
Chapitre 3

Modèle géométrique direct

3.1 Introduction

Contenu du cours

- Introduction
- Position et orientation – Transformations homogènes
- **Modèle géométrique direct**
- Modèle géométrique inverse
- Modélisation cinématique – Matrice jacobienne
- Introduction à la dynamique des robots manipulateurs
- Génération de mouvement

3.1 Introduction

- Lors de la conception et pour la commande, on a besoin de modèles :
 - **Modélisation géométrique** – relations entre les variables articulaires et la situation des différents corps du robot et celle de son organe terminal : passage de l'**espace articulaire** (espace des variables articulaires) à l'**espace opérationnel** (espace dans lequel est décrit la situation de l'organe terminal)
 - **Problème direct** : détermination de la situation de l'organe terminal
 - **Problème inverse** : détermination des variables articulaires
 - **Modélisation cinématique** – relation entre les **vitesse**s articulaires et les vitesses des différents corps du robot et la vitesse de son organe terminal
 - **Modélisation dynamique** – équations de mouvement du robot : relations entre les **couples et/ou forces** articulaires et les **positions, vitesses et accélérations** aux articulations et/ou des différents corps et de l'organe terminal du robot
- Dans **ce chapitre** : modélisation géométrique et problème direct (« **modèle géométrique direct** »).
- La modélisation géométrique nécessite la description de la position et de l'orientation des différents corps du robot : **transformations homogènes**.
- La géométrie d'un robot manipulateur peut être (relativement) complexe : besoin d'une méthode systématique d'assignation de repères aux différents corps du robot. Dans ce cours, on utilise une méthode similaire à la méthode classique dite de **Denavit-Hartenberg**.

3.1 Introduction

Rappels – Quelques définitions

- Le nombre de **degrés de liberté** (DDL) d'un robot manipulateur est le nombre de variables indépendantes nécessaires à la description complète de la situation de tous les corps du robot. Quand les articulations sont toutes actives et ont toutes 1 degré de liberté : **le nombre de DDL est égal au nombre d'articulations c'est-à-dire au nombre de variables articulaires.**
- **Espace articulaire** : espace des variables articulaires. Un « point » dans cet espace correspond à une et une seule **configuration du robot** (ce point donne la position et l'orientation de tous les corps du robot). La dimension de l'espace articulaire est égale au nombre de variables articulaires et donc au nombre de DDL du robot.
- **Espace opérationnel** : espace dans lequel la **situation de l'organe terminal** est représentée. Un corps solide ayant au maximum 6 DDL (3 pour la position et 3 pour l'orientation), la dimension de l'espace opérationnel est ≤ 6 . Typiquement, 3 des axes de l'espace opérationnel correspondent à la position du repère attaché à l'organe terminal (coordonnées cartésiennes du vecteur position de l'origine du repère) tandis que les 3 autres axes correspondent, par exemple, à 3 angles d'Euler décrivant l'orientation de l'organe terminal.

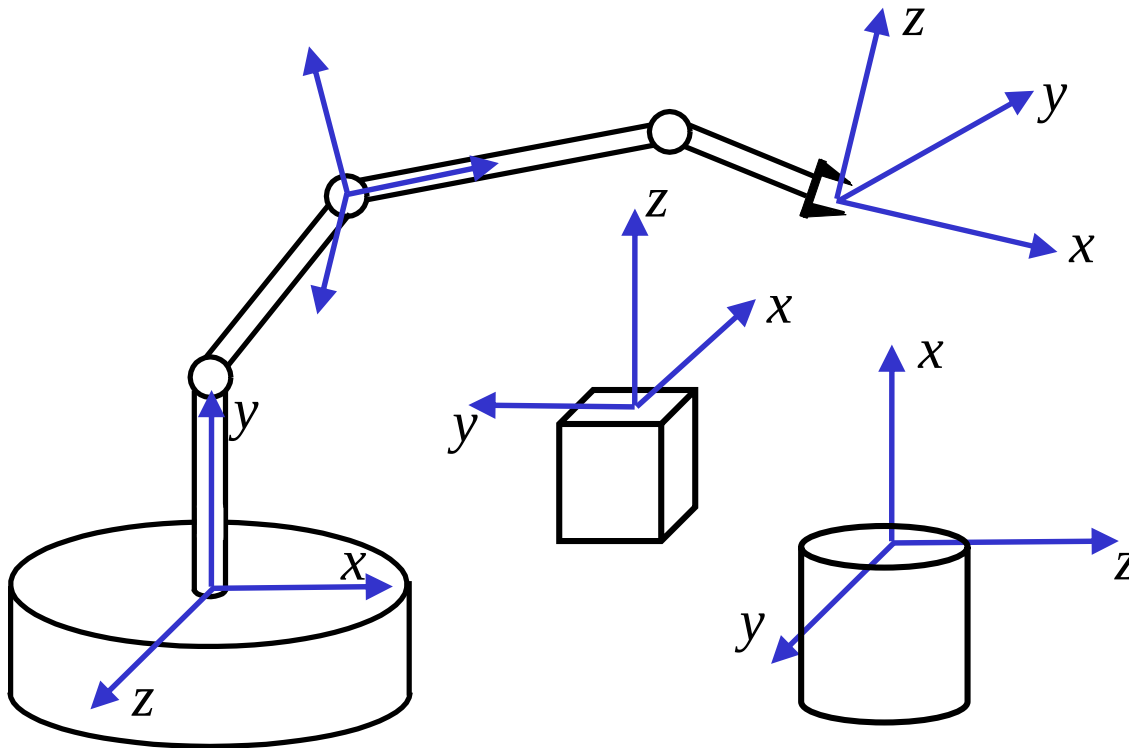
3.1 Introduction

Chapitre précédent : position et orientation

Description de la situation
d'un corps dans l'espace :
position et orientation

Utilisation de repères :
position et orientation
relatives et/ou absolues

Besoin de « passer »
d'un repère à un autre :
**transformations
homogènes**

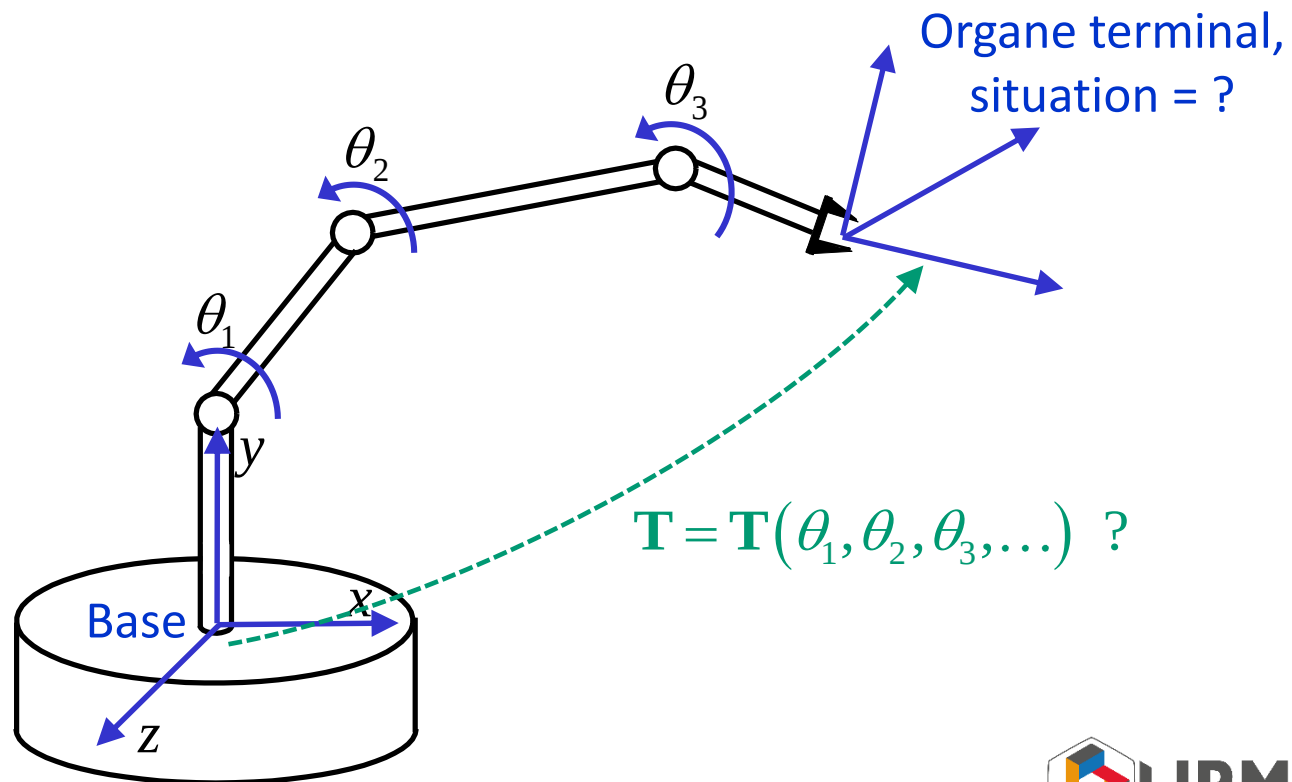


3.1 Introduction

Ce chapitre : problème (modèle) géométrique direct

Problème de la **détermination de la position et de l'orientation de l'organe terminal** **connaissant les valeurs des variables articulaires**

➡ Connaissant les variables articulaires, détermination de la matrice de transformation homogène $\mathbf{T}$ décrivant la position et l'orientation du repère attaché à l'organe terminal dans le repère attaché à la base du robot

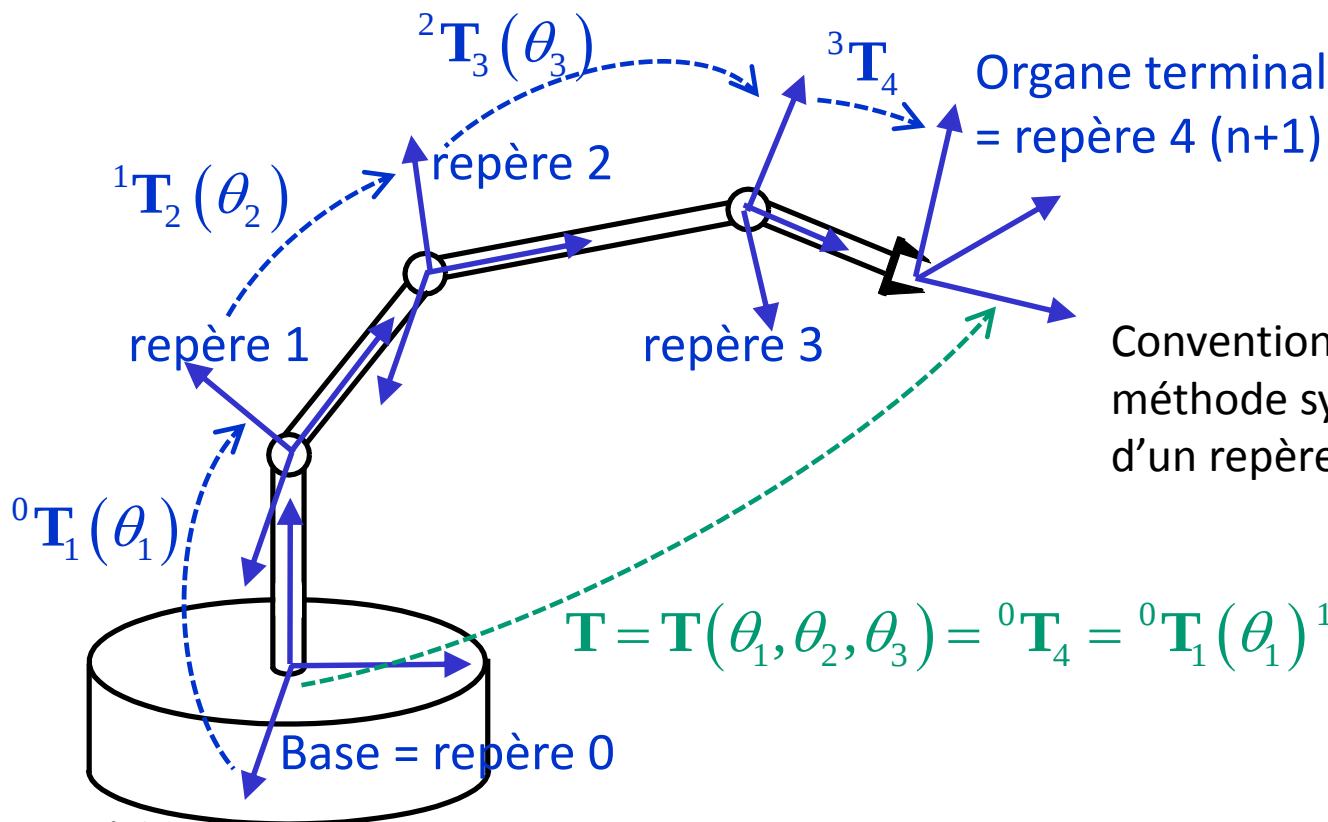


3.1 Introduction

Convention de Denavit-Hartenberg

Détermination de la matrice de transformation homogène $\mathbf{T}$ décrivant la situation de l'organe terminal dans le repère attaché à la base du robot à partir des matrices homogènes décrivant la situation de chaque corps du robot par rapport au corps précédent :

