

Outils mathématiques — Révisions : trigonométrie

BUT1 Mesures Physiques

Boîte à outils

- **Fondamentale** : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- **Addition** : $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$;
 $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$.
- **Duplication** : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.
- **Linéarisation** (pour *intégrer*) : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$; $\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$.
- **Somme → produit** : $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$; $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$.
- **Produit → somme** : $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$; $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$.
- **Équations** : $\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi$; $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi$;
 $\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi$.
- **Réduction à une seule sinusoïde** :
 $a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi)$ avec $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{R}$, $\sin \varphi = \frac{b}{R}$
 soit $\varphi = \arg(a + ib)$. Pour le calcul numérique : $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, $+\pi$ si $a < 0$ ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ si $a = 0$).
- La moyenne d'une fonction alternative sur une période entière est **nulle**.

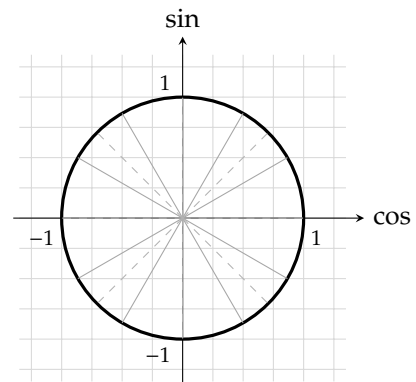
0. Test de positionnement. Vrai ou faux ?

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x .
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\sin(2x) = 2 \sin x$.
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
- $\cos(-x) = -\cos(x)$.
- L'équation $\sin x = 2$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
- $\cos(a+b) = \cos a + \cos b$.
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

1. Le cercle trigonométrique : lire au lieu de calculer.

- Compléter le tableau des valeurs remarquables (valeurs *exactes*, sans calculatrice) :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$								
$\sin x$								
$\tan x$								



- Placer sur le cercle trigonométrique les angles $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{11\pi}{6}$, puis donner leurs cosinus et sinus *par lecture*.
- Établir, à l'aide du cercle, les relations liant :

$$\begin{array}{ll} \cos(-x), \sin(-x) & \cos(\pi - x), \sin(\pi - x) \\ \cos(\pi + x), \sin(\pi + x) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{array}$$

aux valeurs $\cos x$ et $\sin x$. Ne pas apprendre ces huit formules : les **lire** sur une figure est plus sûr et plus rapide.

(d) Simplifier, sans calculatrice : $\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$, $\cos(2024\pi)$.

2. **Ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.**

Pour chaque affirmation : démontrer, ou donner un **contre-exemple explicite**.

- (a) $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ pour tout x .
- (b) $\cos(2x) = 2 \cos(x)$.
- (c) $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout x .
- (d) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- (e) $\tan x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- (f) Si $\cos x = \cos y$, alors $x = y$.
- (g) $|\sin x| \leq |x|$ pour tout x .

3. **Valeurs exactes par les formules d'addition.**

- (a) En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs *exactes* de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.
- (b) En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$ *sans nouveau calcul*. Quelle relation lie $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$?
- (c) À l'aide de la formule de duplication $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ appliquée à $a = \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
- (d) Sachant que $\sin \theta = \frac{5}{13}$ avec $\theta \in \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$, calculer $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$.

4. **Démontrer des identités.**

Établir les identités suivantes, en précisant à chaque fois le domaine de validité.

- (a) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$
- (b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$
- (c) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$
- (d) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ et $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ (via $3x = 2x + x$, ou via la formule de Moivre)
- (e) $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan(x/2)}$
- (f) $\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

5. **Résoudre des équations trigonométriques.**

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$, puis donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

- (a) $2 \cos x - 1 = 0$
- (b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (c) $\tan x = 1$
- (d) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (poser $X = \cos x$)
- (e) $\sin 2x = \sin x$ (tout ramener au même membre et **factoriser** — ne surtout pas « simplifier par $\sin x$ »)
- (f) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ (tout exprimer en $\cos x$)
- (g) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ (réduire d'abord à une seule sinusoïde)
- (h) $\cos 3x = \sin x$ (utiliser $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$)

6. **Réduction à une seule sinusoïde et applications.**

Toute somme $a \cos x + b \sin x$ se ramène à *une seule sinusoïde* $R \cos(x - \varphi)$, où R est l'*amplitude* et φ le *déphasage* (le maximum, atteint en $x = 0$ pour $\cos$, l'est ici en $x = \varphi$: le signal est « retardé » de φ).

