left(\frac{2L}{3}\right) = F_1 v_2(L)$$

$$v_2(L) = \frac{F_2}{F} \left(\frac{14}{81} FL^3\right) = \frac{14}{81} F_2 L^3$$







Théorème des puissances virtuelles

$$\forall u^*(x) \in C.A. \{0\}$$

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{ext_{don}}(u^*(x)) = P_{acc}(u^*(x))$$

$$\forall \underline{U}^* \in C.A. \{0\}$$

et

$$\underline{U} \in C.A.$$

$$P_{int}(\underline{U}^*) + P_{ext_{don}}(\underline{U}) = 0$$



U



U

**Solution d'un
problème de
mécanique**

Solution du PPV

- 1. Équations d'équilibre**
- 2. Conditions aux limites**
- 3. Loi de comportement**

$$\forall \underline{U}^* \in C.A. \{0\}$$

et

$$\underline{U} \in C.A.$$

$$P_{int}(\underline{U}^*) + P_{extdon}(\underline{U}) = 0$$



$$\forall u^*(x) \in C.A. \{0\}$$

et

$$\forall u(x) \in C.A.$$

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{ext}(u^*(x)) = 0$$

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{don}(u^*(x)) = 0 \quad \forall U^* \in C.A. \{0\}$$

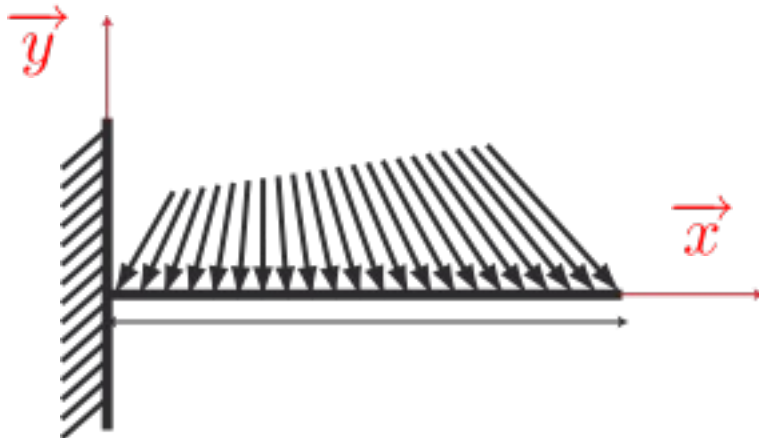
et

$$-\mathbf{K}(U, U^*) + \mathbf{L}(U^*) = 0$$

$$\forall U \in C.A.$$



1. Équations d'équilibre
2. Conditions aux limites
3. Loi de comportement



$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x & = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) & = 0 \end{cases}$$

$$N(x) = ESu'(x) = ES e(x)$$

$$M(x) = -EIv''(x) = EI k(x)$$

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ v(x) \end{cases}$$