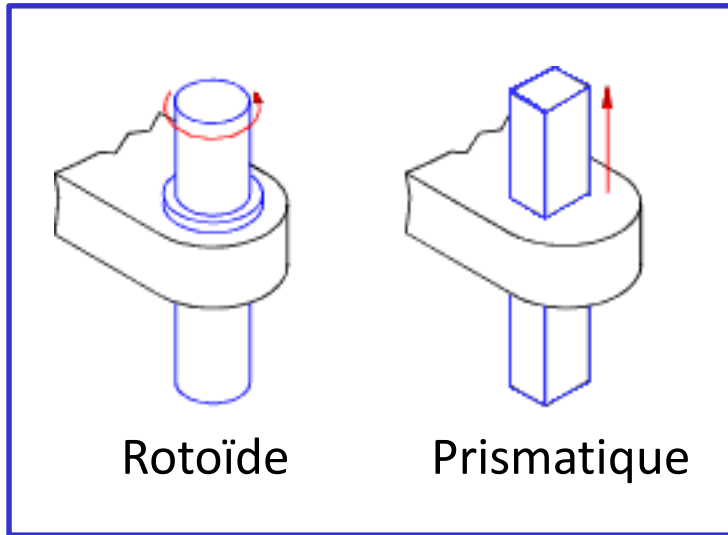
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots) = {}^0\mathbf{T}_1(\theta_1) \cdot {}^1\mathbf{T}_2(\theta_2) \cdot {}^2\mathbf{T}_3(\theta_3) \cdot \dots \cdot {}^{n-1}\mathbf{T}_n(\theta_n) \cdot {}^n\mathbf{T}_{n+1}$$



Convention de **Denavit-Hartenberg** :
méthode systématique d'attribution
d'un repère à chaque corps du robot

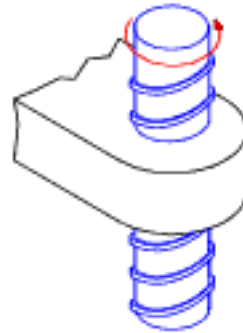
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = {}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_1(\theta_1) {}^1\mathbf{T}_2(\theta_2) {}^2\mathbf{T}_3(\theta_3) {}^3\mathbf{T}_4$$

3.1 Introduction

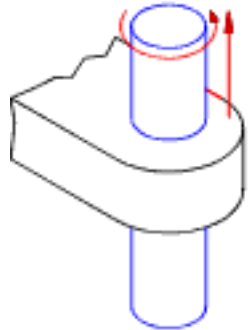


Rotoïde

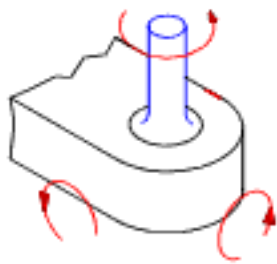
Prismatique



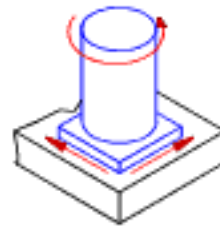
Hélicoïdale



Cylindrique



Sphérique



Appui plan

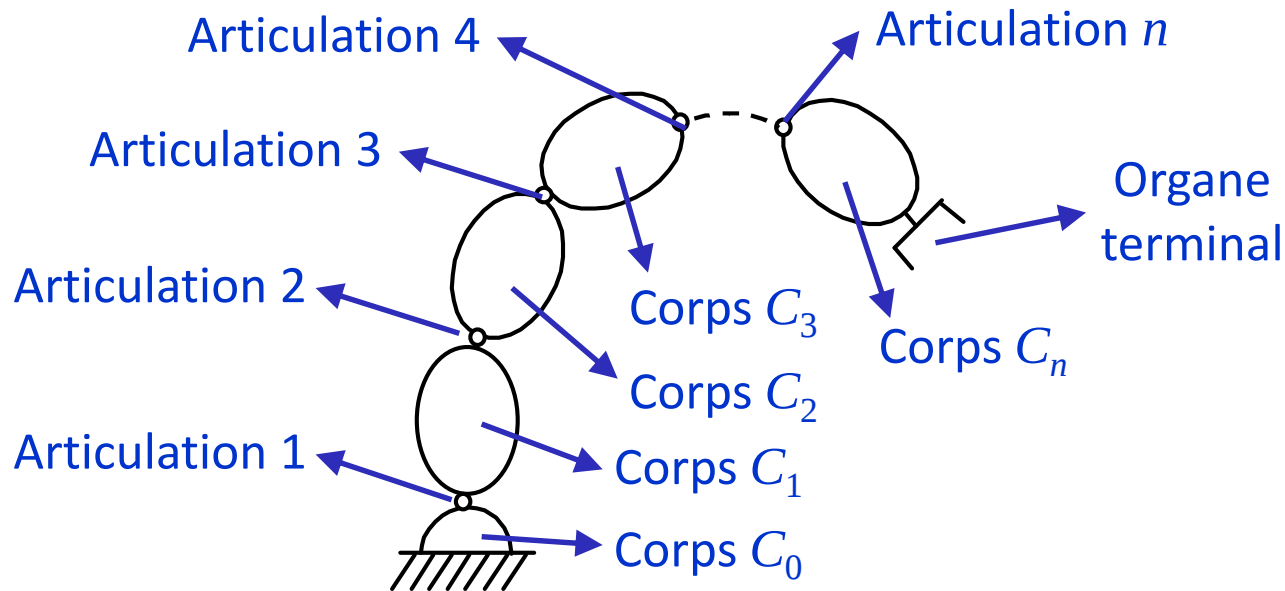
Pour des raisons pratiques de conception : l'articulation entre deux corps d'un robot manipulateur (chaîne cinématique ouverte) possède **1 degré de liberté** (DDL). Les articulations les plus répandues sont les **articulations rotoïdes**. Les **articulations prismatiques** sont aussi employées et, plus exceptionnellement, les articulations hélicoïdales.

Dans les cas (très rares pour les robots manipulateurs à chaîne cinématique ouverte) où une articulation possède n DDL ($n > 1$), elle peut être modélisée par n articulations à 1 DDL.

3.2 Géométrie d'une chaîne ouverte

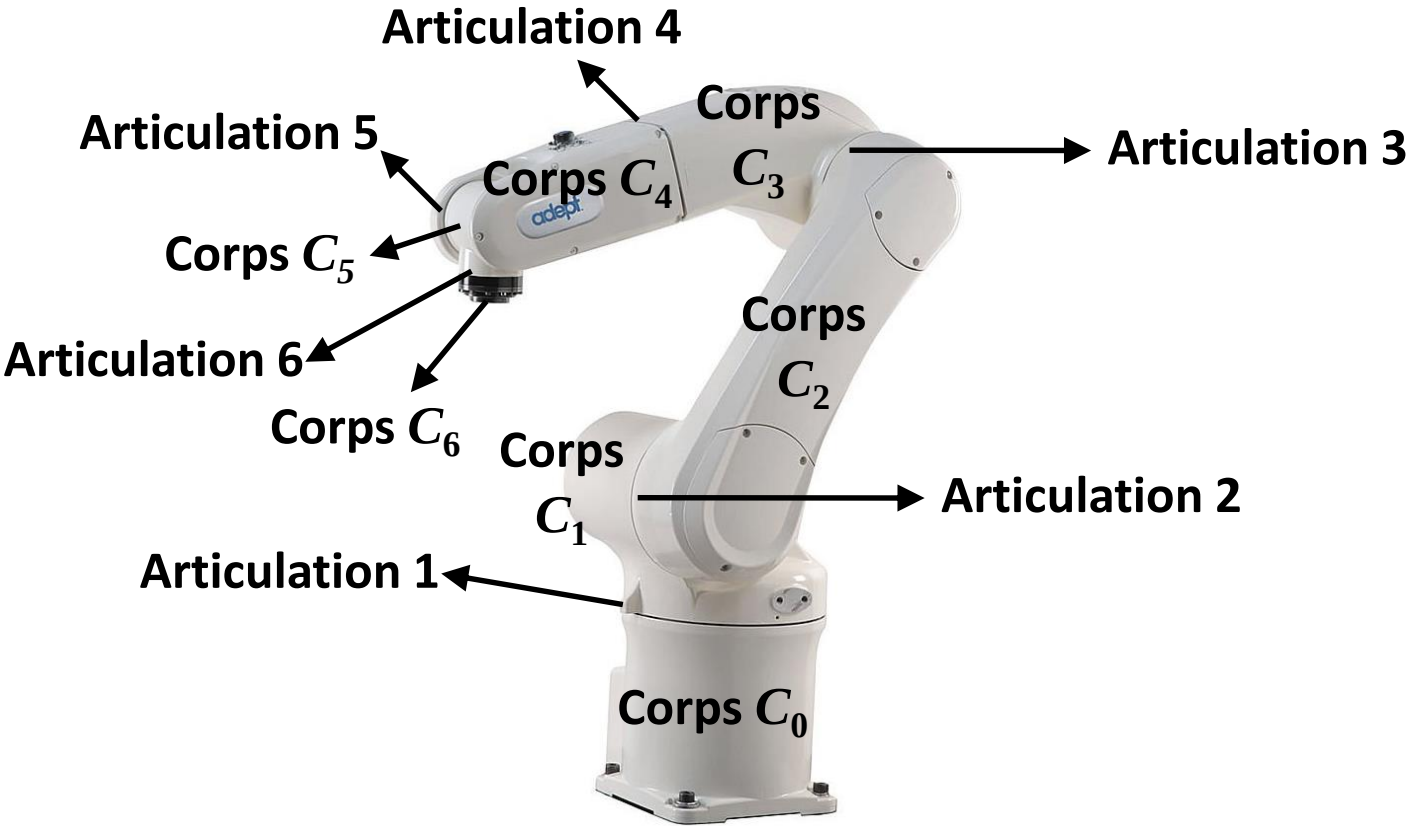
Numérotation des corps et des liaisons

- Les corps sont numérotés de 0 à n : C_0 à C_n
- C_0 = base du robot; C_n = dernier corps du robot (portant l'organe terminal)
- Les articulations sont numérotées de 1 à n
- L'articulation j connecte le corps C_{j-1} au corps C_j



