

Chapitre 1 Nombres Complexes

Avant de commencer, il vous faut :

- connaître la résolution des équations du premier et du second degré à coefficients réels.
- connaître les notations et règles du calcul littéral.
- connaître la notion de vecteurs avec et sans coordonnées .
- connaître l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- connaître les relations trigonométriques.

À la fin du chapitre, vous devrez savoir :

- Co1 Écrire et calculer avec des nombres complexes sous forme algébrique.
- Co2 Écrire et calculer avec des nombres complexes sous forme trigonométrique (polaire).
- Co3 Écrire et calculer avec des nombres complexes sous forme exponentielle (géométrie).
- Co4 Savoir passer d'une forme à une autre d'un nombre complexe.
- Co5 Résoudre une équation du second degré.
- Co6 Savoir faire le lien entre les nombres complexes et la géométrie repérée.

1 Qu'est-ce qu'un nombre complexe et l'axe d'un point?

1.1 Existence et opérations :

Définition Définition(ADMIS) 1

On admet l'existence d'un nombre j tel que $j^2 = -1$.

On appelle **nombre complexe**, noté z , tout nombre pouvant s'écrire $z = a + jb$ avec a et b des nombres réels.

Le nombre a est appelé **partie réelle** du nombre z : on le note $Re(z)$.

Le nombre b à côté de j est appelé **partie imaginaire** de z : on le note $Im(z)$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble de tous les nombres complexes.

Remarque (Rappels et notation) 2

- Tout nombre réel x s'écrit $x = x + 0j$ (partie imaginaire nulle)
- Tout nombre complexe z tels que $z = 0 + yj$ (partie réelle nulle) est dit imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $j\mathbb{R}$.

Proposition 3

Les opérations sur les réels se prolongent sur les nombres complexes avec :

1. Addition/soustraction :

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

2. Produit :

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

3. Quotient :

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Le nombre complexe $c - jd$ est appelé conjugué du nombre $c + jd$. On le note $\overline{c + jd}$.

1.2 Forme algébrique et affixe :

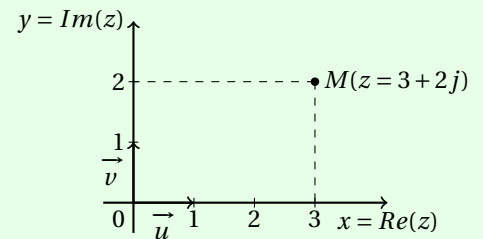
Définition Vocabulaire 4

L'écriture $a + jb$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

Définition (affixe) 5

On appelle **plan complexe**, le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout nombre complexe $z = x + jy$, on associe le point $M(x; y)$ (ou le vecteur $\vec{OM}$) du plan complexe. Réciproquement, à tout point $M(x; y)$ (ou tout vecteur $\vec{OM}$) du plan complexe, on associe le nombre complexe $z = x + jy$. On dit que M est le **point image** de z et $z = x + jy$ est l'**affixe** du point M (ou du vecteur $\vec{OM}$).



Exercice 6

1. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

$$a = 2(5 - 3j) \quad b = (5 - 3j)^2 \quad c = \frac{2 - 3j}{4 + 3j} \quad d = 3(2 + j) - 5j(-3 + 2j) + 8j$$

2. Représenter dans un repère les points dont les affixes sont :

$$1 + j \quad -4 + 3j \quad -2 - 3j$$

Remarque 7

La forme algébrique est très pratique dès que l'on doit représenter un nombre complexe ou faire des additions/soustractions de nombres complexes. Malheureusement, il est moins facile d'effectuer des calculs de puissances (grand exposant)

1.3 Forme trigonométrique et exponentielle et affixe

Définition 8

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de forme algébrique $z = x + jy$ et M le point image de z .

On appelle **module** de z , le nombre réel noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Graphiquement, il s'agit de la distance du point M à l'origine du repère.

On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, une mesure de l'angle

$$(\vec{u}; \vec{OM}) = \theta [2\pi].$$

On appelle **forme trigonométrique ou polaire** de z (avec $z \neq 0$) l'écriture

$$z = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$

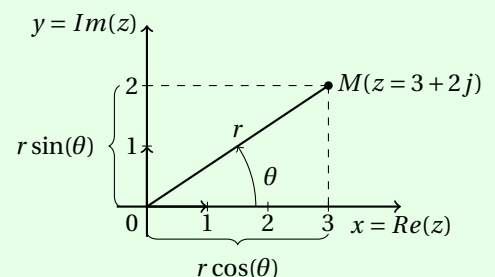
où $r = |z|$ et mesure $(\vec{u}; \vec{OM}) = \theta [2\pi]$.

En pratique, on prendra comme argument (principal), celui dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

On pose : $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

On appelle **forme exponentielle ou géométrique** de z (avec $z \neq 0$) l'écriture

$$z = r e^{j\theta} \quad \text{En génie industriel, on notera} \quad z = [r; \theta]$$



Proposition produit/quotient forme exponentielle 9

On donne : $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$
alors on a :

1.