- (a) Développer $R \cos(x - \varphi)$ et, par identification avec $a \cos x + b \sin x$, retrouver $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et l'expression de $\tan \varphi$.
- (b) Écrire $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x$ sous la forme $R \cos(x - \varphi)$. En déduire le maximum et le minimum de f , ainsi que les valeurs de x où ils sont atteints.
- (c) Pourquoi la tangente seule ne suffit pas. On utilise souvent $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ pour déterminer φ .

- i. Traiter $a = -3$, $b = -4$ en prenant naïvement $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ à la calculatrice. Comparer $\cos \varphi$ à $\frac{a}{R}$: que constate-t-on ?

- ii. Évaluer f et $R \cos(x - \varphi)$ en $x = 0$ et $x = 1$. Quelle est la nature exacte de l'erreur commise ? Pourquoi est-elle difficile à détecter ?
- iii. Corriger en appliquant la règle « $+\pi$ si $a < 0$ » et vérifier.
- iv. Que se passe-t-il si $a = 0$ (signal purement sinusoïdal) ? *Ce cas est fréquent en électricité : lequel ?*
- (d) Écrire $g(x) = \sin x - \cos x$ sous la forme $R \sin(x - \varphi)$, puis résoudre $g(x) = 1$.
- (e) *Lien avec les nombres complexes.* Montrer que si l'on pose $z = a + ib$, alors

$$z = R e^{i\varphi} \quad \text{c'est-à-dire} \quad R = |z| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(z)$$

Le module donne l'amplitude, l'argument donne le déphasage. Vérifier sur f de la question (b). Quel est le lien avec le vecteur de Fresnel de composantes $(a; b)$?

- (f) *De l'amplitude à la valeur efficace.* Une tension du secteur s'écrit $u(t) = U_{\max} \cos(\omega t - \varphi)$, avec $U_{\max} = 325$ V.
 - i. Calculer la valeur efficace $U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$. Commenter.
 - ii. On associe à u l'amplitude complexe $\underline{U} = U e^{i\varphi}$ (exprimée en valeur efficace). Que représentent $|\underline{U}|$ et $\arg(\underline{U})$?
 - iii. Deux tensions $u_1(t) = 100 \cos(\omega t)$ et $u_2(t) = 100 \sin(\omega t)$ se superposent. Déterminer l'amplitude, le déphasage et la valeur efficace de $u_1 + u_2$, par la réduction trigonométrique puis par les complexes. Les deux méthodes doivent donner le même résultat.

7. Linéarisation, produits et intégrales.

- (a) Linéariser $\sin^2 x \cos^2 x$ et $\cos^4 x$ (exprimer en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$ uniquement).
- (b) En déduire $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ et $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$.
- (c) Transformer en somme, puis calculer :

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x) \sin(3x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(2x) \, dx$$

- (d) *Relations d'orthogonalité.* Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

8. Applications en physique.

- (a) *Réfraction (loi de Snell–Descartes).* Un rayon lumineux passe de l'air ($n_1 = 1,00$) au verre ($n_2 = 1,50$) avec un angle d'incidence $i_1 = 45^\circ$. La loi s'écrit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.
 - i. Calculer l'angle de réfraction i_2 .
 - ii. Le rayon fait maintenant le trajet inverse (verre $\rightarrow$ air). Calculer l'angle limite i_ℓ au-delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté.
 - iii. Comment s'appelle le phénomène observé au-delà de i_ℓ , et quelle application technologique majeure en découle ?
- (b) *Battements acoustiques.* Deux diapasons émettent les sons $s_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ et $s_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t)$, avec $f_1 = 440$ Hz et $f_2 = 444$ Hz.
 - i. Montrer, à l'aide d'une formule somme $\rightarrow$ produit, que

$$s_1(t) + s_2(t) = 2A \cos(2\pi f_{\text{bat}} t) \cos(2\pi f_{\text{moy}} t)$$

et exprimer f_{bat} et f_{moy} en fonction de f_1 et f_2 .