3.2 Géométrie d'une chaîne ouverte

Numérotation des corps et des liaisons - exemple



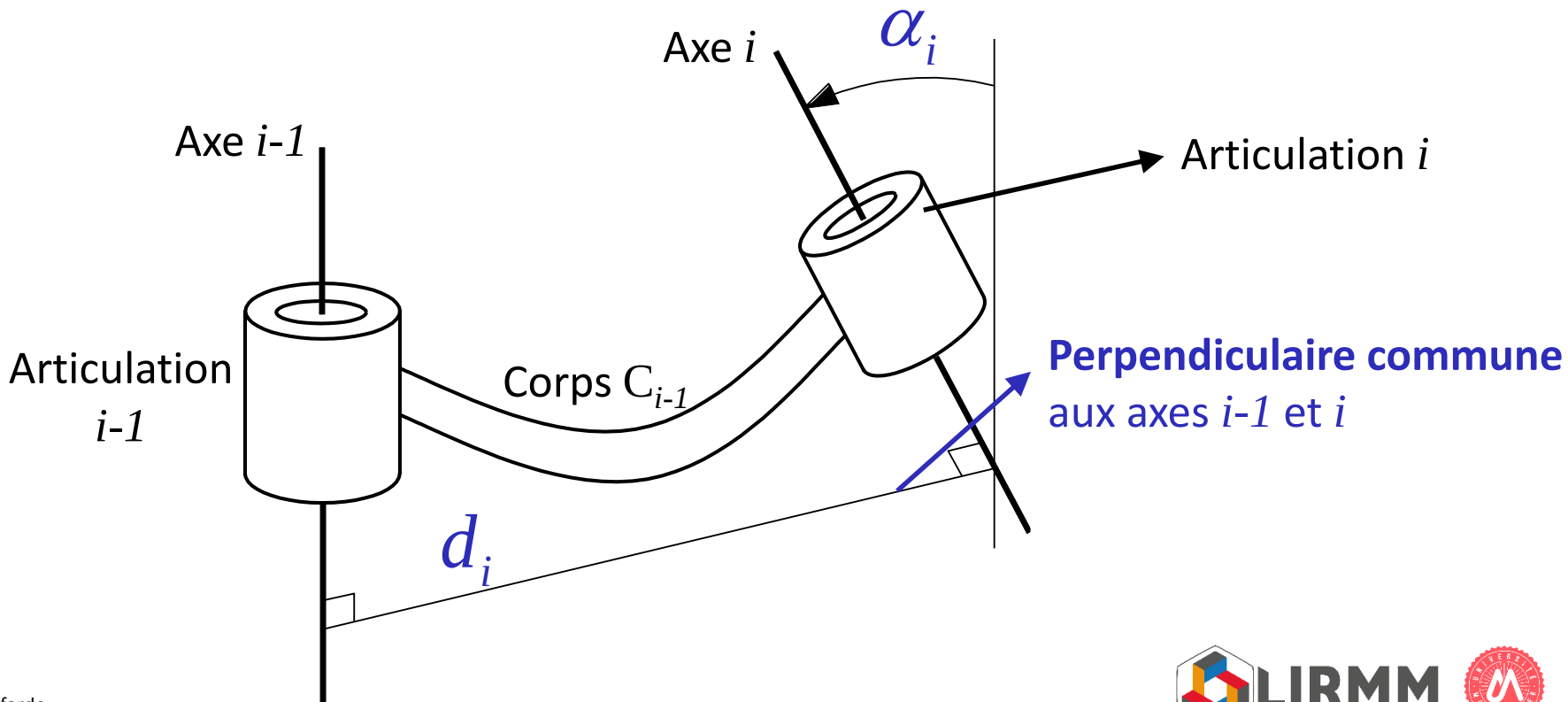
Robot Adept Viper
s850

3.2 Géométrie d'une chaîne ouverte

Description de la géométrie d'un corps

Pour les besoins de la modélisation géométrique : un corps d'une chaîne cinématique est vu comme un élément rigide qui définit la **position relative entre les axes de deux articulations consécutives** du robot

➡ Position relative de deux droites dans l'espace : deux paramètres sont nécessaires, **un angle et une distance**

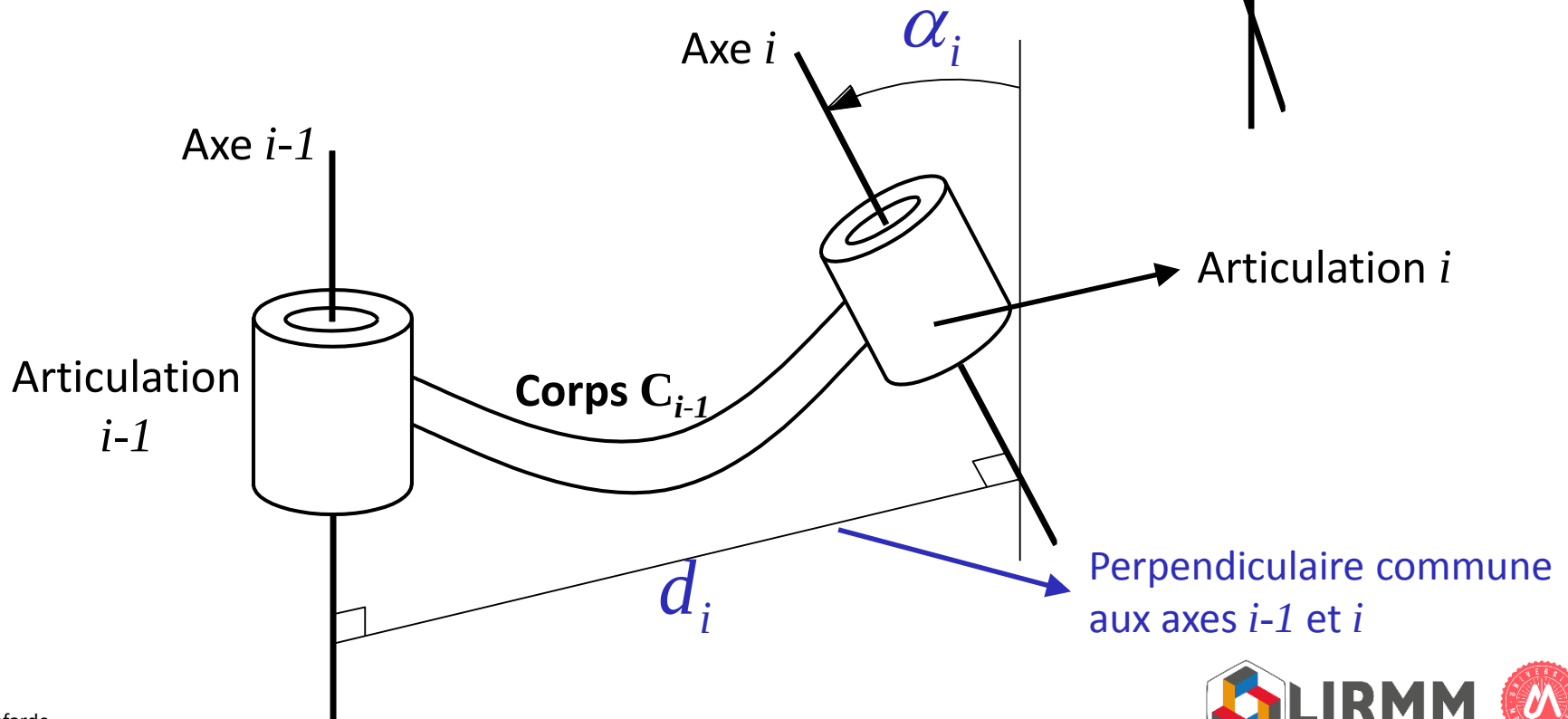
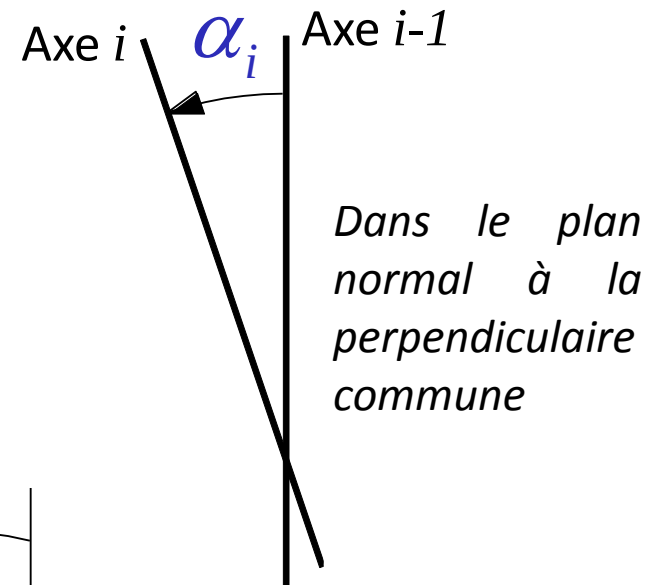


3.2 Géométrie d'une chaîne ouverte

Description de la géométrie d'un corps

d_i : distance entre les axes (droites) $i-1$ et i

α_i : angle entre les axes $i-1$ et i



3.3 Assignment de repères aux corps

Assignment d'un repère au corps i

Le repère R_i est attaché au corps C_i tel que :

- l'origine du repère R_i est le point d'intersection entre l'axe i et la perpendiculaire commune aux axes des articulations i et $i+1$. Cette perpendiculaire peut ne pas être unique. Dans ce cas, on en choisit une afin de *limiter le nombre de paramètres géométriques non nuls* (et/ou suivant des considérations de symétrie ou de simplicité).
- z_i est porté par l'axe de l'articulation i (le choix de son sens est libre).
- x_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes des articulations i et $i+1$ et dirigé de l'axe i vers l'axe $i+1$.

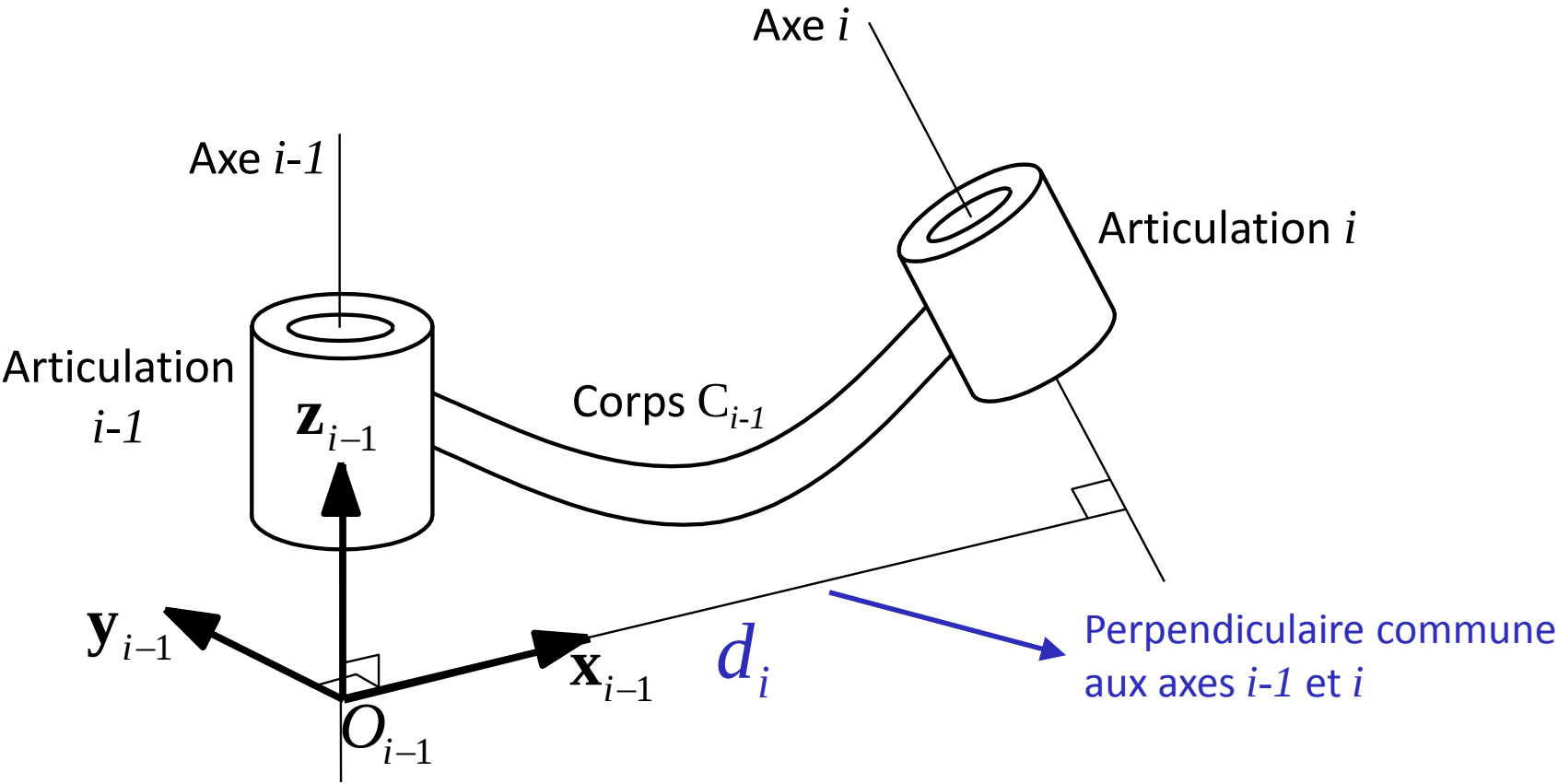
Cas particuliers (fréquents en pratique) :

- Axes i et $i+1$ coplanaires et non parallèles : le sens de x_i n'est pas défini; on peut le choisir afin de limiter le nombre de paramètres géométriques non nuls.
- Axes i et $i+1$ parallèles mais non confondus : il existe une infinité de perpendiculaires communes. On en choisit une telle que le nombre de paramètres géométriques nuls soit maximal.
- Axes i et $i+1$ confondus : x_i est choisi afin de limiter le nombre de paramètres géométriques non nuls.
- y_i est choisi de manière à obtenir une base (x_i, y_i, z_i) directe.

