

Chapitre 2 Fonctions d'une et de plusieurs variables

Avant de commencer, il vous faut :

- connaître la notion de limite d'une fonction.
- connaître la notion de continuité d'une fonction.
- connaître la notion de tangente à la courbe d'une fonction en un point de cette courbe.
- connaître la notion de vecteur ainsi que ses caractéristiques (direction, sens et norme).
- connaître la notion de nombres complexes.

À la fin du chapitre, vous devrez savoir :

- Fct1 Dériver une fonction d'une variable réelle ou complexe.
- Fct2 Dériver une fonction de plusieurs variables selon une des variables (dérivées partielles)
- Fct3 Écrire et utiliser le gradient d'une fonction à plusieurs variables.
- Fct4 Mener l'étude d'une fonction.
- Fct5 Lire une représentation graphique (courbe de niveau, surface, ...)

1 Fonction à une variable :

Dans ce paragraphe, on considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variable réelle et à valeurs réelles.

1.1 Dérivation cas réel :

Définition Dérivation 1

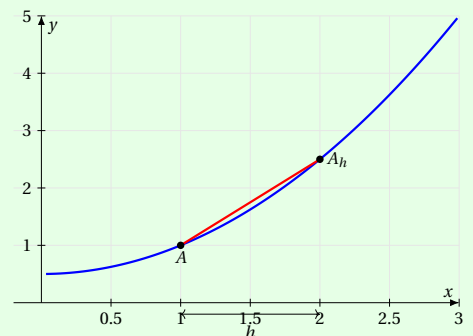
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

On dit qu'une fonction f est dérivable en a lorsque : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$

(La limite doit exister ET être finie). On note alors $\frac{df}{dt}(a) = \ell$ (nombre dérivée de f en a).

On dit alors que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable pour n'importe quel a dans I . On note alors $\frac{df}{dt}$ sa fonction dérivée définie sur I .

On appelle dérivée seconde de f , notée $\frac{d^2f}{dt^2}$, la dérivée de $\frac{df}{dt}$



Proposition Opérations et dérivation 2

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . Soit k un nombre réel.

On a alors :

1. Addition/soustraction de fonctions :

$$\frac{d(f+g)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t) + \frac{dg}{dt}(t)$$

2. Produit d'une fonction par un nombre :

$$\frac{d(k \times f)}{dt}(t) = k \times \frac{df}{dt}(t)$$

3. Produit de deux fonctions :

$$\frac{d(f \times g)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t) \times g(t) + f(t) \times \frac{dg}{dt}(t)$$

4. Quotient de deux fonctions :

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dt}(t) = \frac{\frac{df}{dt}(t) \times g(t) - f(t) \times \frac{dg}{dt}(t)}{g^2(t)}$$

5. Composée de deux fonctions :

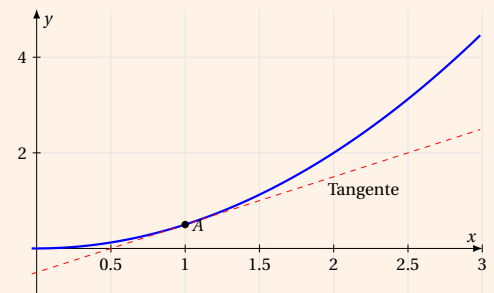
$$\frac{d(f \circ g)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(g(t)) \times \frac{dg}{dt}(t)$$

Proposition 3

Soit f une fonction dérivable sur I . Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $a \in I$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a a pour équation :

$$y = \frac{df}{dt}(a)(t - a) + f(a)$$



1.2 Dérivées de fonctions usuelles :

Proposition 4

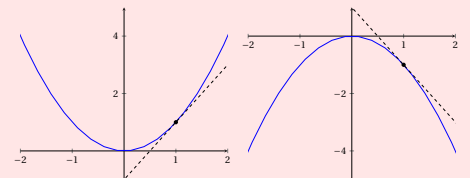
$f(t)$	$t^n (n \in \mathbb{Q})$	e^t	$\ln(t)$	$\cos(t)$	$\sin(t)$	$\tan(t)$	$ch(t)$	$sh(t)$	$th(t)$
$\frac{df}{dt}(t)$	nt^{n-1}	e^t	$\frac{1}{t}$	$-\sin(t)$	$\cos(t)$	$1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$	$sh(t)$	$ch(t)$	$1 - th^2(t) = \frac{1}{ch^2(t)}$

Théorème 5

On considère f une fonction deux fois dérivable sur I .