- ii. Calculer ces deux fréquences. Laquelle correspond au son entendu, laquelle à l'enveloppe qui module son intensité ?
- iii. Combien de battements par seconde l'oreille perçoit-elle ? Attention : l'intensité sonore est maximale **deux fois** par période de l'enveloppe. À quoi cela sert-il pour accorder un instrument ?

9. Application en électricité : puissance en régime sinusoïdal.

Un dipôle est soumis à la tension $u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t)$ et parcouru par le courant $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$, où U et I sont les valeurs efficaces et φ le déphasage du courant par rapport à la tension.

(a) La puissance instantanée est $p(t) = u(t) i(t)$. À l'aide d'une formule *produit* $\rightarrow$ *somme*, montrer que

$$p(t) = \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{terme constant}} + \underbrace{UI \cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{terme oscillant}}$$

- (b) En déduire la *puissance active* $P = \langle p \rangle$ sur une période. Pourquoi le second terme ne contribue-t-il pas à la moyenne ?
- (c) À quelle fréquence oscille $p(t)$, comparée à celle de u et i ? Le réseau étant à 50 Hz, que vaut cette fréquence ?
- (d) Montrer que $p(t)$ prend des valeurs **négatives** dès que $|\cos \varphi| < 1$. Qu'est-ce que cela signifie physiquement pour le dipôle ?
- (e) *Application numérique.* $U = 230$ V, $I = 5,0$ A, $\varphi = 60^\circ$. Calculer la puissance apparente $S = UI$, la puissance active P , la puissance réactive $Q = UI \sin \varphi$, ainsi que le *facteur de puissance* $\cos \varphi$. Entre quelles valeurs $p(t)$ oscille-t-elle ?
- (f) Traiter les deux cas limites : $\varphi = 0$ (résistance pure) et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (bobine ou condensateur parfait). Que vaut P dans chaque cas ? Interpréter.
- (g) *Système triphasé.* Trois tensions sont déphasées de $\frac{2\pi}{3}$:

$$v_1(t) = V \cos(\omega t), \quad v_2(t) = V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad v_3(t) = V \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ à tout instant. Quelle conséquence pratique cela a-t-il sur le courant circulant dans le fil de neutre d'une installation équilibrée ?

10. Application en mécanique du point : tir balistique.

Un projectile est lancé depuis l'origine avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ avec l'horizontale. On néglige les frottements et l'on prend g pour l'accélération de la pesanteur.

- (a) Écrire les composantes de $\vec{v}_0$, puis établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
- (b) Déterminer la *durée de vol* T (instant du retour en $y = 0$), puis montrer que la **portée** vaut

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

C'est la formule de duplication $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ qui fait tout le travail : la repérer dans le calcul.

- (c) Pour quelle valeur de α la portée est-elle **maximale** ? Que vaut alors $R_{\max}$? Justifier par une propriété de la fonction sinus, sans dérivation.
- (d) Montrer que deux angles de tir distincts donnent la *même* portée, et qu'ils sont **complémentaires** (α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$). Sur quelle identité trigonométrique repose ce résultat ? Lequel des deux tirs dure le plus longtemps ?
- (e) Établir l'expression de la *flèche* (altitude maximale) $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.
- (f) *Application numérique.* $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Compléter le tableau :

α	R (m)	h (m)	T (s)
30°			
45°			
60°			

Commenter les colonnes : que constate-t-on entre 30° et 60° ?

- (g) *Problème inverse.* On souhaite atteindre une cible située à $R = 30$ m. Déterminer les deux angles de tir possibles.
- (h) *Plan incliné.* Un solide de masse $m = 4,0$ kg repose sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 25^\circ$, en équilibre.
- Projeter le poids $\vec{P}$ sur les axes tangentiel et normal au plan. Donner les valeurs numériques de $P_t = mg \sin \alpha$ et $P_n = mg \cos \alpha$.
 - Le solide étant à la limite du glissement, le coefficient de frottement vérifie $\mu = \frac{P_t}{P_n}$. Montrer que $\mu = \tan \alpha$ et calculer sa valeur. Remarquable : l'angle limite de glissement **mesure directement** le coefficient de frottement, indépendamment de la masse.

Corrigé express — résultats seuls

0. (a) V. (b) F : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (c'est $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$). (c) F : $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. (d) V. (e) F : $\cos$ est *paire*, $\cos(-x) = \cos x$. (f) F : $\sin$ est à valeurs dans $[-1; 1]$. (g) F. (h) V.