3.3 Assignment de repères aux corps

Figure - Assignment d'un repère au corps C_{i-1}

Le repère R_{i-1} est attaché au corps C_{i-1}

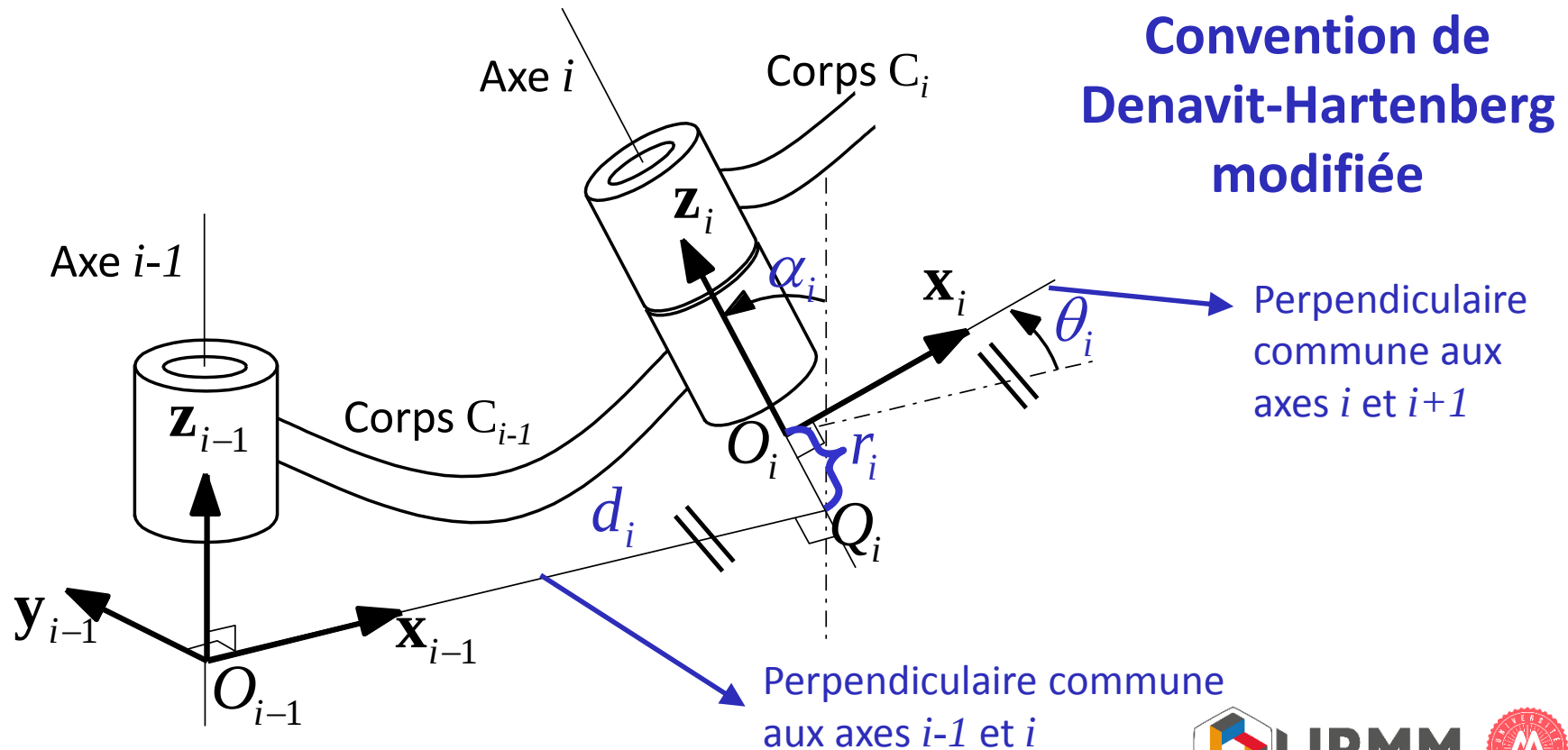


3.3 Assignment de repères aux corps

Connexion entre deux corps : passage d'un repère à un autre

- α_i : angle entre $\mathbf{z}_{i-1}$ et $\mathbf{z}_i$ correspondant à une rotation autour de $\mathbf{x}_{i-1}$
- d_i : distance entre $\mathbf{z}_{i-1}$ et $\mathbf{z}_i$ le long de $\mathbf{x}_{i-1}$ (distance entre O_{i-1} et Q_i)
- r_i : distance signée entre $\mathbf{x}_{i-1}$ et $\mathbf{x}_i$ le long de $\mathbf{z}_i$ (distance entre Q_i et O_i)
- θ_i : angle entre $\mathbf{x}_{i-1}$ et $\mathbf{x}_i$ correspondant à une rotation autour de $\mathbf{z}_i$

Note : $d_i > 0$ tandis que α_i , r_i et θ_i peuvent être négatifs



Convention de Denavit-Hartenberg modifiée

3.3 Assignment de repères aux corps

Variables articulaires et paramètres géométriques

Paramètres de la convention de Denavit-Hartenberg : α_i , d_i , r_i et θ_i

Variables articulaires : les variables articulaires sont notées q_i

- **Articulation rotoïde** : la variable articulaire est θ_i ($q_i \equiv \theta_i$).
- **Articulation prismatique** : la variable articulaire est r_i ($q_i \equiv r_i$).

Paramètres géométriques : ils sont constants (c'est-à-dire indépendants de la configuration du robot)

- Articulation rotoïde : les paramètres géométriques sont α_i , d_i et r_i
- Articulation prismatique : les paramètres géométriques sont α_i , d_i et θ_i

Note :

- α_i et d_i : paramètres géométriques du corps $i-1$
- r_i et θ_i : paramètre géométrique et variable articulaire définissant la connexion (articulation) entre les 2 corps consécutifs C_{i-1} et C_i

3.3 Assignment de repères aux corps

Repère de base et dernier corps

- **Repère R_0 attaché à la base du robot** (corps C_0)

- ✓ Ce repère est fixe et servira donc souvent de repère de référence
- ✓ Les règles énoncées précédemment ne contraignent ni la position ni l'orientation de R_0 . Nous le choisisons confondu avec le repère R_1 quand la première variable articulaire est nulle. Ce choix permet d'obtenir des paramètres géométriques α_1 , d_1 et r_1 nuls dans le cas d'une articulation rotoïde (α_1 , d_1 et θ_1 nuls dans le cas d'une articulation prismatique).

- **Repère R_n attaché au dernier corps du robot** (corps C_n)

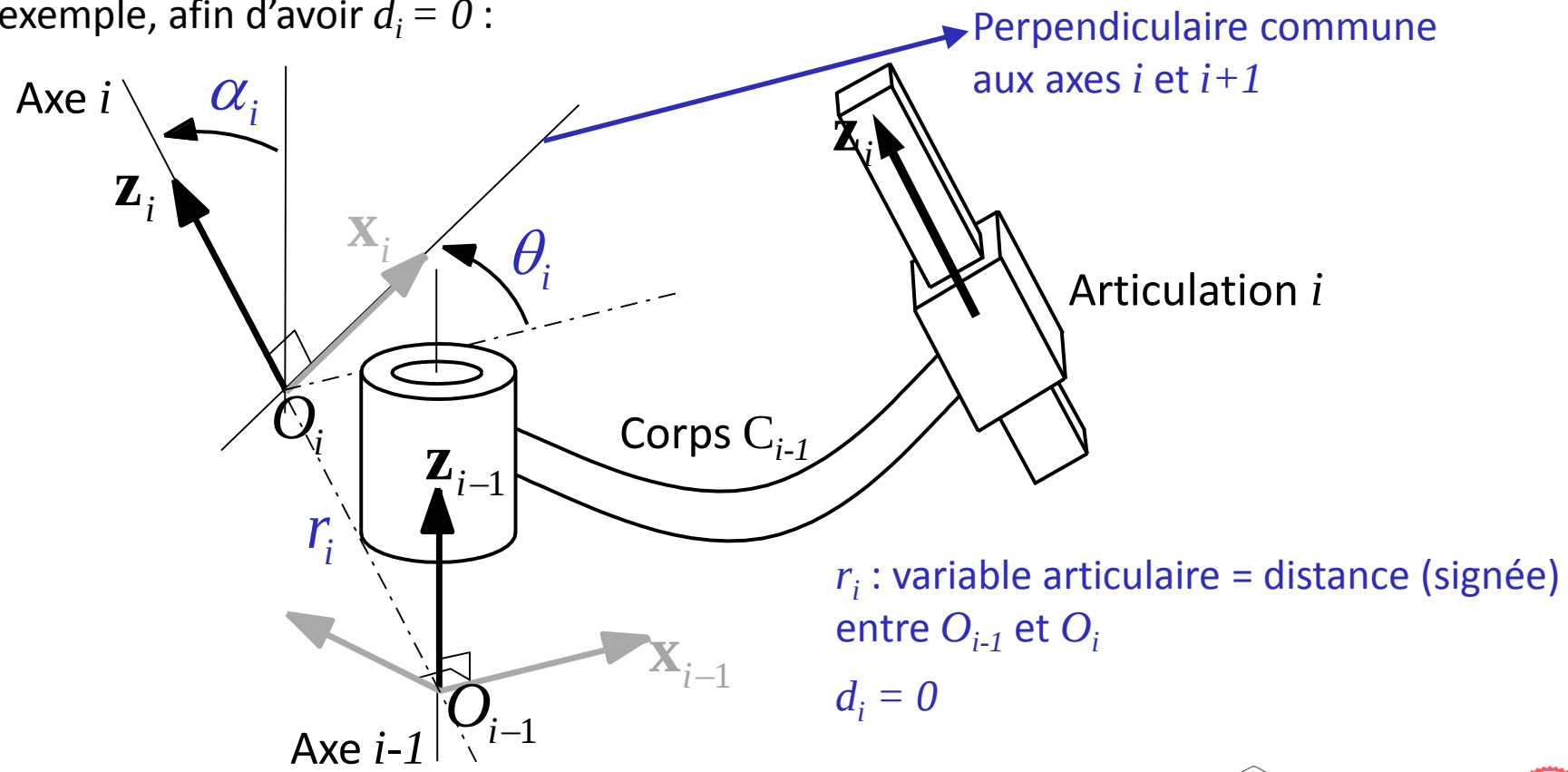
- ✓ **Articulation rotoïde** : le vecteur $\mathbf{x}_n$ est choisi confondu avec $\mathbf{x}_{n-1}$ quand $q_n = \theta_n = 0$. L'origine du repère R_n est choisie de manière à avoir $r_n = 0$ (c'est-à-dire au point d'intersection Q_n entre l'axe n et la perpendiculaire commune aux axes $n-1$ et n).
- ✓ **Articulation prismatique** : le vecteur $\mathbf{x}_n$ est choisi tel que $\theta_n = 0$ (c'est-à-dire colinéaire à $\mathbf{x}_{n-1}$). L'origine du repère R_n est choisie à l'intersection Q_n entre l'axe n et la perpendiculaire commune aux axes $n-1$ et n quand $q_n = r_n = 0$.

3.3 Assignment of frames to bodies

Remarque – Articulation prismatique

Pour une articulation prismatique : le vecteur $\mathbf{z}_i$ donne la direction de la translation autorisée par l'articulation mais sa position dans l'espace peut être quelconque (la position de l'origine du repère R_i est libre). On le place de telle sorte que d_i ou d_{i+1} soit nul.