On a les équivalences suivantes :

- f est (strictement) croissante sur $I \iff \frac{df}{dt}$ est (strictement) positive sur I .
- f est (strictement) décroissante sur $I \iff \frac{df}{dt}$ est (strictement) négative sur I .
- f est (strictement) convexe sur $I \iff \frac{df}{dt}$ est (strictement) croissante sur $I \iff \frac{d^2f}{dt^2}$ est (strictement) positive sur I .
- f est (strictement) concave sur $I \iff \frac{df}{dt}$ est (strictement) décroissante sur $I \iff \frac{d^2f}{dt^2}$ est (strictement) négative sur I .



1.3 Étude et tracer de fonctions :

Pour tracer le plus correctement possible $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable, on commence par réduire l'intervalle d'étude puis on trace des points et/ou droites importants.

Définition Réduction de l'intervalle d'étude 6

1. On dit qu'une fonction f est T -périodique (ou périodique de période T) lorsque :

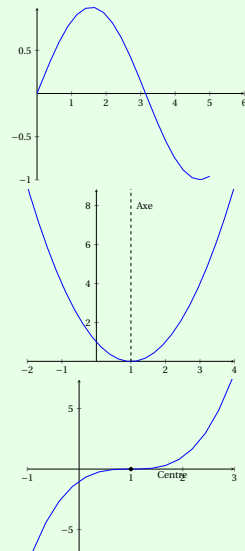
$$\forall t \in I, \quad f(t+T) = f(t)$$

2. On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie Δ d'équation $x = a$ lorsque :

$$\forall t \in I, \begin{cases} a+t \in I \\ a-t \in I \\ f(a-t) = f(a+t) \end{cases}$$

3. On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une centre de symétrie $S(a; b)$ lorsque :

$$\forall t \in I, \begin{cases} a+t \in I \\ a-t \in I \\ f(a-t) + f(a+t) = 2b \end{cases}$$



Remarque 7

- La périodicité permet de réduire le domaine de définition à un intervalle dont l'amplitude est de T . La courbe dessinée sur cet intervalle réduit permet par translation horizontale d'obtenir le "reste de la courbe".
- Les deux symétries de courbe permettent de réduire "de moitié" son domaine de définition. La courbe dessinée sur cet intervalle réduit permet par symétrie (axiale ou centrale) d'obtenir le "reste de la courbe".

Définition extréma, point d'inflexion, asymptotes 8

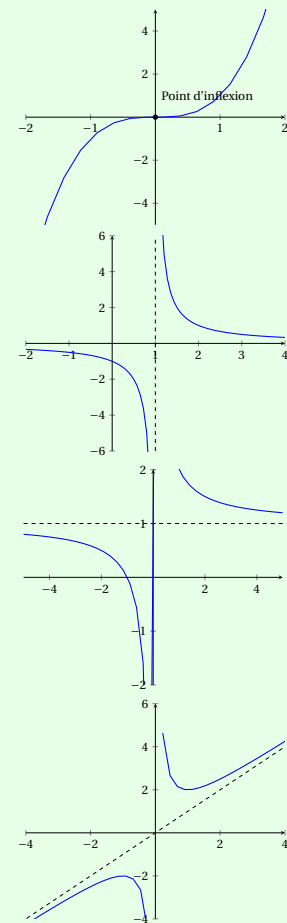
On dit que f admet un minimum (resp. maximum) en t_0 lorsque $\frac{df}{dt}$ s'annule en t_0 en passant de "négative" à "positive" (resp. de "positive" à "négative") : il y a changement de variations.

On dit que f admet un point d'inflexion en t_0 lorsque $\frac{d^2f}{dt^2}$ s'annule en t_0 en changeant de signe : il y a un changement de convexité.

Lorsque $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $t = a$.

Lorsque $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$. (On définit de la même manière l'existence d'une asymptote horizontale en $-\infty$)

Lorsque $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - (mt + p) = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = mt + p$ en $+\infty$.



Exercice 9

1. On considère un mobile se déplaçant sur un axe en fonction du temps t selon :

$$x(t) = 3t^2 + 2t - 5$$

- Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps t .
- Déterminer l'expression de l'accélération en fonction du temps t .

2. étude d'une fonction :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

- Donner le domaine de définition de f .
- Déterminer : $\frac{df}{dx}(x)$ et $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$.
- Dresser le tableau de variation complet de f .
- En déduire les éventuels points d'inflexion.