1. (a) Table :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	0

(b) $-\frac{\pi}{3} : (\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\frac{7\pi}{6} : (-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$; $\frac{5\pi}{4} : (-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$; $\frac{11\pi}{6} : (\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$. (c) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$. (d) $\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 4\pi$ donc $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; $\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$; $\cos(2024\pi) = 1$.

2. (a) **Faux** : $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$. Contre-exemple : $x = \pi$ donne $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. (b) **Faux** : $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$. Contre-exemple : $x = \frac{\pi}{2}$ donne $\cos \pi = -1$ alors que $2 \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$. (c) **Faux** : $\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Contre-exemple : $x = \pi$ donne $\arcsin(0) = 0 \neq \pi$. (d) **Vrai** (formule d'addition; se retrouve via $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$). (e) **Faux** : $\tan$ n'est pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi$. (f) **Faux** : $\cos x = \cos y \iff y = \pm x + 2k\pi$. Contre-exemple : $\cos \frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3})$. (g) **Vrai** (inégalité classique, avec égalité seulement en $x = 0$).

3. (a) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966$; $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$; $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} \approx 0,268$. (b) $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$: les deux angles sont *complémentaires*, donc $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. (c) $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$

donne $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, et comme $\frac{\pi}{8}$ est dans le *premier quadrant*, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0,924$; $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0,383$. (d) θ est dans le *deuxième quadrant*, donc $\cos \theta < 0$: $\cos \theta = -\frac{12}{13}$; $\tan \theta = -\frac{5}{12}$; $\sin 2\theta = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot (-\frac{12}{13}) = -\frac{120}{169}$; $\cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$.

4. (a) $\sin^4 - \cos^4 = (\sin^2 - \cos^2)(\sin^2 + \cos^2) = \sin^2 - \cos^2$ (valable sur $\mathbb{R}$). (b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x$ (pour $\sin 2x \neq 0$, soit $x \neq \frac{k\pi}{2}$). (c) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$. (d) $\sin 3x = \sin(2x + x) = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$; de même pour $\cos 3x$. (e) En posant $x = 2u$: $\frac{1 + \cos 2u}{\sin 2u} = \frac{2 \cos^2 u}{2 \sin u \cos u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{\tan u} = \frac{1}{\tan(x/2)}$. (f) $\sin(a + b) \sin(a - b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b) = \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b$ (en remplaçant $\cos^2 = 1 - \sin^2$).

5. (a) $\cos x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$; dans $\mathbb{R} : \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. (b) $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$. (c) $x = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$; dans $\mathbb{R} : \frac{\pi}{4} + k\pi$. (d) $X = \cos x$:

$2X^2 + X - 1 = 0$ donne $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -1$, d'où $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \right\}$. (e) $2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1) = 0$: $\sin x = 0$ ou

$\cos x = \frac{1}{2}$, soit $x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \right\}$. Simplifier par $\sin x$ aurait fait perdre les solutions 0 et π : on ne divise jamais par une quantité pouvant

s'annuler. (f) $2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 0$, soit $2X^2 + 3X + 1 = 0$ avec $X = \cos x$: $X = -1$ ou $X = -\frac{1}{2}$, d'où $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3} \right\}$.

(g) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos(x + \frac{\pi}{3})$, donc l'équation devient $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$: $x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, d'où $x = 0$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$. (h)

$\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ donne $3x = \pm(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi$: soit $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, soit $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Dans $[0; 2\pi[$: $\left\{ \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

6. (a) $R \cos(x - \varphi) = R \cos \varphi \cos x + R \sin \varphi \sin x$. L'identification donne $a = R \cos \varphi$ et $b = R \sin \varphi$, d'où en élevant au carré et en sommant $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis $\cos \varphi = \frac{a}{R}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{R}$.

(b) $R = \sqrt{9 + 16} = 5$; $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, donc $\varphi = \arctan \frac{4}{3} \approx 53,1^\circ$ ($\approx 0,927$ rad) :

$$f(x) = 5 \cos(x - 0,927)$$

Maximum 5 atteint pour $x - \varphi = 0$, soit $x = \varphi \approx 53,1^\circ$; minimum -5 une demi-période plus loin.