Par exemple, afin d'avoir $d_i = 0$:



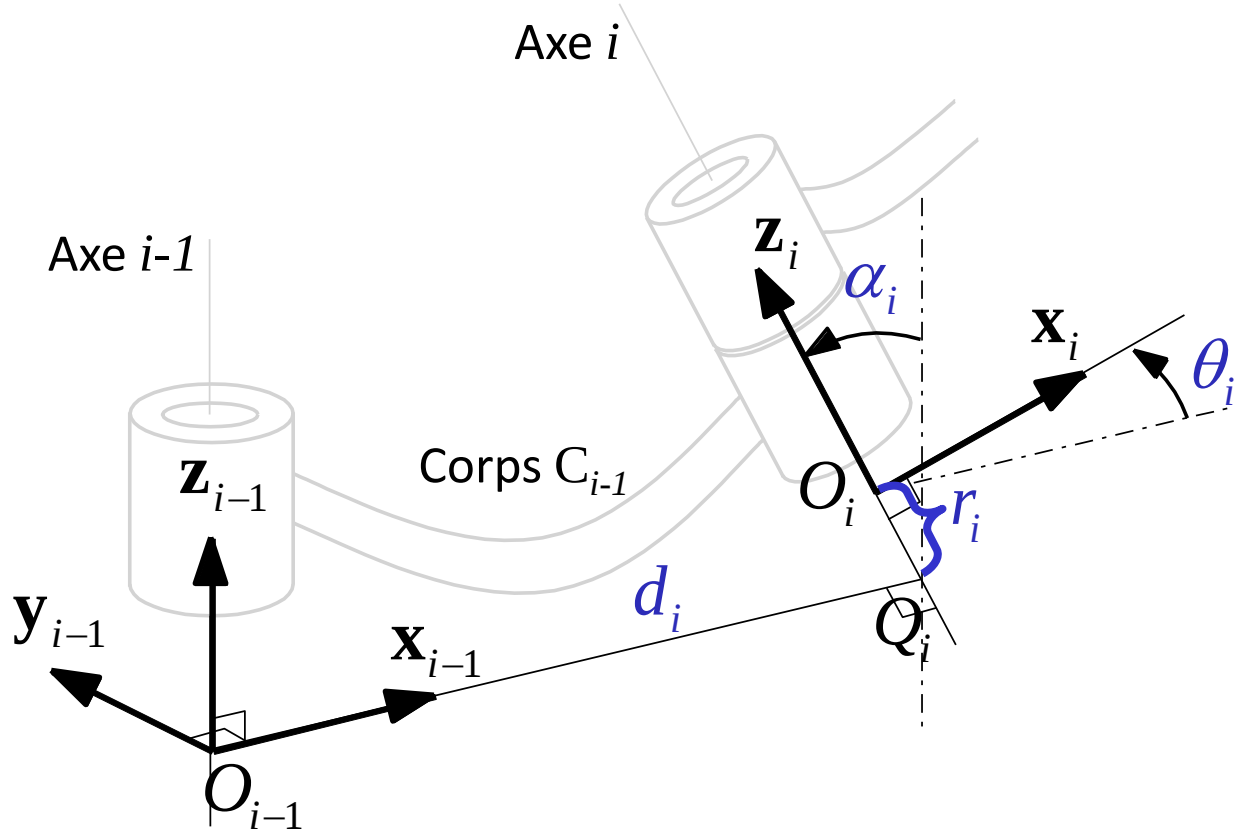
3.4 Résumé de la convention de Denavit-Hartenberg

En présence d'un nouveau robot, suivre la procédure suivante :

1. Numérotez les corps de 0 à n , le corps 0 étant la base fixe du robot, et numérotez les articulations de 1 à n .
2. Identifiez les axes des différentes articulations et imaginez (ou tracer) des droites suivant ces axes. L'axe d'une articulation prismatique n'étant pas intrinsèquement défini, on le choisira tel que décrit dans le transparent précédent. Dans les **étapes 3 à 6 ci-dessous**, parmi ces axes, nous **considérons deux axes voisins i et $i+1$** .
3. Identifiez la perpendiculaire commune entre les deux axes i et $i+1$ ou leur point d'intersection. Au point d'intersection ou au point où la perpendiculaire commune coupe l'axe i , placez l'origine O_i du repère R_i .
4. Placez le vecteur z_i en O_i et dirigez le suivant l'axe de l'articulation i .
5. Placer le vecteur x_i en O_i et dirigez le long de la perpendiculaire commune aux axes i et $i+1$ dirigé de l'axe i vers l'axe $i+1$ ou, si les deux axes se coupent, dirigez x_i perpendiculairement au plan formé par les deux axes.
6. Choisir y_i de façon à obtenir une base directe.
7. Choisir le repère R_0 de telle sorte que R_0 et R_1 soient confondus quand la première variable articulaire est nulle. Par ailleurs, l'origine du repère R_n (repère lié au dernier corps) et son vecteur x_n peuvent être choisis librement. Choisissez les afin de limiter le nombre de paramètres géométriques non nuls (voir transparent 17).

3.5 Matrice de transformation homogène

Matrice de transformation du repère $i-1$ au repère i

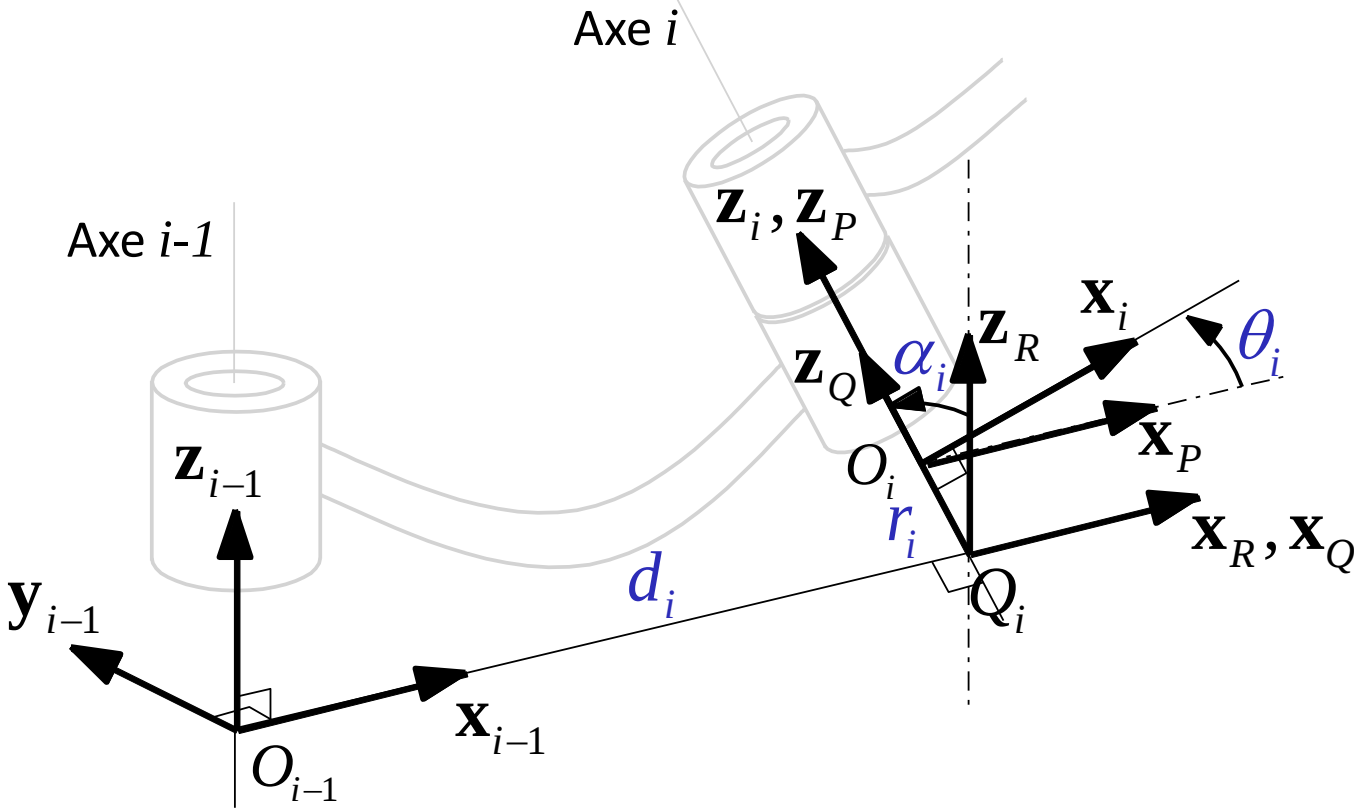


Matrice de transformation homogène donnant la situation du repère i (corps C_i) par rapport au repère $i-1$ (corps C_{i-1}) :

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{Trans}(\mathbf{x}, d_i) \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_i) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i)$$

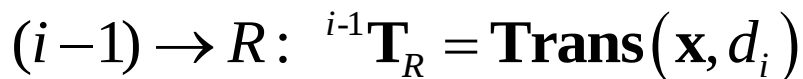
3.5 Matrice de transformation homogène

Décomposition de la matrice de transformation



Trois repères intermédiaires : $R: (Q_i, \mathbf{x}_R, \mathbf{y}_R, \mathbf{z}_R), \mathbf{x}_R \equiv \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_R \equiv \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_R \equiv \mathbf{z}_{i-1}$
 $Q: (Q_i, \mathbf{x}_Q, \mathbf{y}_Q, \mathbf{z}_Q), \mathbf{x}_Q \equiv \mathbf{x}_R$
 $P: (O_i, \mathbf{x}_P, \mathbf{y}_P, \mathbf{z}_P), \mathbf{x}_P \equiv \mathbf{x}_Q, \mathbf{y}_P \equiv \mathbf{y}_Q, \mathbf{z}_P \equiv \mathbf{z}_Q$

Décomposition de la matrice de transformation



$$Q \rightarrow P: {}^Q\mathbf{T}_P = \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_i)$$

$$P \rightarrow i: {}^P\mathbf{T}_i = \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i)$$

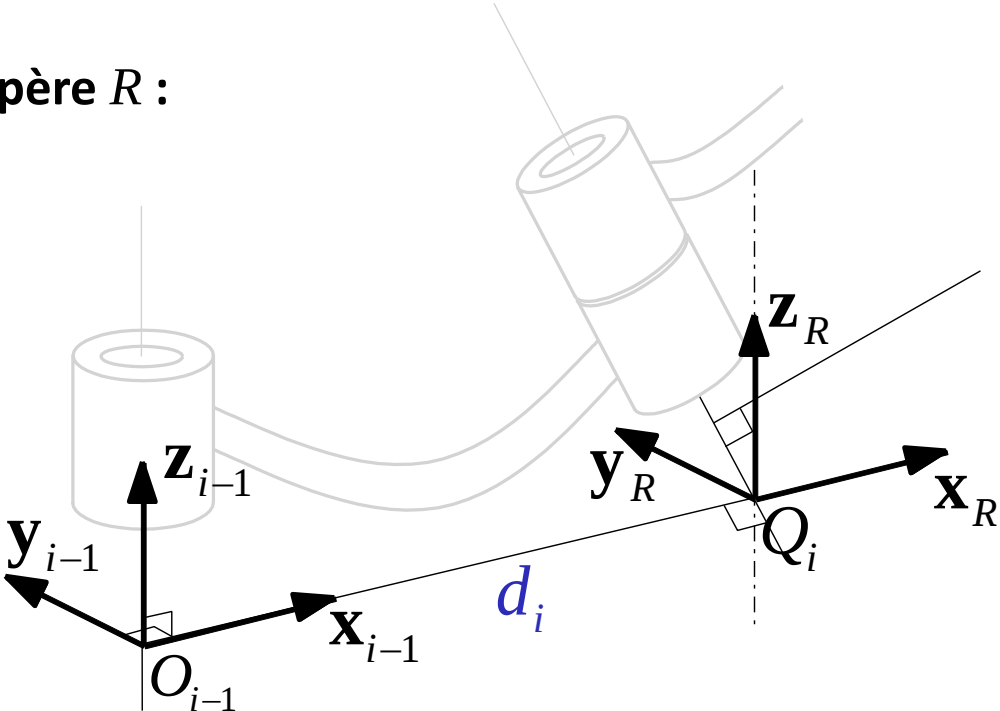
3.5 Matrice de transformation homogène

Décomposition de la matrice de transformation

Transformation du repère $i-1$ au repère R :

$$R: (Q_i, \mathbf{x}_R, \mathbf{y}_R, \mathbf{z}_R)$$

$$\mathbf{x}_R \equiv \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_R \equiv \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_R \equiv \mathbf{z}_{i-1}$$



$${}^{i-1}\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_R & {}^{i-1}\mathbf{p}_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(\mathbf{x}, d_i)$$