3. Décroissance radioactive :

On considère $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Une fonction mesurant la quantité d'éléments radioactifs en fonction du temps t .

- Calculer $\frac{dN}{dt}(t)$.
- Montrer que : $\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t)$

Les outils précédents se généralisent naturellement lorsque la fonction dépend de plusieurs variables. Cette situation apparaît très fréquemment en physique (pression, volume, température), en mécanique ou en génie industriel.

2 Comment étudier une fonction à deux variables ?

Dans cette partie, on considère f une fonction à deux variables réelles x et t (Les notions qui suivent se généralisent à n variables ($n \geq 3$))

2.1 Définition et représentation graphique

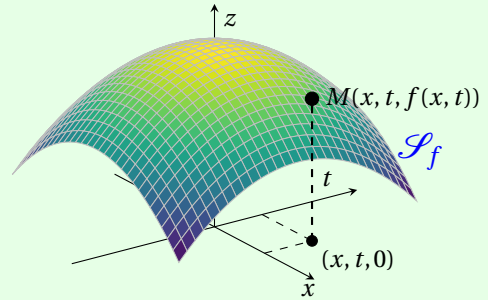
Définition 10

Une fonction réelle à deux variables réelles est une fonction :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

De la même façon que pour une fonction d'une variable réelle, une fonction réelle de deux variables réelles peut se représenter dans l'espace muni d'un repère par la surface $\mathcal{S}_f$ d'équation $z = f(x, t)$ c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, t, f(x, t))$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la valeur de la fonction en ce point correspond à la hauteur (coordonnée z) du point de la surface au-dessus du point $(x, t, 0)$.

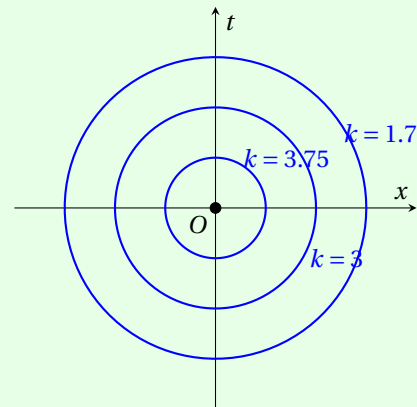


Définition courbes de niveau 11

Soit $k \in \mathbb{R}$.

On appelle **courbe de niveau d'altitude k** , l'ensemble des points $M(x, t)$ tels que $f(x, t) = k$.

Le schéma ci-contre illustre les courbes de niveau de la fonction de la définition précédente pour 3 valeurs de k .



Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, t) = x^2 t - t^2 + x t + 1$$

1. Calculer $f(0; 0)$, $f(0; 1)$ et $f(1; 0)$.
2. Déterminer l'expression de $f(x; 0)$, de $f(0; t)$ et de $f(x; x)$.
(Cela permet de regarder les intersections de la surface $\mathcal{S}_f$ respectivement avec le plan $t = 0$, $x = 0$ et $t = x$)

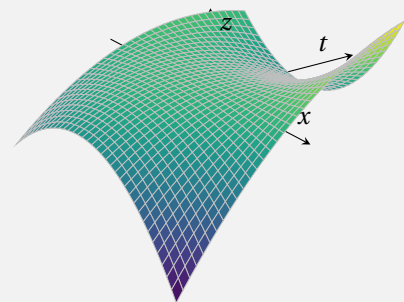
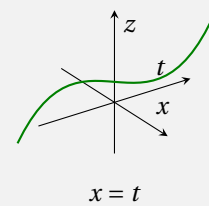
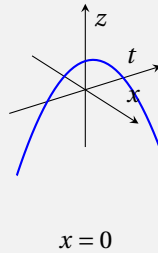
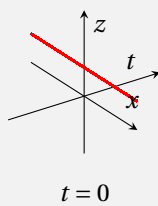


FIGURE 1 – Surface représentative de $f(x, t)$.



2.2 Dérivées partielles et gradient :

Définition-Proposition fonctions partielles 13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les **fonctions partielles** (ou les applications partielles) de f en (a, b) par :

- la fonction $f(, b) : x \rightarrow f(x, b)$ qui est la fonction partielle de f en (a, b) par rapport à la première variable ;
- la fonction $f(a,) : y \rightarrow f(a, y)$ qui est la fonction partielle de f en (a, b) par rapport à la seconde variable.

En conséquence :

1. La courbe de la fonction partielle $f(, b)$ est l'intersection de la surface $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $y = b$.
2. La courbe de la fonction partielle $f(a,)$ est l'intersection de la surface $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $x = a$.

