

# Trigonométrie

Corrigé projeté, exercice par exercice

Outils mathématiques 1

B.U.T.1 Mesures Physiques

## Exercice 0 — Test de positionnement

(a)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(b)  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  ; c'est  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c)  $\sin 2x = 2 \sin x$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(d)  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

**VRAI** (e)  $\cos(-x) = -\cos x$   
 $\cos$  est *paire* :  $\cos(-x) = \cos x$

**FAUX** (f)  $\sin x = 2$  a des solutions  
 $\sin$  est à valeurs dans  $[-1; 1]$

**FAUX** (g)  $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$

**VRAI** (h)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

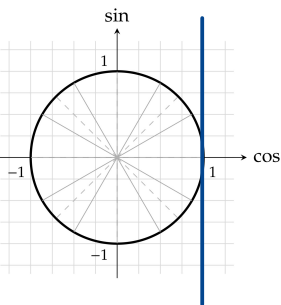
**FAUX**

**FAUX**

**FAUX**

**VRAI**

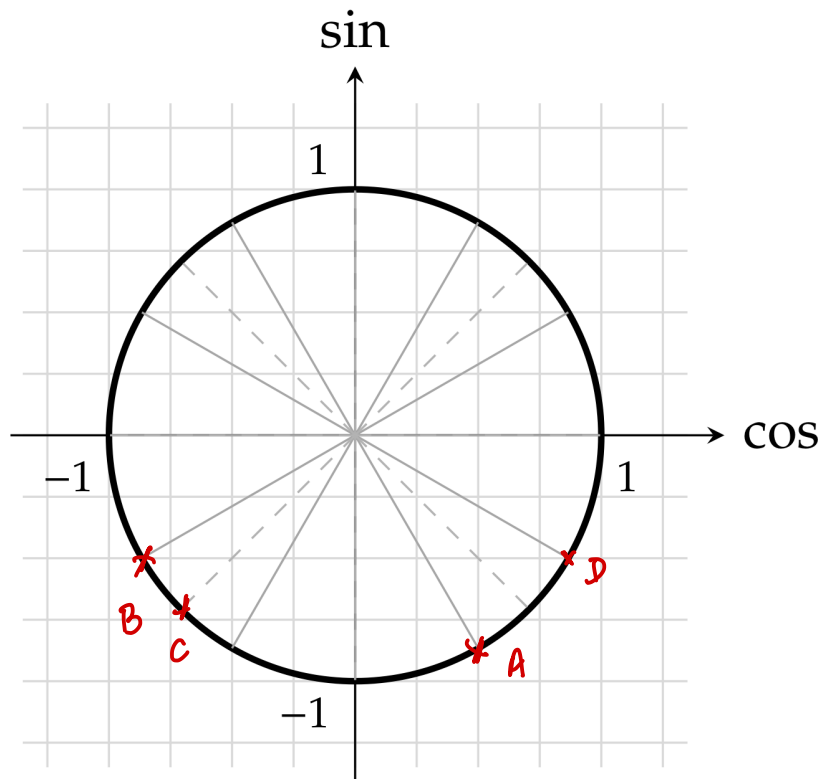
## Exercice 1 — Valeurs remarquables



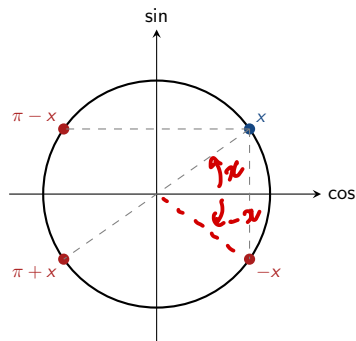
| x   | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\frac{3\pi}{4}$      | $\pi$ |
|-----|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-------|
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1    |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | 0     |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | n.d.            | $-\sqrt{3}$          | -1                    | 0     |

### À retenir

Le **sinus** se lit en **ordonnée**, le **cosinus** en **abscisse**. La ligne des cosinus se lit de gauche à droite en *décroissant* de 1 à -1 : c'est la seule chose à mémoriser.