(c) i. $\frac{b}{a} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$, et la calculatrice renvoie $\arctan \frac{4}{3} \approx 53,1^\circ$ — exactement la même valeur qu'en (b), alors que la fonction est l'opposée. Or $\cos(53,1^\circ) = +0,60$ tandis que $\frac{a}{R} = \frac{-3}{5} = -0,60$: les signes sont opposés, la valeur est fautive. ii. En $x = 0$: $f = -3$ mais $5 \cos(-53,1^\circ) = +3$; en $x = 1$: $f = -4,99$ mais $+4,99$. L'erreur est un **changement de signe global** : la courbe obtenue est la *symétrique* de la bonne par rapport à l'axe des abscisses. Elle est difficile à détecter parce que l'amplitude R est correcte, la période est correcte, et la vérification en x tel que $f(x) = 0$ ne montre rien. iii. Comme $a = -3 < 0$, il faut ajouter π : $\varphi \approx 53,1^\circ + 180^\circ = 233,1^\circ$ (soit $-126,9^\circ$). Vérification : $\cos(233,1^\circ) = -0,60 = \frac{a}{R}$ et $\sin(233,1^\circ) = -0,80 = \frac{b}{R}$. iv. Si $a = 0$, $\frac{b}{a}$ n'a aucun sens : la tangente échoue, alors que φ vaut simplement $+\frac{\pi}{2}$ (si $b > 0$) ou $-\frac{\pi}{2}$ (si $b < 0$). C'est le cas d'une bobine ou d'un condensateur parfait, dont la tension est en *quadrature* avec le courant : la situation la plus courante en électricité est aussi celle où la formule à la tangente tombe en panne.

(d) $g(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, soit $R = \sqrt{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$. L'équation $g(x) = 1$ devient $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $x - \frac{\pi}{4} \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$:

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \pi.$$

(e) Par définition du module et de l'argument, $z = a + ib$ s'écrit $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg z$. En comparant avec $a = R \cos \varphi$ et $b = R \sin \varphi$, on identifie $R = |a + ib|$ et $\varphi = \arg(a + ib)$. Vérification sur (b) : $3 + 4i$ a pour module 5 et pour argument $53,1^\circ$ — on retrouve exactement R et φ . *Lien avec Fresnel : $a + ib$ est précisément l'affixe du vecteur de composantes $(a; b)$, somme des deux vecteurs $a\vec{i}$ et $b\vec{j}$ en quadrature. Réduire une somme de sinusoides, additionner deux complexes et sommer deux vecteurs orthogonaux sont un seul et même geste — et $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ n'est autre que Pythagore.*

(f) i. $U = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx [230 \text{ V}]$: c'est la valeur annoncée pour le secteur, qui est une valeur efficace et non une amplitude. ii. $|U| = U$ est la **valeur efficace** et $\arg(U) = \varphi$ est le **déphasage**. Un phaseur encode donc les deux seules grandeurs qui caractérisent un signal sinusoïdal de pulsation donnée. iii. Trigonométrie : $a = b = 100$, donc $R = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ V}$, $\cos \varphi = \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\varphi = \left[\frac{\pi}{4}\right]$; valeur efficace $\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = [100 \text{ V}]$. Complexes : $a + ib = 100 + 100i = 100\sqrt{2}e^{i\pi/4}$: même module, même argument. Les deux méthodes coïncident, comme attendu. Cohérence avec l'exercice 9 : en écrivant $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$, un $\varphi > 0$ traduit bien un **retard** du courant sur la tension.

7. (a) $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \left[\frac{1 - \cos 4x}{8}\right]$; $\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \left[\frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\right]$. (b) $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi = \left[\frac{\pi}{8}\right]$;

$\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$ donne $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \left[\frac{3\pi}{8}\right]$. (c) $\sin 2x \sin 3x = \frac{\cos x - \cos 5x}{2}$, dont l'intégrale sur $[0; 2\pi]$ vaut $[0]$; $\int_0^{2\pi} \sin^2(2x) \, dx =$

$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = [\pi]$. (d) $\sin(nx) \sin(mx) = \frac{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)}{2}$. Si $n \neq m$, les deux cosinus ont une intégrale nulle sur une période complète : le résultat est 0. Si $n = m$, le premier terme vaut $\cos 0 = 1$, dont l'intégrale sur $[0; 2\pi]$ vaut 2π , d'où $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Principe : l'intégrale $\int fg$ joue le rôle d'un **produit scalaire** entre fonctions. Deux harmoniques de rangs différents sont « orthogonales » ; extraire le coefficient de rang n d'un signal, c'est le projeter sur $\sin(nx)$ — exactement comme on projette un vecteur sur un axe (TD 1).