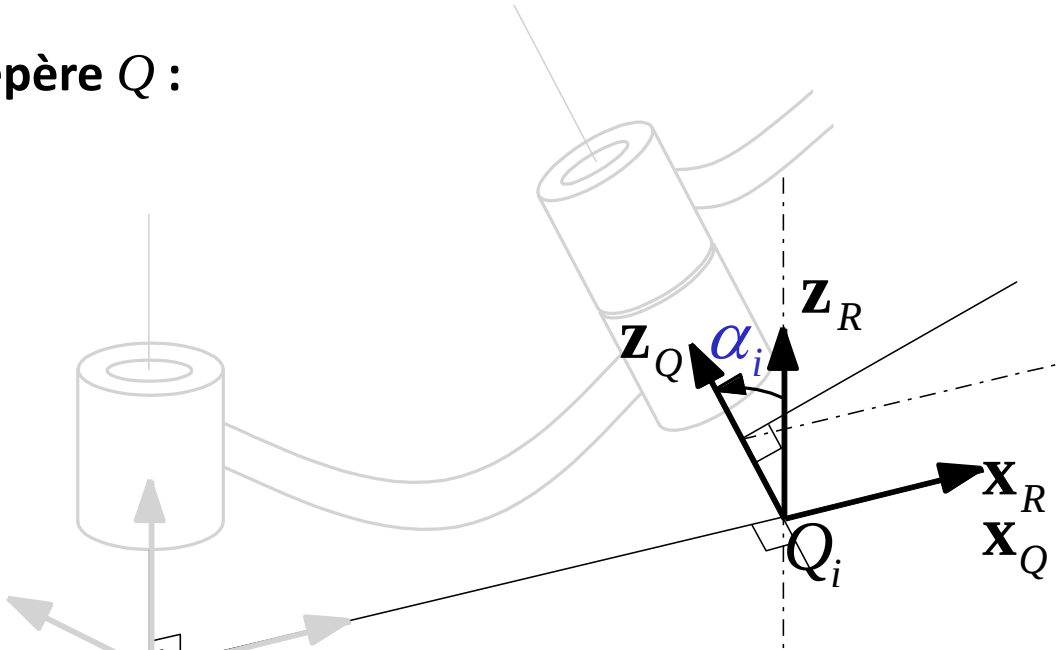
3.5 Matrice de transformation homogène

Décomposition de la matrice de transformation

Transformation du repère R au repère Q :

$$Q: (Q_i, \mathbf{x}_Q, \mathbf{y}_Q, \mathbf{z}_Q)$$

$$\mathbf{x}_Q \equiv \mathbf{x}_R$$



Attention : sur cette figure, α_i est négatif !

$${}^R\mathbf{T}_Q = \begin{bmatrix} {}^R\mathbf{R}_Q & {}^R\mathbf{p}_Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i)$$

3.5 Matrice de transformation homogène

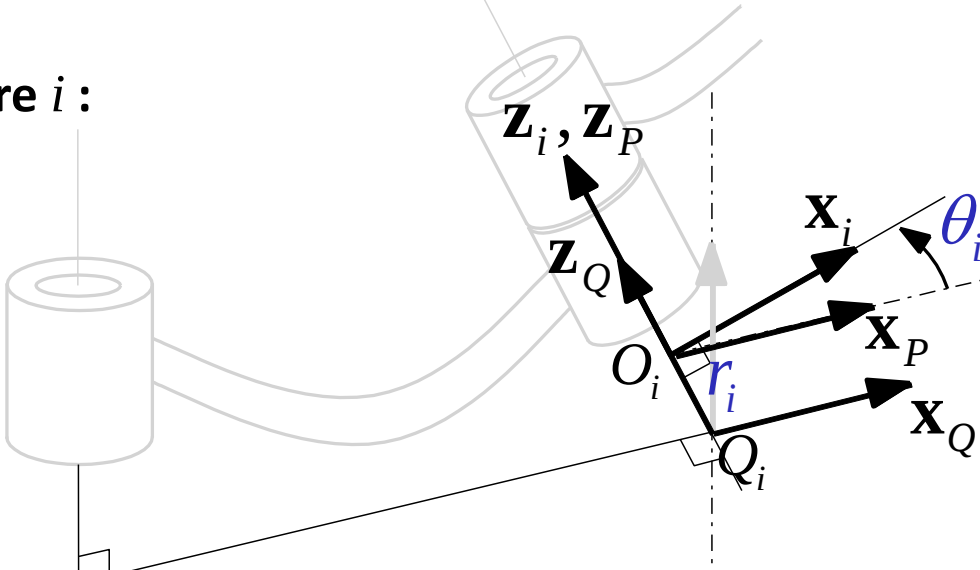
Décomposition de la matrice de transformation

Transformation du repère Q au repère i :

$$P: (O_i, \mathbf{x}_P, \mathbf{y}_P, \mathbf{z}_P)$$

$$\mathbf{x}_P \equiv \mathbf{x}_Q, \mathbf{y}_P \equiv \mathbf{y}_Q, \mathbf{z}_P \equiv \mathbf{z}_Q$$

$$\mathbf{z}_i \equiv \mathbf{z}_P$$



$${}^Q\mathbf{T}_i = {}^Q\mathbf{T}_P {}^P\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^Q\mathbf{T}_i = \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_i) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_i)$$

3.5 Matrice de transformation homogène

Expression de la matrice de transformation du repère $i-1$ au repère i

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = {}^{i-1}\mathbf{T}_R {}^R\mathbf{T}_Q {}^Q\mathbf{T}_P {}^P\mathbf{T}_i = \mathbf{Trans}(\mathbf{x}, d_i) \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_i) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i)$$

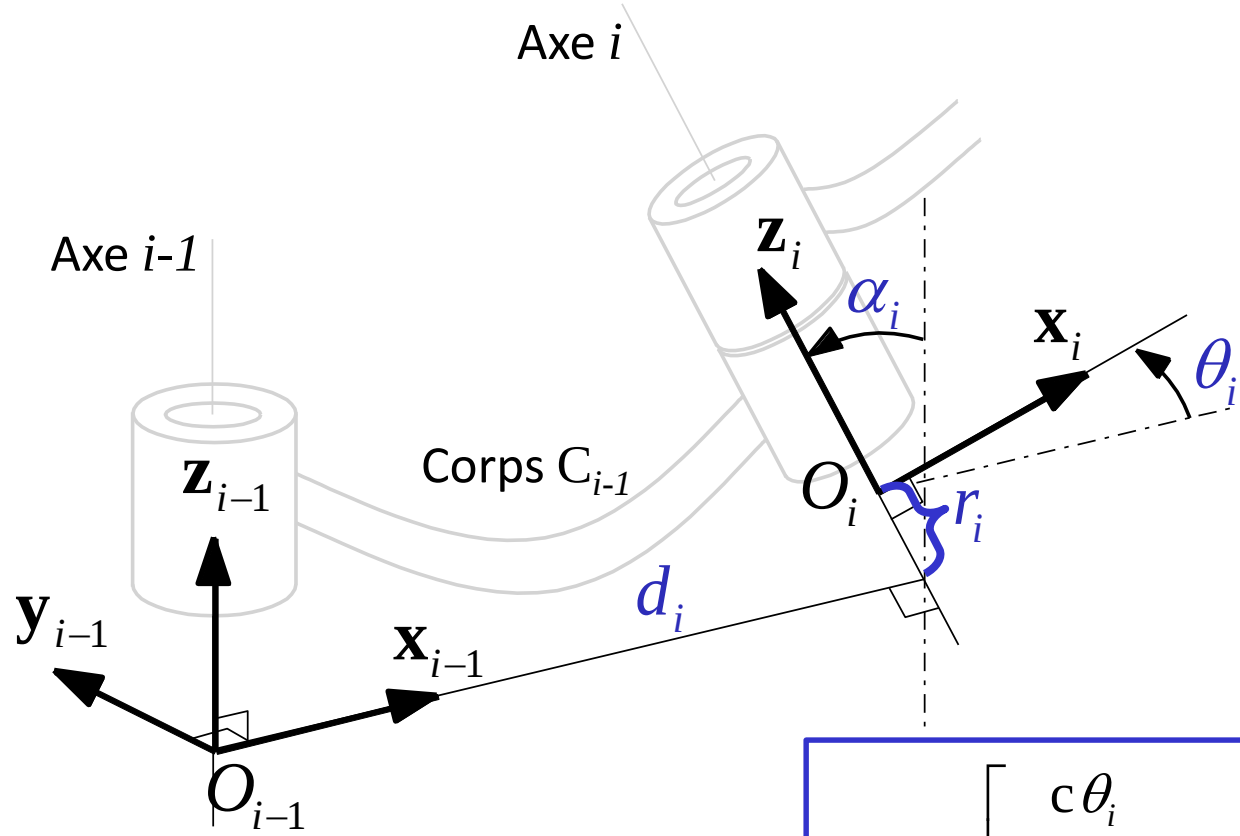
$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & d_i \\ c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

3.5 Matrice de transformation homogène

Résumé – Passage du repère $i-1$ au repère i :



$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & d_i \\ c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6 Modèle géométrique direct

Détermination de la matrice de transformation homogène ${}^0\mathbf{T}_n$ décrivant la **situation du dernier corps C_n d'un robot à n DDL dans le repère R_0** (base du robot) à partir des matrices homogènes décrivant la situation de chaque corps du robot par rapport au corps précédent :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) {}^1\mathbf{T}_2(q_2) {}^2\mathbf{T}_3(q_3) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n)$$

q_i est la variable articulaire de l'articulation i :

articulation **rotoïde** : $q_i = \theta_i$

articulation **prismatique** : $q_i = r_i$

A l'aide de la convention de Denavit-Hartenberg, on détermine les expressions des différentes matrices homogènes ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$. On déduit alors directement de la relation ci-dessus l'expressions de la matrice homogène ${}^0\mathbf{T}_n$.

Si la situation de l'organe terminal (outil) du robot est donnée par la transformation homogène ${}^n\mathbf{T}_{ot}$, sa situation par rapport au repère fixe R_0 est donnée par la transformation homogène $\mathbf{T}$ telle que :

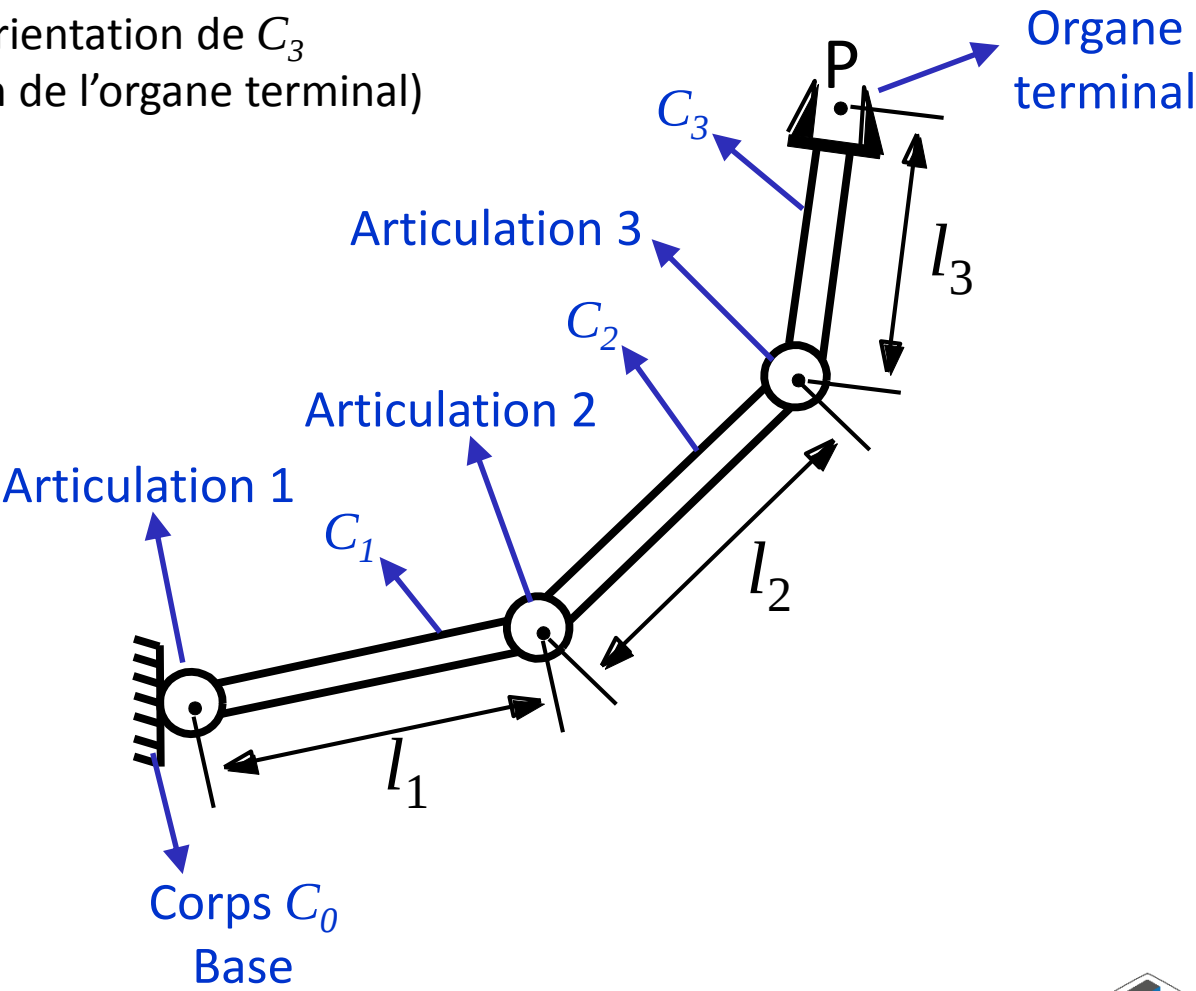
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) {}^n\mathbf{T}_{ot}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$$

