Graphes et algorithmique

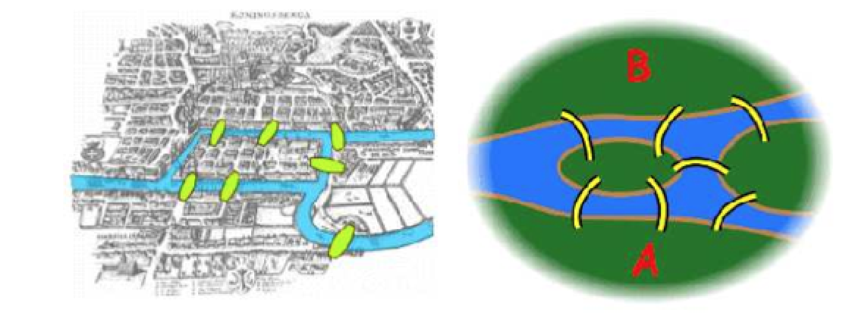
Jérôme Fortin, Eleonora Guerrini

Polytech'Montpellier
Université Montpellier

2015-2016

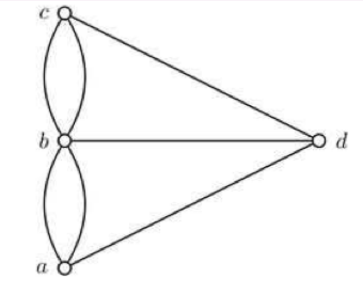
Un peu d'histoire

Communication d'Euler (1736) sur le problème des ponts de Konigsberg :



Un peu d'histoire

- La ville de Konisberg est reliée par 7 ponts. Trouver une façon de partir d'un rivage quelconque et y revenir en passant une et une seule fois par tous les ponts.
- Le problème n'a pas de solution !
- Le problème peut être vu à l'aide du dessin suivant:



Un peu d'histoire

- Pause jusqu'à 1847 Kirchoff : théorie des arbres pour circuits électriques
- Cayley 1879 : théorie des arbres (prob d'énumération des molécules chimi- ques)
- Fin XIXème : départ des grandes conjectures

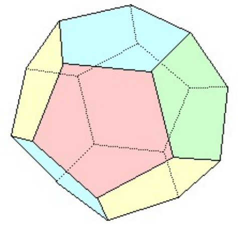
La conjecture des quatre couleurs :

Conjecture (qui est devenu un théorème)

Quatre couleurs suffisent pour colorier une carte plane de façon que deux pays qui partagent une frontière ne soient pas de la même couleur (Moebius 1840 et après Cayley).

Vrai (1976 Appel et Haken en faisant des nombreux cas dénombrés par ordinateur).

Sir Hamilton (1859)



Sir Hamilton (1859) inventa le casse-tête suivant : On prend un do-décaèdre régulier en bois, un clou est fiché sur chaque sommet marqué du nom de vingt grandes villes mondiales.

- Problème: Passez une ficelle une seule fois par chacune des villes (sommets)
- Problème ouvert pour conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un tel chemin dans un graphe quelconque

Histoire moderne

1936 : Premier ouvrage sur la théorie des graphes, avec définitions (König)

1946 : L'histoire de la recherche en théorie des graphes commence, motivée par la résolution de problèmes concrets (Kuhn, Ford et Fukerson et Roy [années 1955-1960])

1960 : La théorie des graphes est unifiée au sein d'un ensemble plus vaste d'outils sous l'appellation de recherche opérationnelle et mathématiques discrètes

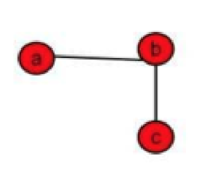
2016 Votre premier cours de Graphes

[Définition] : graphe non-orienté

Soit X un ensemble. On appelle G un graphe $G = (X, A)$ le couple formé par

- X : l'ensemble des sommets
- A l'ensemble des **arêtes**
  - $a = \{x, y\} \in A$ est une **paire** de sommet

Par abus de notation nous noterons les arêtes $(x, y) \in A$ (considérant donc que (y, x) est aussi une arête, même si elle n'est pas explicitement indiqué dans A).



Vocabulaire :

Soit $a = (x, y) \in A$ une arête de $G = (X, A)$

- x et y sont les **extrémités** de l'arête a
- a est **incidente** en x et y (ou x et y sont **adjacents**)
- x et y **voisins** (y **successeur** et **prédécesseur** de x et vice-versa)

- **boucle élémentaire** : une arête de la forme $a = (x, x)$
- **ordre du graphe** : Le nombre de sommets de G est appelé ordre du graphe
- **degré d'un somment** x : nombre d'arêtes qui impliquent le sommet x
- **graphes planaires** : un graphe que l'on peut dessiner en deux dimensions sans faire chevaucher d'arêtes.

Vocabulaire :

Graphe Simple :

Un graphe sans boucles ni arêtes « doubles » est appelé graphe simple (où 1-graphe)

Clique :

Un sous-ensemble de sommets $C \subseteq X$ tel que deux sommets de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

graphe complet

Un graphe orienté $G = (X, A)$ est dit complet si, pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (y, x).

sous-graphe

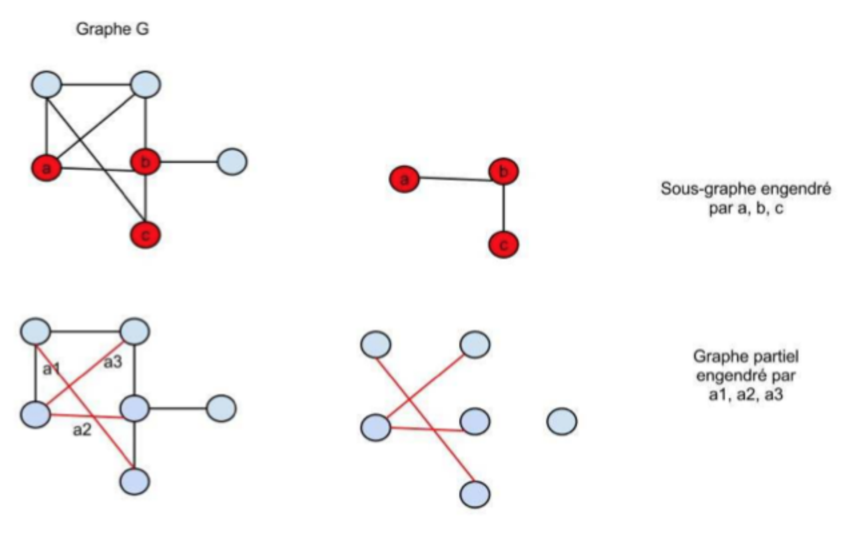
Soit un graphe $G = (X, A)$ et $X' \subseteq X$. Le sous-graphe engendré par X' est $G' = (X', A')$, où A' est formé par les arêtes d'extrémités dans X'.

graphe partiel

Soit un graphe $G = (X, A)$ et $A_1 \subseteq A$, le graphe partiel engendré par A_1 est $G_1 = (X, A_1)$.

On supprimera souvent les sommets de X qui restent isolés.
Observation : une clique d'un graphe G est un sous-graphe complet de G.

Exemples


Graphe G
a
b
c
Sous-graphe engendré par a, b, c
a1
a2
a3
Graphe partiel engendré par a1, a2, a3