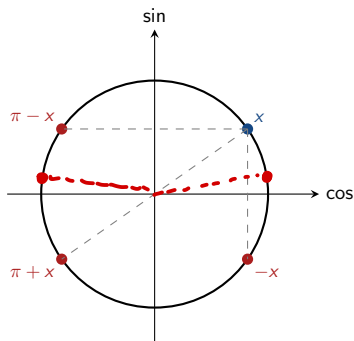


## Exercice 1 — Angles associés : lire, ne pas apprendre



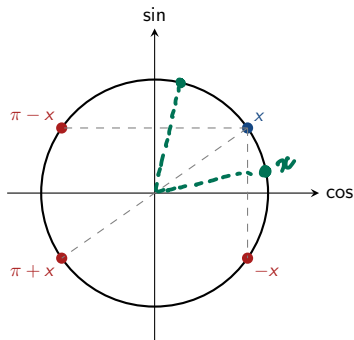
- $-x$  : symétrie / axe des **abscisses**  
 $\cos(-x) = \cos x$  ;  $\sin(-x) = -\sin x$

## Exercice 1 — Angles associés : lire, ne pas apprendre



- $-x$  : symétrie / axe des **abscisses**  
 $\cos(-x) = \cos x$  ;  $\sin(-x) = -\sin x$
- $\pi - x$  : symétrie / axe des **ordonnées**  
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$  ;  $\sin(\pi - x) = \sin x$

## Exercice 1 — Angles associés : lire, ne pas apprendre



- $-x$  : symétrie / axe des **abscisses**  
 $\cos(-x) = \cos x$  ;  $\sin(-x) = -\sin x$
- $\pi - x$  : symétrie / axe des **ordonnées**  
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$  ;  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\pi + x$  : symétrie / **origine**  
 $\cos(\pi + x) = -\cos x$  ;  $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\frac{\pi}{2} - x$  : symétrie / **première bissectrice**  
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$  (échange)  
 *$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$*

### À retenir

Huit formules, **une seule figure**. Redessiner le cercle coûte dix secondes et ne trompe jamais ; réciter de mémoire trompe souvent.

## Exercice 1(d) — Simplifications

$$\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(2024\pi) = 1 \quad (2024 \text{ est pair})$$

$\cos(2025\pi) = -1$

### À retenir

Toujours **retrancher les tours complets** d'abord ( $2\pi$  pour cos et sin,  $\pi$  pour tan). Le calcul se réduit alors à une valeur du tableau.

## Exercice 1(d) — Simplifications

$$\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(2024\pi) = 1 \quad (2024 \text{ est pair})$$

### À retenir

Toujours **retrancher les tours complets** d'abord ( $2\pi$  pour cos et sin,  $\pi$  pour tan). Le calcul se réduit alors à une valeur du tableau.

## Exercice 2 — Les contre-exemples qui comptent

(a)  $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

**FAUX** :  $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ . En  $x = \pi$  :  $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ .

(b)  $\cos 2x = 2 \cos x$

**FAUX** :  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ . En  $x = \frac{\pi}{2}$  :  $-1 \neq 0$ .

(c)  $\arcsin(\sin x) = x$

**FAUX** : vrai **seulement** si  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . En  $x = \pi$  :  $\arcsin 0 = 0 \neq \pi$ .

(e)  $\tan$  définie sur  $\mathbb{R}$

**FAUX** : pas en  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .

(f)  $\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$

**FAUX** :  $y = \pm x + 2k\pi$ .  $\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ .

### À retenir

Un contre-exemple **bien choisi** vaut une démonstration. Les valeurs  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$  suffisent presque toujours à démolir une fausse identité.

**Exercice 3(a) — La valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$** 

On écrit  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , puis on applique la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966\end{aligned}$$

De même  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$ , et  $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$ .

**(b)**  $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$  : les angles sont **complémentaires**, donc **aucun calcul** n'est nécessaire :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

**À retenir**

Décomposer l'angle en **somme ou différence d'angles connus** pour calculer des valeurs exactes.  
Chercher ensuite les **complémentaires** évite de tout recalculer.

### Exercice 3(a) — La valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

On écrit  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , puis on applique la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966\end{aligned}$$

De même  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$ , et  $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$ .