3.7 Exemples

Robot plan 3R (3 DDL)

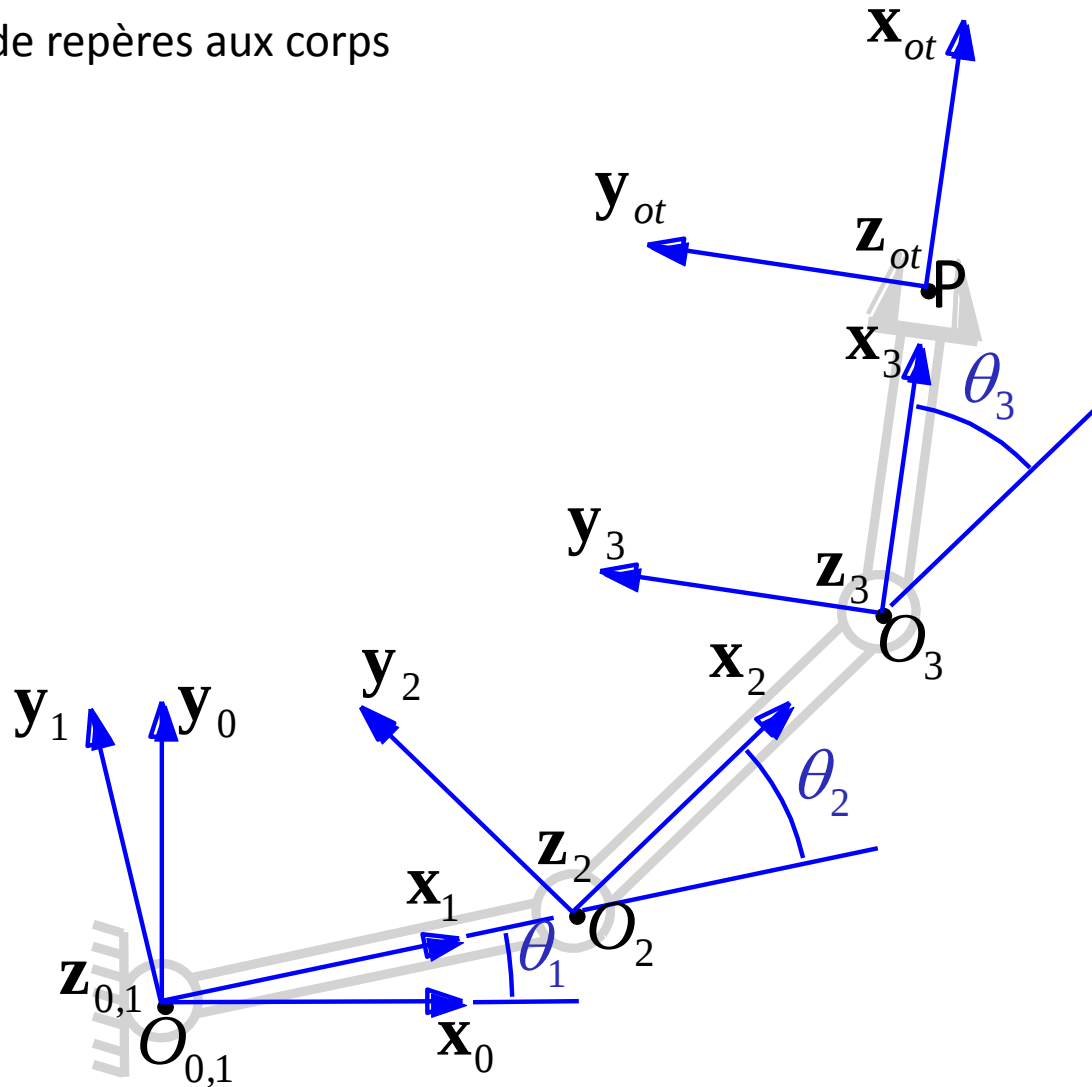
- 2 DDL pour la position du point P
- 1 DDL pour l'orientation de C_3
(= orientation de l'organe terminal)



3.7 Exemples

Robot plan 3R

Assignment de repères aux corps

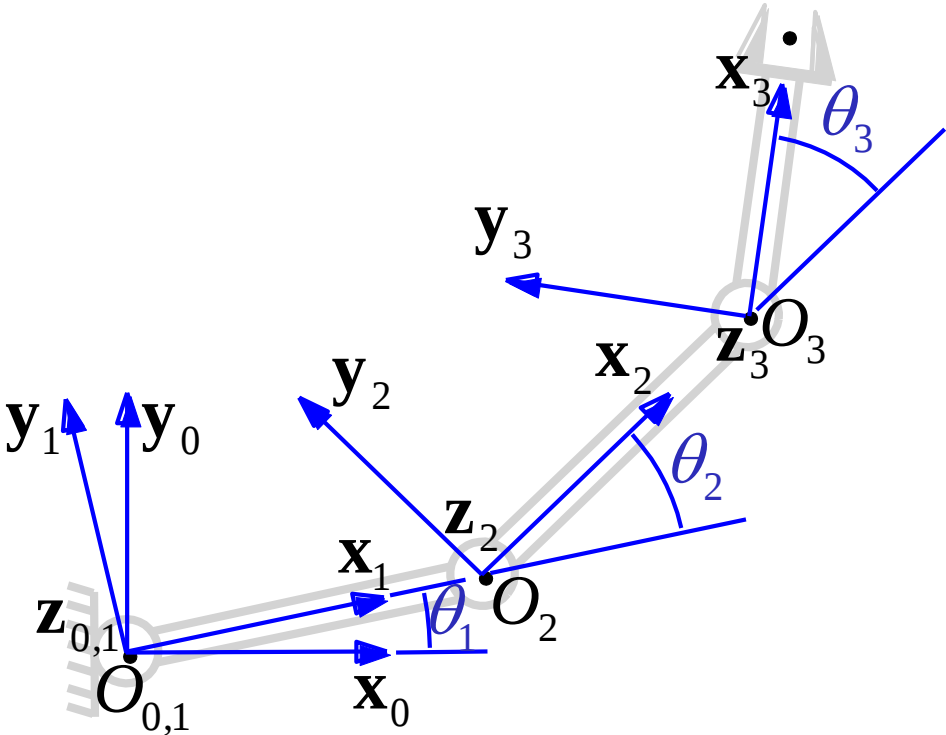


3.7 Exemples

Robot plan 3R

Tableau des paramètres de Denavit-Hartenberg (D-H)

i	α_i	d_i	r_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3



3.7 Exemples

Robot plan 3R

Matrices de transformation homogène

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & d_i \\ c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tableau des paramètres de D-H

i	α_i	d_i	r_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.7 Exemples

Robot plan 3R

Situation du corps 3 dans le repère fixe R_0 attaché à la base du robot

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$${}^0\mathbf{T}_3 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

3.7 Exemples

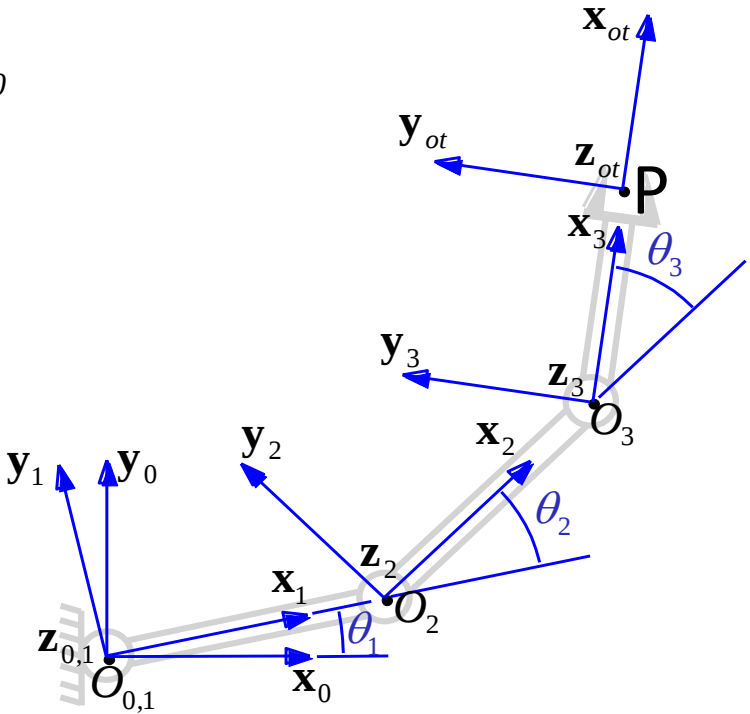
Robot plan 3R

Situation de l'organe terminal dans le repère fixe R_0

$${}^3T_{ot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

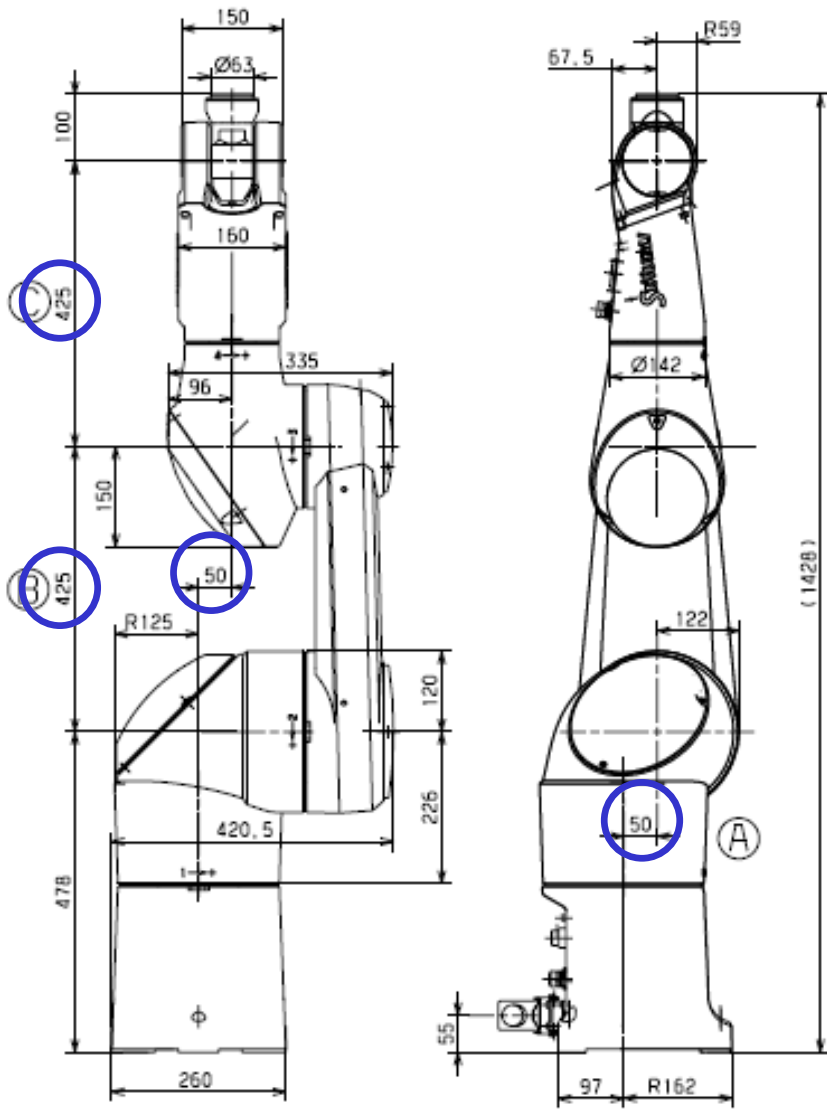
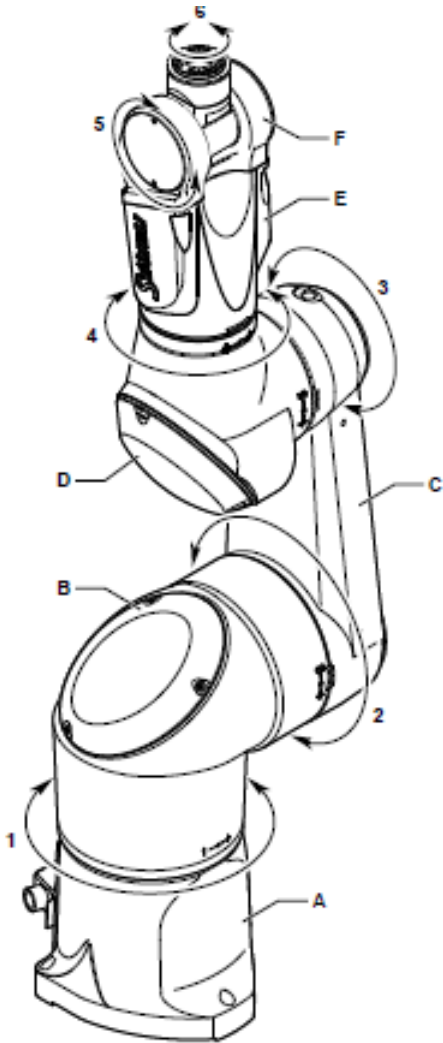
$${}^0T_{ot} = {}^0T_3 {}^3T_{ot} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3.7 Exemples