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{En génie industriel} \quad [r_1; \theta_1] \times [r_2; \theta_2] = [r_1 r_2; \theta_1 + \theta_2]$$

2.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{En génie industriel} \quad \frac{[r_1; \theta_1]}{[r_2; \theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}; \theta_1 - \theta_2 \right]$$

On remarquera que multiplier (resp. diviser) par le nombre complexe z_2 revient à multiplier (resp. diviser) le module par r_2 (dilatation/contraction) et revient à ajouter (resp. soustraire) θ_2 à l'argument. (Rotation directe/indirecte)

Exercice 10

Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

$$(\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{3}})(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}) \quad \frac{8e^{j\frac{2\pi}{3}}}{12e^{j\frac{3\pi}{4}}} \quad (\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}})^8$$

On pourra remarquer que la formule 1 de la propriété 9 se généralise en :

$$z^n = r^n e^{j(n\theta)} \quad \text{En génie industriel} \quad [r; \theta]^n = [r^n; n\theta]$$

1.4 Quelles sont les formules de passage?

1.4.1 Algèbre vers trigonométrie/exponentielle

On part de $z = x + jy$.

- étape 1 : on calcule le module de z
- étape 2 : On a alors :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

- étape 3 : On obtient une valeur de θ en utilisant le cercle trigonométrique pour les valeurs exactes et remarquables de θ . Sinon, on prend :

$$\theta = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$

(Attention, pour $a = 2 + 2j$ et $b = -2 - 2j$ donne tous les deux $\arctan(|\frac{2}{2}|) = \arctan(|\frac{-2}{-2}|) = \frac{\pi}{4}$).
Pourtant, leurs points images ne sont pas dans le même quadrant.

Voici un tableau pour obtenir le bon argument (principal) : On pose $\alpha = \arctan(|\frac{y}{x}|)$

	$x < 0$	$x > 0$
$y \leq 0$	$\theta = -\pi + \alpha$	$\theta = -\alpha$
$y \geq 0$	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \alpha$

La commande calculatrice $\text{atan2}(y, x)$ donne directement le bon argument.

On écrit alors $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ ou $z = re^{j\theta}$.

Dans la pratique, on choisira une valeur de θ entre -180 et 180 degrés (ou entre $-\pi$ et π radians) c'est ce que l'on appelle l'argument principal.

Exercice avec correction 11

On donne $a = 4 - 4j$

Déterminer sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.

Correction

Calcul du module :

$$|a| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

On divise le nombre par son module pour obtenir un nombre complexe de module 1 :

$$\frac{a}{|a|} = \frac{4-4j}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc

$$a = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

et

$$a = 4\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

1.4.2 trigonometrique vers algebrique

On part de $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$.

On développe l'expression.

Exercice avec correction 12

On donne $a = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Déterminer sa forme algébrique.

Correction

On développe l'expression :

$$4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

On remplace par les valeurs exactes puisque $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure remarquable :

$$a = 4 \times \frac{-1}{2} + 4j \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ce qui donne

$$a = -2 + 2j\sqrt{3}$$

1.4.3 exponentielle vers trigonometrique/algebrique

On part de $z = re^{j\theta}$

— étape 1 : On remplace $e^{j\theta}$ par $\cos(\theta) + j\sin(\theta)$.

— étape 2 : On développe l'expression en remplaçant $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par leurs valeurs exactes.

Exercice avec correction 13

On donne $a = 4e^{j\frac{2\pi}{3}}$

Déterminer sa forme trigonométrique puis algébrique.

Correction

On remplace $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ par l'expression $(\cos(\frac{2\pi}{3}) + j \sin(\frac{2\pi}{3}))$ ce qui donne (forme trigonométrique) :

$$\begin{aligned} a &= 4 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

On remplace par les valeurs exactes puisque $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure remarquable :

$$a = 4 \times \frac{-1}{2} + 4j \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ce qui donne} \quad a = -2 + 2j\sqrt{3} \quad \text{forme algébrique}$$

Les formules suivantes seront utilisées dans la représentation de Fresnel mais aussi dans d'autres chapitres comme l'intégration (linéarisation) et les équations différentielles (pour changer de forme de solutions).

Proposition 14

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$.

Comme $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$, on en déduit les formules suivantes :

1. Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

2. De Moivre :

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} \quad \text{et} \quad (\cos(\theta) + j \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)$$

Exercice 15

1. Écrire les nombres suivants sous forme trigonométrique :

$$\left(2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)\right)^2 \quad \left(2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)\right)^7$$

2. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

3. Exprimer $\cos(2\theta)$ comme un polynôme de degré 2 en $\cos(\theta)$.

4. Montrer que $\sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$.

2 Comment résoudre une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$?**Théorème (Résolution équation du 2nd degré) 16**

Soient a , b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est un nombre réel.