(b)  $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$  : les angles sont **complémentaires**, donc **aucun calcul** n'est nécessaire :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

#### À retenir

Décomposer l'angle en **somme ou différence d'angles connus** pour calculer des valeurs exactes.  
Chercher ensuite les **complémentaires** évite de tout recalculer.

### Exercice 3(a) — La valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

On écrit  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , puis on applique la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966\end{aligned}$$

De même  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$ , et  $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$ .

(b)  $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$  : les angles sont **complémentaires**, donc **aucun calcul** n'est nécessaire :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

#### À retenir

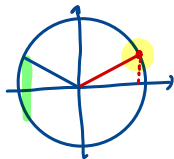
Décomposer l'angle en **somme ou différence d'angles connus** pour calculer des valeurs exactes.  
Chercher ensuite les **complémentaires** évite de tout recalculer.

### Exercice 3(c) — $\cos \frac{\pi}{8}$ par duplication (attention au signe)

On part de  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  avec  $a = \frac{\pi}{8}$ , donc  $2a = \frac{\pi}{4}$  :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right)$$



$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$$

### Exercice 3(c) — $\cos \frac{\pi}{8}$ par duplication (attention au signe)

On part de  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  avec  $a = \frac{\pi}{8}$ , donc  $2a = \frac{\pi}{4}$  :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

**Le point délicat** : l'équation donne  $\cos^2$ , donc **deux** racines possibles. Comme  $\frac{\pi}{8}$  appartient au **premier quadrant**, son cosinus est **positif** :

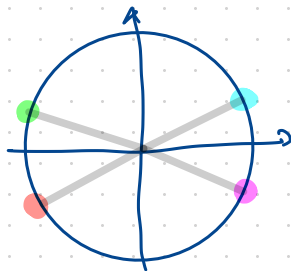
$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0,924 \quad ; \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0,383$$

#### À retenir

Une formule de duplication donne toujours un **carré** : elle laisse le signe indéterminé. C'est le **quadrant** de l'angle — et lui seul — qui tranche.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
- $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
- $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$



$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \pm \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

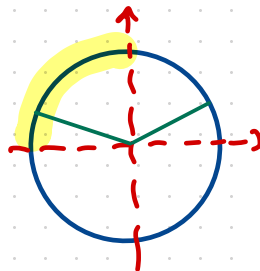
$$= \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(d) Sachant que  $\sin \theta = \frac{5}{13}$  avec  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , calculer  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$ ,  $\sin 2\theta$  et  $\cos 2\theta$ .

$$\begin{cases} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta) \end{cases}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

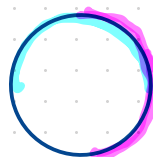


$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

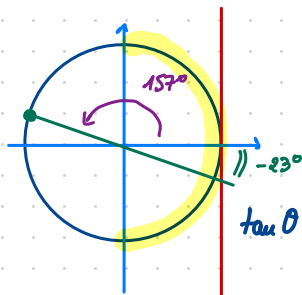
$$\tan \theta = \frac{5}{-12}$$

- $\theta = 180 - \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$

- $\theta = \arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$



$$\arccos\left(\frac{5}{-12}\right) = -23^\circ + 180^\circ = 157^\circ$$



$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\theta + \pi) \\ &= \tan(\theta - \pi) \end{aligned}$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cdot \left(\frac{-12}{13}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos(2\theta) = \left(\frac{-12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$a = b = 1$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\cancel{(a-b)}(a+b) = b\cancel{(a-b)}$$

$$a+b = b$$

$$a = 0$$



NE PAS DIVISER PAR ZÉRO !!

## Exercice 4 — Trois identités typiques

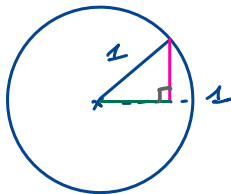
(a)  $\sin^4 x - \cos^4 x$  : reconnaître  $a^2 - b^2$ .

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$(\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 =$$

$$(\sin^2 x) = (\sin x)^2$$

*Val:  $\forall x \in \mathbb{R}$*



## Exercice 4 — Trois identités typiques

(a)  $\sin^4 x - \cos^4 x$  : reconnaître  $a^2 - b^2$ .

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b)  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$  : tout écrire en fonction de  $x$  (et non de  $2x$ ).

