

Outils mathématiques 1 — Base d'exercices de remise à niveau

0. Test de positionnement (sans calculatrice, 15 min)

- (a) Simplifier $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$. (b) Résoudre $2x - 5 = 0$. (c) Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.
(d) Donner $\cos(\pi/3)$. (e) Écrire 0,000452 en notation scientifique.
(f) Dériver $f(x) = x^3$. (g) Donner une primitive de $f(x) = 1/x$.
(h) Calculer le produit scalaire $(1; 2) \cdot (3; -1)$. (i) Simplifier $\sin^2(x) + \cos^2(x)$.
(j) Calculer $\ln(e^2)$.

1. Calcul algébrique, fractions et puissances

- (a) Simplifier : $y = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$, $y = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}}$, $y = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7}$, $y = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$
(b) Simplifier, en précisant les valeurs interdites : $f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{x+1}$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x+2}}{x+2}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2}$
(c) Simplifier : $f(x) = -\frac{3x+1}{-x^2-1}$, $f(x) = \frac{-3x-1}{x^2+1}$, $f(x) = \frac{\frac{1}{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1 + \frac{1+x}{1-x}}$
(d) Développer ou factoriser : $(x+3)^2$, $(3x-2)(3x+2)$, x^2-16 , x^2-6x+9
(e) Simplifier : $\frac{a^3 \cdot a^{-5}}{a^2}$, $(2^3)^2$, 5^{-2} , $\frac{(a^2b^3)^2}{ab^2}$

2. Équations et inéquations

- (a) Résoudre : $3x - 7 = 5$; $2(x+1) = 3x - 4$
(b) Résoudre (second degré, discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$) : $x^2 + x - 6 = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$
(c) Résoudre par un tableau de signes : $(x-1)(x+2) \leq 0$; $\frac{2x-4}{x+1} > 0$
(d) Résoudre le système : $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3. Notation scientifique et ordres de grandeur

- (a) Écrire en notation scientifique : 45 300 000 ; 0,0000067 ; 128,5
(b) Calculer : $10^3 \times 10^{-5}$, $(10^{-2})^4$, $(3 \times 10^4) \times (2 \times 10^{-6})$, $\frac{6 \times 10^8}{3 \times 10^3}$
(c) Associer chaque grandeur à son ordre de grandeur, puis commenter : taille d'un atome, longueur d'onde du visible, fréquence du secteur (France), masse d'un proton, célérité de la lumière dans le vide.
(d) Convertir : 250 mm en m puis en μm ; 2,5 h en secondes ; 3 GHz en Hz (notation scientifique).

4. Géométrie repérée (plan et espace)

- (a) Dans un repère orthonormé, on donne $A(3; 7)$, $B(5; 7)$ et $C(-1; 2)$. Le point I est le milieu de $[BC]$:
i. calculer les coordonnées de I ;
ii. calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$;
iii. donner une équation de la droite (AC) .
(b) Même question avec $A(1; 4)$, $B(5; 4)$ et $C(2; -2)$.
(c) Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4)$.
(d) Dans l'espace, déterminer une équation du plan de vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; 3)$ et passant par $A(3; 2; -1)$. Même question avec $\vec{n} = (1; -2; 2)$ et $A(0; 3; 1)$.