Définition Dérivées partielles premières et secondes 14

1. Si la fonction partielle $f(, b)$ est dérivable en a , on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (a, b) . Cette dérivée partielle, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, est alors égale au nombre dérivé de $f(, b)$ en a .
2. Si la fonction partielle $f(a,)$ est dérivable en b , on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en (a, b) . Cette dérivée partielle, notée $\frac{\partial f}{\partial t}(a, b)$, est alors égale au nombre dérivé de $f(a,)$ en b .

Si f admet des dérivées partielles selon les deux variables en tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on dit que f admet des fonctions dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ qui sont notées respectivement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ qui sont définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x; t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} : (x; t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

On définit de la même manière, les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x; t) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} : (x; t) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(x, t)$$

qui sont les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$
et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} : (x; t) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} : (x; t) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t)$$

qui sont les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial t}$

Définition 15

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **gradient** de f au point (a, b) , noté $\vec{\nabla} f(a, b)$, le vecteur :

$$\vec{\nabla} f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(a, b) \end{pmatrix}$$

Le gradient est dirigé dans la direction de la plus forte augmentation de la fonction.

Définition 16

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$. On dit que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si $\vec{\nabla} f(a, b) = \vec{0}$.

2.3 Cas particulier : Dérivation d'une fonction à variable complexe ?

Dans ce paragraphe, on considère $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à variable complexe z et à valeurs complexes.

Définition Dérivation complexe 17

Soit I un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in I$.

On dit qu'une fonction f est dérivable en z_0 lorsque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \ell \in \mathbb{C}$ (h est complexe)

(La limite doit exister ET être finie). On note alors $\frac{df}{dz}(z_0) = \ell$ (nombre dérivé de f en z_0).

Exemples :

étude de la dérivabilité de f avec $f(z) = z$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{(z+h) - (z)}{h} \\ &= \frac{z+h-z}{h} \\ &= \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

étude de la dérivabilité de g avec $g(z) = \bar{z}$.

$$\begin{aligned} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} \\ &= \frac{\bar{h}}{h} \end{aligned}$$

L'expression $\frac{\bar{h}}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0. En effet, si h est réel, elle vaut 1 et si h est imaginaire pur, elle vaut -1 .

Contrairement au cas réel, la dérivabilité complexe est beaucoup plus restrictive. Toutes les fonctions usuelles ne sont donc pas dérivables sur $\mathbb{C}$.

Remarque 18

En écrivant les fonctions complexes sous forme :

$$f(x, t) = u(x, t) + jv(x, t)$$

On a : f est dérivable au sens complexe lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \end{cases}$$

2.4 Opérateurs vectoriels usuels :

Définition 19

1. **Divergence :** Pour un champ de vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, la divergence est le scalaire :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

2. **Laplacien :** Le laplacien d'une fonction scalaire f est la divergence de son gradient :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Cet opérateur est au cœur des équations de propagation d'ondes et de diffusion thermique.

2.5 Notion d'extremums

Définition 20

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. On dit que f admet un maximum global en (a, b) si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, t) \leq f(a, b)$$

Le nombre réel $f(a, b)$ est alors appelé le maximum de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. On dit que f admet un minimum global en (a, b) si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, t) \geq f(a, b)$$

Le nombre réel $f(a, b)$ est alors appelé le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Un minimum global ou un maximum global, s'il existe, s'appelle un extremum global de f .

Certaines fonctions n'admettent pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$ mais en possèdent sur un domaine plus réduit. Un rectangle de $\mathbb{R}^2$ est le produit cartésien R de deux segments $I = [x_1; x_2]$ et $J = [y_1; y_2]$ avec $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$. Ainsi, $R = I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in I \text{ et } y \in J\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \leq x \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y \leq y_2\}$. On dit qu'un tel rectangle R contient un point (a, b) dans son intérieur si $x_1 < a < x_2$ et $y_1 < b < y_2$.

On définit alors :

1. On dit que f admet un maximum local en (a, b) s'il existe un rectangle R de $\mathbb{R}^2$ contenant (a, b) dans son intérieur tel que, pour tout $(x, t) \in R$,

$$f(x, t) \leq f(a, b)$$

Le nombre réel $f(a, b)$ est alors appelé un maximum local de f .