Les solutions de cette équation sont alors données selon le signe de Δ :

écriture de Δ	$\Delta = \mu^2 (\mu > 0)$	$\Delta = 0$	$\Delta = -\mu^2 = (j\mu)^2 < 0 \quad (\mu > 0)$
Solutions :	Réelles distinctes $z_{1,2} = \frac{-b \mp j\mu}{2a}$	Réelle double : $z_0 = \frac{-b}{2a}$	Complexes conjuguées : $z_{1,2} = \frac{-b \pm j\mu}{2a}$

Exercice avec correction 17

Déterminer les solutions de l'équation :

$$z^2 + 4z + 13 = 0$$

Correction

Réponse :

1. On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= (4)^2 - 4 \times 1 \times 13 \\
 &= -36 \\
 &= (6j)^2
 \end{aligned}$$

2. Les solutions sont donc complexes conjuguées avec $\mu = 6$:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{-b - j\mu}{2a} & z_2 &= \frac{-b + j\mu}{2a} \\
 z_1 &= \frac{-(4) - 6j}{2 \times 1} & z_2 &= \frac{-(4) + (6j)}{2 \times 1} \\
 z_1 &= \frac{-4 - 6j}{2} & z_2 &= \frac{-4 + 6j}{2} \\
 z_1 &= -2 - 3j & z_2 &= -2 + 3j
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{-2 - 3j; -2 + 3j\}$$

3 Application des nombres complexes en électrotechnique :

En électricité, on est souvent amenés à étudier des signaux de la forme :

$$u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$$

Les lois électriques sur les dipôles (résistance, bobine, condensateur,...) font intervenir des dérivées et des intégrales.

Calculons $\frac{du}{dt}(t)$ la dérivée de u .

On a :

$$\frac{du}{dt}(t) = U(-\sin(\omega t + \phi)) \times \omega = -\omega U \sin(\omega t + \phi)$$

Regardons ce qui se passe en représentation complexe :

$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \phi)} = \underbrace{U e^{j\phi}}_{\underline{U}} e^{j\omega t}$$

ainsi notre signal s'écrit :

$$u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t))$$

Maintenant, on a :

$$\frac{d\underline{u}}{dt}(t) = U(j\omega) e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \underline{u}(t)$$

Remarque 18En représentation complexe, dériver revient à multiplier par $j\omega$. Pour intégrer, on divisera alors par $j\omega$.

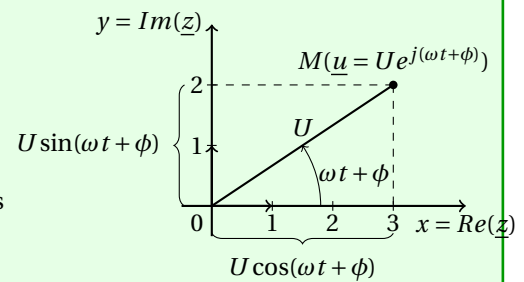
Définition (Phaseur/Vecteur de Fresnel) 19

Toutes les grandeurs d'un même circuit possèdent la même pulsation ω .
 Le nombre complexe $\underline{U} = Ue^{j\phi}$ est appelé **phaseur** de la tension.
 On écrit alors une tension électrique (comme tout autre signal) sous la forme :

$$u(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$$

On associe à cette tension, un vecteur $\overrightarrow{OM}$ appelé vecteur de Fresnel dont les caractéristiques sont :

- son module $U = \|\overrightarrow{OM}\|$ est constant (appelé **amplitude** du signal).
- il tourne dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω (appelée **pulsation** du signal).
- son angle orienté $\left(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}\right)$ à l'instant t a pour mesure $\omega t + \phi$.



Définition Impédance 20

On appelle **impédance d'un dipôle** en régime sinusoïdal, le nombre complexe Z tel que $\underline{U} = Z\underline{I}$ (où $\underline{U}$ et $\underline{I}$ désignent les phaseurs de tension et du courant de ce dipôle)

Remarque rappels sur les lois des dipôles usuels 21

Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Relation u et i	$u(t) = Ri(t)$	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$

Exercice avec correction 22

Vérifier que l'impédance :

- d'une résistance est $Z_R = R$.
- d'une bobine est $Z_L = j\omega L$.
- d'un condensateur $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$.

Correction

Pour une résistance	Pour une bobine	Pour un condensateur
$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{U} = L \frac{d\underline{I}}{dt} = L(j\omega \underline{I})$	$\underline{I} = C \frac{d\underline{U}}{dt} = C(j\omega \underline{U})$
Z_R	Z_L	Z_C
$= \frac{U}{I}$	$= \frac{U}{I}$	$= \frac{U}{I}$
$= \frac{RI}{I}$	$= \frac{Lj\omega I}{I}$	$= \frac{U}{Cj\omega I}$
$= R$	$= j\omega L$	$= \frac{1}{j\omega C}$

Remarque à retenir 23

En régime sinusoïdal :

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

Les nombres complexes permettent ainsi de transformer les dérivées et les intégrales en opérations algébriques simples.