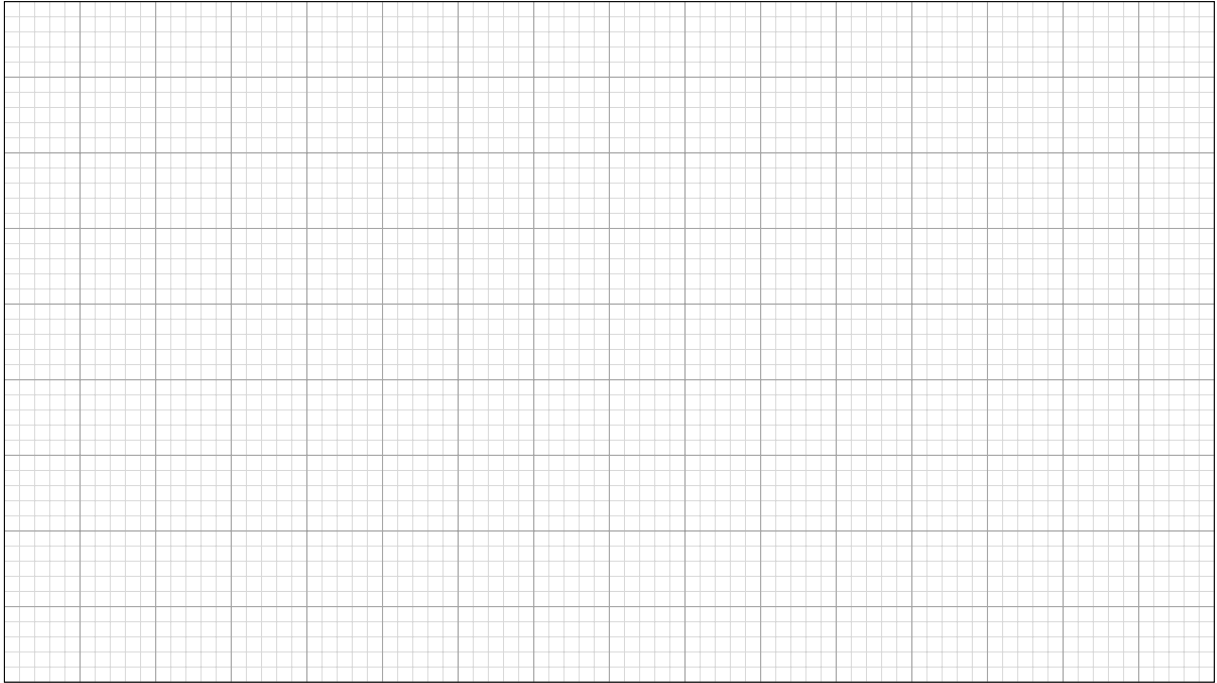
(e) Soient $A(1;2;3)$ et $B(4;6;3)$. Calculer $\|\vec{AB}\|$, puis la distance AB .

5. **Étude des fonctions usuelles.** En utilisant la grille ci-dessous, et un repère orthonormé :

(a) Tracer les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \tan(x)$.

(b) Lesquelles sont paires ? Impaires ?

(c) Relier la fonction f (respectivement g) à la projection orthogonale sur l'axe des abscisses (resp. des ordonnées).



6. En utilisant la grille ci-dessous, et un repère orthonormé :

(a) Tracer dans $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \exp(x)$ puis, sur le même graphe, représenter $g(x) = \exp(-x)$. Comparer leur comportement en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Tracer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = \ln(x)$. Préciser le domaine de définition, la limite en 0^+ , la limite en $+\infty$ et la valeur en $x = 1$.



7. **Exponentielle et logarithme.** Simplifier les expressions suivantes :

$$(a) f_1(x) = \exp(-\ln(x)), \quad f_2(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x)}, \quad f_3(x) = \ln(\exp(x^2)), \quad f_4(x) = \exp(\ln(5))$$

- (b) $f_5(x) = e^{2x} \cdot e^3$, $f_6(x) = (e^{2x})^3$, $x = 10^3 \cdot 10^5$, $x = (10^3)^5$
 (c) $f_7(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, $f_8(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$, $f_9(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$, $f_{10}(x) = 2\ln(x) - \ln(x^2)$ ($x > 0$)

8. Dérivation

- (a) Calculer la dérivée de $f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$.
 (b) Dériver : $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$; $f(x) = (2x+1)(x-3)$; $f(x) = x \ln(x) - x$.
 (c) Dériver (fonctions composées) : $f(x) = \sin(3x)$, $f(x) = \exp(-2x)$, $f(x) = (2x+1)^3$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
 (d) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et en déduire les variations de f .

9. Primitives et intégrales

- (a) Donner une primitive de : $f(x) = 3x^2 - 2x$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), $f(x) = e^{2x}$, $f(x) = \cos(x)$.
 (b) Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sin(2x)$. Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$ et $I_2 = \int_{-\pi/8}^{\pi/6} g(x) dx$.
 (c) Calculer $I_3 = \int_0^2 (x^2 - 1) dx$ et $I_4 = \int_0^{\pi/4} \sin(2x) dx$.
 (d) Un capteur délivre une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, avec $U_0 = 5$ V et $T = 2\pi/\omega$ la période.
 i. Calculer la valeur moyenne $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$.
 ii. Calculer $\langle u^2 \rangle$ sur une période, puis en déduire la valeur efficace $U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ du signal.

10. Exercice de synthèse. Un capteur délivre une tension $u(t) = 3 \cos(2t) - 1$ (en volts), pour $t \in [0; \pi]$ (en secondes).

- (a) Calculer $u(0)$ et $u(\pi/2)$.
 (b) Calculer la dérivée $u'(t)$ et l'interpréter physiquement (vitesse de variation du signal).
 (c) Calculer la valeur moyenne de $u(t)$ sur $[0; \pi]$.