Robot Stäubli TX90 – 6 DDL

Robot possédant 6 articulations rotoïdes



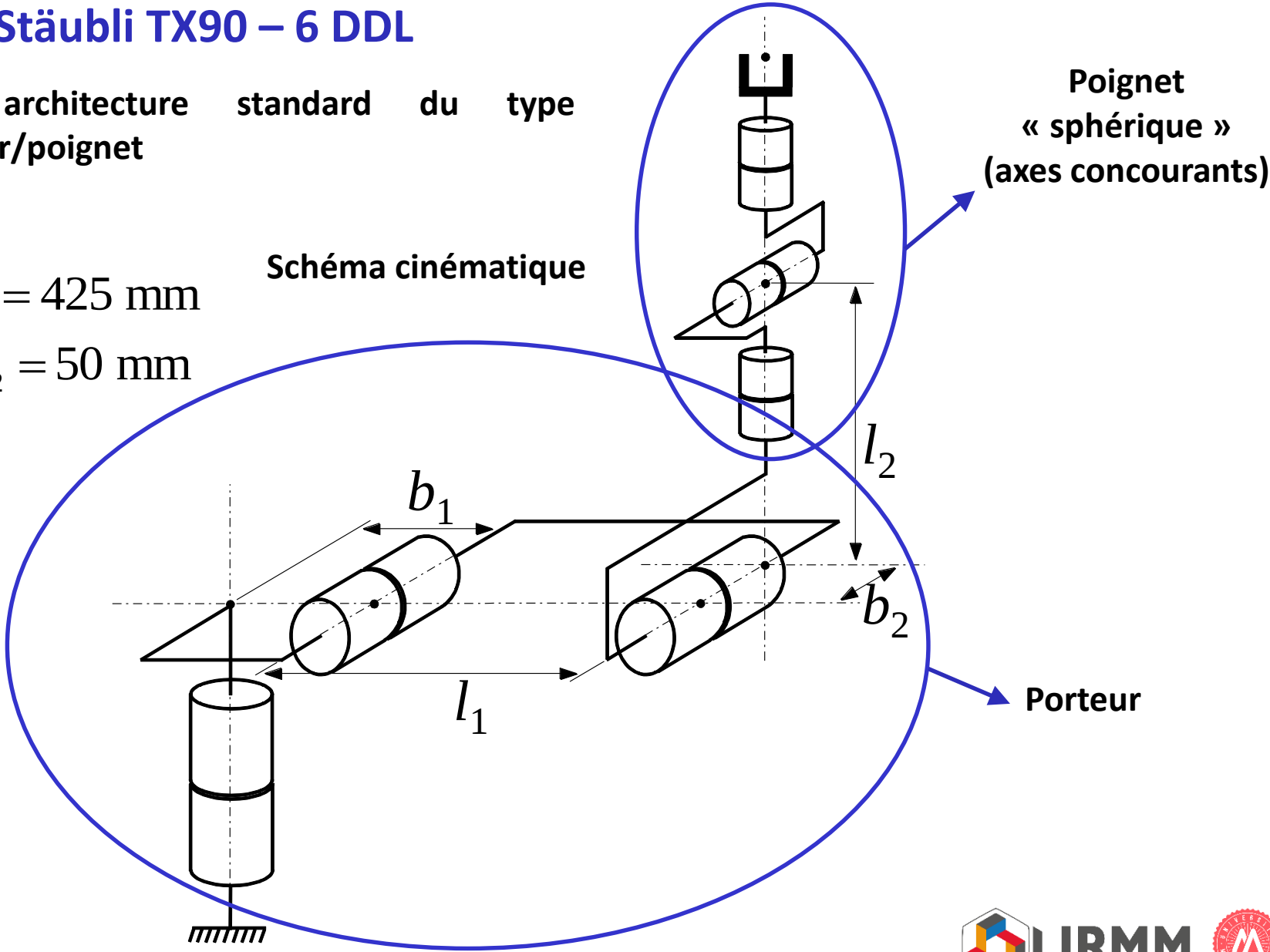
3.7 Exemples

Robot Stäubli TX90 – 6 DDL

Une architecture standard du type porteur/poignet

$l_1 = l_2 = 425 \text{ mm}$
 $b_1 = b_2 = 50 \text{ mm}$

Schéma cinématique

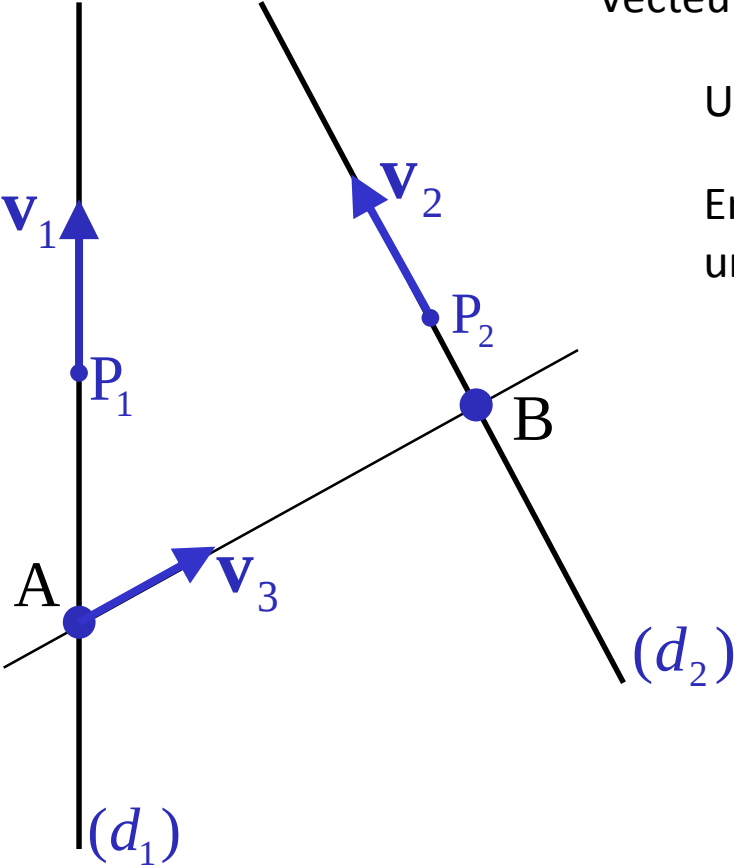


Suite et fin seront données après le TD

Annexe

Perpendiculaire commune

Deux droites (d_1) et (d_2) ni parallèles (ni confondues) : les vecteurs directeurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de ces deux droites sont linéairement indépendants



Vecteur orthogonal à $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$: $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$

Un point A de (d_1) : $\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 + \alpha_1 \mathbf{v}_1$

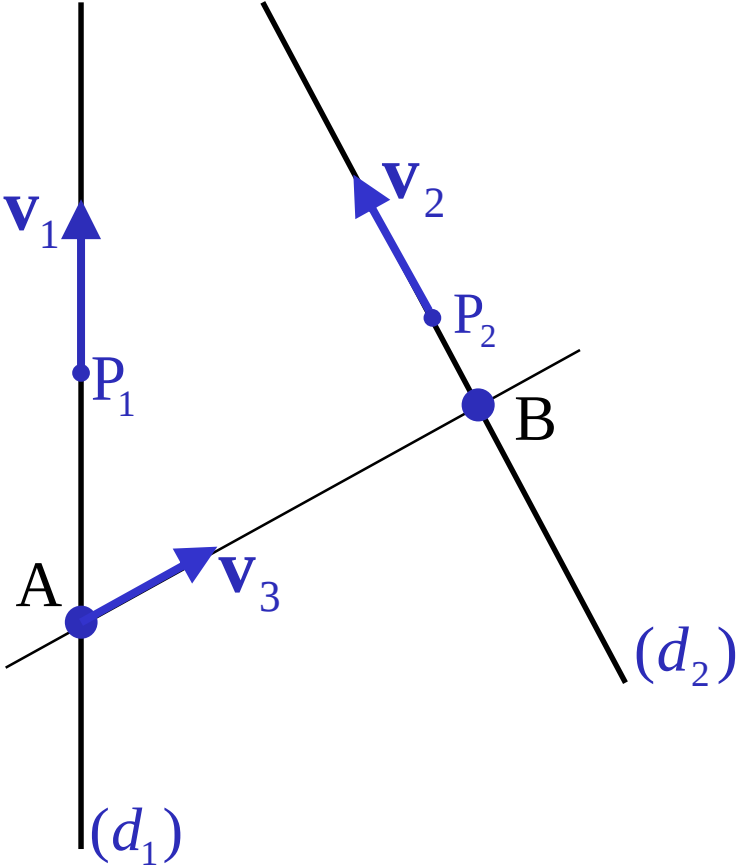
En partant de A suivant $\mathbf{v}_3$, on veut arriver à un point B de (d_2) :

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{p}_2 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

Perpendiculaire commune



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice inversible}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

Matrice inversible tant que (d_1) et (d_2) ne sont ni parallèles ni confondues; système linéaire possédant une solution unique :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$$

La perpendiculaire commune à (d_1) et (d_2) est la droite passant par A et par B avec :

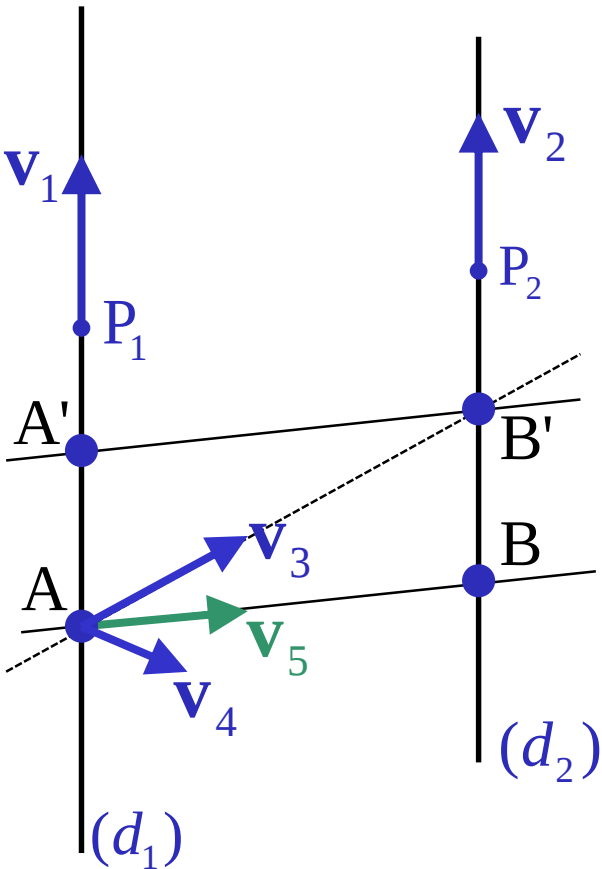
$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 + \alpha_1 \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{p}_2 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$$

$$\text{Distance entre } (d_1) \text{ et } (d_2) = \left| \alpha_3 \right| \left\| \mathbf{v}_3 \right\|$$

Perpendiculaire commune

Cas particulier : les 2 droites (d_1) et (d_2) sont parallèles (mais pas confondues). Les vecteurs directeurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont linéairement dépendants :

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$



Il existe une infinité de perpendiculaires communes. Afin d'en déterminer une, on prend un point A quelconque sur (d_1) , un point B' quelconque sur (d_2) et un vecteur unitaire $\mathbf{v}_3$ le long de la droite (AB') . On détermine un vecteur $\mathbf{v}_4$ orthogonal au plan contenant les droites (d_1) et (d_2) :

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$$

Puis, on obtient un vecteur $\mathbf{v}_5$ orthogonal à $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_4$$

Une perpendiculaire commune à (d_1) et (d_2) est la droite passant par A et dirigée par $\mathbf{v}_5$. Une autre perpendiculaire commune est la droite passant par A' et dirigée par $\mathbf{v}_5$, etc.

Fin du chapitre 3