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

$$\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\cancel{\sin^2 x}}{2\cos x \cancel{\sin x}}$$

$$\forall x / \sin x \neq 0$$

$$\forall x \neq k\pi$$

$$\forall x \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \neq k\pi \\ \forall x \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$$= \tan x \quad \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$$

## Exercice 4 — Trois identités typiques

(a)  $\sin^4 x - \cos^4 x$  : reconnaître  $a^2 - b^2$ .

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b)  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$  : tout écrire en fonction de  $x$  (et non de  $2x$ ).

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (x \neq k \frac{\pi}{2})$$

## Exercice 4 — Trois identités typiques

(a)  $\sin^4 x - \cos^4 x$  : reconnaître  $a^2 - b^2$ .

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b)  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$  : tout écrire en fonction de  $x$  (et non de  $2x$ ).

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (x \neq k\frac{\pi}{2})$$

(d)  $\sin 3x$  : écrire  $3x = 2x + x$ .

## Exercice 4 — Trois identités typiques

(a)  $\sin^4 x - \cos^4 x$  : reconnaître  $a^2 - b^2$ .

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b)  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$  : tout écrire en fonction de  $x$  (et non de  $2x$ ).

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (x \neq k \frac{\pi}{2})$$

(d)  $\sin 3x$  : écrire  $3x = 2x + x$ .

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

### À retenir

Deux réflexes couvrent presque tout : **factoriser** (identités remarquables) et **tout ramener au même angle**. Ne jamais oublier de préciser le **domaine de validité** quand un dénominateur apparaît.

7/9/26

## 5. Résoudre des équations trigonométriques.

Résoudre dans  $[0; 2\pi[$ , puis donner l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$ .

(a)  $2 \cos x - 1 = 0$

(b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c)  $\tan x = 1$

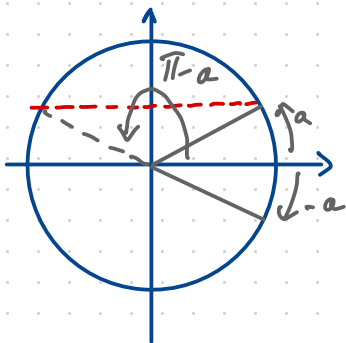
(d)  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$  (poser  $X = \cos x$ )

(e)  $\sin 2x = \sin x$  (~~tout ramener au même membre et factoriser~~ ne surtout pas « simplifier par  $\sin x$  »)

(f)  $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$  (tout exprimer en  $\cos x$ )

(g)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$  (réduire d'abord à une seule sinussoïde)

(h)  $\cos 3x = \sin x$  (utiliser  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ )



$\cos a = \cos b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & [2\pi] \\ a = -b & [2\pi] \end{cases}$$

$\sin a = \sin b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & [2\pi] \\ b = \pi - a & [2\pi] \end{cases}$$

(a)  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

ou  $x = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

(b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} [2\pi] \\ x = \frac{7\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\pi/4 \\ x = -3\pi/4 \end{cases} \text{ dans } [-\pi; +\pi].$$

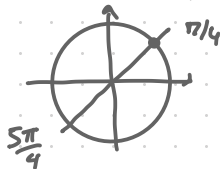
(c)  $\tan x = 1 \quad \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad x \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = x & [2\pi] \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} - x = -x & [2\pi] \quad (2) \end{cases}$$

$$① \quad 2x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



$$② \quad \frac{\pi}{2} - x = -x [2\pi]$$

$$0 = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ pas de solution}$$

(d)  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$  (poser  $X = \cos x$ )

(e)  $\sin 2x = \sin x$  ~~(tout ramener au même membre et factoriser ne surtout pas « simplifier par  $\sin x$  »)~~

(f)  $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$  (tout exprimer en  $\cos x$ )

(g)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$  (réduire d'abord à une seule sinusoïde)

(h)  $\cos 3x = \sin x$  (utiliser  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ )

(d)  $X = \cos x$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = 9 = 3^2$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

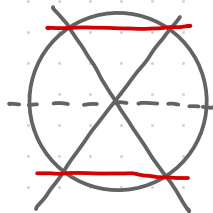
$$\text{ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} [2\pi] ; \pi [2\pi] ; \frac{5\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