2. On dit que f admet un minimum local en (a, b) s'il existe un rectangle R de $\mathbb{R}^2$ contenant (a, b) dans son intérieur tel que, pour tout $(x, t) \in R$, $f(x, t) \geq f(a, b)$. Le nombre réel $f(a, b)$ est alors appelé un minimum local de f .

Théorème 21

Sous les mêmes hypothèses, on a l'implication suivante :

Si f admet un extremum local en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors (a, b) est un point critique de f .

Théorème Nature d'un point critique (Matrice Hessienne) 22

Soit f une fonction deux fois dérivable. En un point critique (a, b) où $\vec{\nabla} f(a, b) = \vec{0}$, on étudie la matrice Hessienne :

$$H(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

Soit $D = \det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right)^2$:

- Si $D > 0$: Le point est un **extremum local**.
 - C'est un **minimum** si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$.
 - C'est un **maximum** si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$.
- Si $D < 0$: Le point est un **point selle** (ou col).
- Si $D = 0$: Le critère est indécis.

De la même manière que la dérivée seconde permet de distinguer minimum et maximum en une variable, la matrice Hessienne joue le même rôle pour les fonctions de plusieurs variables.

Exercice 23

Une entreprise fabriquant deux produits A et B modélise son bénéfice en $k\text{€}$ par :

$$B(x; y) = 20x + 15y - x^2 - y^2$$

où

- x est la quantité produite du produit A ,
 - y celle du produit B .
1. Donner les courbes de niveau.
 2. Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de B .
 3. Déterminer les points critiques.
 4. Étudier leur(s) nature(s).
 5. Déterminer, si possible, le bénéfice maximal que peut faire l'entreprise.

3 Applications en Physique :

3.1 Charge d'un condensateur :

Lors de la charge d'un condensateur dans un circuit RC , la tension aux bornes du condensateur est donnée par $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ où :

- $E = 12$ est la tension d'alimentation (en volts),
 - $\tau = RC = 2$ est la constante de temps (en secondes),
 - $t \geq 0$
1. Calculer $u(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Interpréter les résultats obtenus.
 2. Déterminer $\frac{du}{dt}(t)$. Interpréter le résultat.
 3. Déterminer $\frac{du}{dt}(0)$ puis interpréter le résultat.
 4. Étudier le signe de cette dérivée puis les variations de u .
 5. Étudier la convexité de u .
 6. Déterminer les éventuelles asymptotes.
 7. Donner l'allure de la courbe de u .
 8. À partir de quand, la tension dépasse-t-elle 11V?
 9. Calculer $u(5\tau)$. Pourquoi peut-on affirmer que le condensateur est pratiquement chargé à 5τ ?
 10. Sachant que $R = 1 \text{ k}\Omega$, déterminer la capacité maximale du condensateur.
 11. On souhaite qu'un capteur atteigne 95% de sa tension finale en moins de 0,5s. Déterminer la valeur maximale de la constante de temps τ .

3.2 Température d'une plaque :

Une plaque possède la température :

$$T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

1. Représenter qualitativement la surface.
2. Donner les courbes de niveau.
3. Calculer :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y)$$

4. Calculer le gradient.
5. Où la température augmente-t-elle le plus rapidement?
6. Où est le maximum?

3.3 Thermodynamique (Gaz Parfaits) :

On considère l'équation d'état d'un gaz Parfait : $PV = nRT$.
où :

- n le nombre de moles de gaz.
- P : pression (Pa),
- V : volume (m^3),
- T : température (K),
- $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

1. Écrire T comme une fonction dépendant de P et de V .
2. Calculer alors : $\frac{\partial T}{\partial P}$ et $\frac{\partial T}{\partial V}$.
3. Donner le gradient.
4. Interpréter pour une mole de gaz dans le cas où $P = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ et $V = 1,2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$:
 - influence de P ;
 - influence de V .
5. Dans une enceinte fermée (volume constant), que devient la température si la pression augmente?

Définition 24

En thermodynamique, on appelle :

- **Coefficient de dilatation isobare** noté α , le nombre réel tel que :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

(l'indice P signifie que la pression est constante)

- **Coefficient d'augmentation de pression isochore** noté β , le nombre réel tel que :

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

(l'indice V signifie que le volume est constante)

- **Compressibilité isotherme** noté κ_T , le nombre réel tel que :

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

(l'indice T signifie que la température est constante)

Exercice 25

Montrer que, pour un gaz parfait, on a :

$$\alpha = \frac{1}{T} \quad \beta = \frac{1}{T} \quad \kappa_T = \frac{1}{P}$$