(e)  $\sin 2x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x [2\pi] \\ 2x = \pi - x [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 [2\pi] \\ 3x = \pi [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$



(f)  $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$  (tout exprimer en  $\cos x$ )

(g)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$  (réduire d'abord à une seule sinussoïde)

(h)  $\cos 3x = \sin x$  (utiliser  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ )

(f)  $2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 0$

$$-2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{Je pose } X = \cos x$$

$$2X^2 + 3X + 1 \quad -1 \leq X \leq 1$$

$$\Delta = 1 = 1^2$$

$$\Rightarrow X = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow X_1 = -1$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x_1 = X_1 = -1 \quad \cos(x_2) = X_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \pi [2\pi]$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2\pi}{3} \\ x_2 = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (\text{ou } -\frac{2\pi}{3})$$

$$S = \left\{ \pi [2\pi]; \frac{2\pi}{3} [2\pi]; \frac{4\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

(h)  $\cos(3x) = \sin(x)$

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - x [2\pi] \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + x [2\pi] \end{array} \right.$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + x [2\pi]$$

$$4x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \left[ \frac{2\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \left[ \frac{2\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} [\pi]; \frac{\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

(g)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$

$$= R \cos(x - \varphi)$$

$$R = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour si } a < 0$$

$$= \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{R} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{R} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

9/9/26

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow x = 0 [2\pi] \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$S = \left\{ 0 [2\pi]; -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

#### 6. Réduction à une seule sinusoïde et applications.

Toute somme  $a \cos x + b \sin x$  se ramène à une seule sinusoïde  $R \cos(x - \varphi)$ , où  $R$  est l'amplitude et  $\varphi$  le déphasage (le maximum, atteint en  $x = 0$  pour  $\cos$ , l'est ici en  $x = \varphi$  : le signal est « retardé » de  $\varphi$ ).

(a) Développer  $R \cos(x - \varphi)$  et, par identification avec  $a \cos x + b \sin x$ , retrouver  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$  et l'expression de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} R \cos(x - \varphi) &= R [\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi] \\ &= R \cos \varphi \cos x + R \sin \varphi \sin x \stackrel{?}{=} a \cos x + b \sin x \\ &\quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = R \cos \varphi \\ b = R \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = a/R \\ \sin \varphi = b/R \end{cases} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

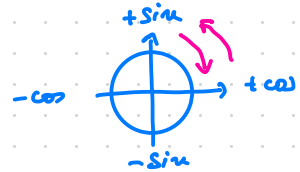
$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + b^2 &= R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi \\ &= R^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) = R^2 \\ &\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$7. \int_{-\pi}^{\pi} A \cos^2(x) dx = I$$

Rappel:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  ou  $F'(x) = f(x)$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(nx) \rightarrow \frac{\sin(nx)}{n}$$



$$I = \frac{A}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \frac{A}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx = \frac{A}{2} [x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{A}{2} (\pi + \pi) = A \cdot \frac{2\pi}{2} = A \cdot \pi.$$

# 7. Linéarisation, produits et intégrales.

(a) Linéariser  $\sin^2 x \cos^2 x$  et  $\cos^4 x$  (exprimer en fonction de  $\cos 2x$  et  $\cos 4x$  uniquement).

(b) En déduire  $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx$  et  $\int_0^\pi \sin^4 x dx$ .

(c) Transformer en somme, puis calculer :

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x) \sin(3x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(2x) dx$$

(d) Relations d'orthogonalité. Soient  $n$  et  $m$  deux entiers strictement positifs. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{4} ([1 - \cos(2x)][1 + \cos(2x)]) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \underbrace{\cos^2(2x)}_{\sin^2(2x)}) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1 - \cos(4x)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{8} [1 - \cos(4x)] \\ \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x &= \frac{1}{8} \int_0^\pi 1 dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos(4x) dx \\ &= \frac{1}{8} [x]_0^\pi = \frac{\pi}{8} = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \right]^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos(2x))^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos(4x)}{8} \\ &= \frac{3}{8} + f_{\text{alt}}(x) \\ \Rightarrow \int_0^\pi \sin^4 x &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$