8. (a) i. $\sin i_2 = \frac{\sin 45^\circ}{1,5} \approx 0,471$, d'où $i_2 \approx 28,1^\circ$ (le rayon se rapproche de la normale en entrant dans le milieu le plus réfringent).

ii. Verre $\rightarrow$ air : la réfraction disparaît quand $\sin i_2 = 1$, soit $\sin i_\ell = \frac{1,00}{1,50}$, d'où $i_\ell \approx 41,8^\circ$. iii. C'est la **réflexion totale interne** : au-delà de i_ℓ , toute la lumière est réfléchi. C'est le principe des *fibres optiques* (et des prismes à réflexion totale des jumelles). (b)

i. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ avec $p = 2\pi f_1 t$ et $q = 2\pi f_2 t$ donne $f_{\text{moy}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ et $f_{\text{bat}} = \frac{|f_1 - f_2|}{2}$. ii. $f_{\text{moy}} = [442] \text{ Hz}$: c'est le **son entendu** (la hauteur perçue, intermédiaire entre les deux). $f_{\text{bat}} = [2] \text{ Hz}$: c'est l'*enveloppe* qui module lentement l'amplitude. iii. L'intensité étant proportionnelle au *carré* de l'amplitude, elle est maximale *deux fois* par période de l'enveloppe : l'oreille perçoit donc $2 \times 2 = [4]$ battements par seconde, soit exactement $|f_1 - f_2|$. Application : pour accorder un instrument, on ne cherche pas à « entendre la même note » — on ajuste jusqu'à ce que les battements **disparaissent**. Le procédé est d'une sensibilité remarquable : un écart de 0,5 Hz sur 440 Hz, soit 0,1 %, reste parfaitement audible sous forme d'un battement toutes les deux secondes.

9. (a) $p = 2UI \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$; avec $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$ où $a = \omega t$ et $b = \omega t - \varphi$: $p = UI[\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$. (b) $P = UI \cos \varphi$: le terme oscillant est un cosinus de période entière sur l'intervalle d'intégration, sa moyenne est donc nulle. *Seul le terme constant survit* — et c'est lui, la puissance réellement consommée. (c) p oscille à 2ω , soit le **double** de la fréquence du réseau : $[100 \text{ Hz}]$ pour un réseau à 50 Hz. C'est pourquoi un éclairage alimenté en alternatif scintille à 100 Hz, et non à 50. (d) p oscille entre $UI(\cos \varphi - 1)$ et $UI(\cos \varphi + 1)$. Dès que $\cos \varphi < 1$, la borne inférieure est *négative* : pendant une fraction de la période, le dipôle **restitue** de l'énergie à la source au lieu d'en absorber. C'est l'énergie temporairement stockée dans le champ magnétique de la bobine ou électrique du condensateur.

(e) $S = UI = [1150 \text{ VA}]$; $P = 1150 \times \frac{1}{2} = [575 \text{ W}]$; $Q = 1150 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx [996 \text{ var}]$; $\cos \varphi = [0,50]$. $p(t)$ oscille entre $575 - 1150 = -575 \text{ W}$ et $575 + 1150 = 1725 \text{ W}$. Un facteur de puissance de 0,5 signifie qu'il faut faire circuler 1150 VA pour ne délivrer que 575 W : le reste fait des allers-retours dans les câbles, où il provoque des pertes par effet Joule. D'où la facturation de dépassement de Q aux industriels. (f) $\varphi = 0$: $P = UI = S$, facteur de puissance de 1, $p(t) \geq 0$ à tout instant — la source ne restitue jamais rien, elle dissipe. $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\cos \varphi = 0$ donc $P = 0$: une bobine ou un condensateur *parfait* ne consomme **aucune** puissance active en moyenne, bien que $p(t)$ soit non nulle à chaque instant. Il échange de l'énergie, il n'en consomme pas. (g) En regroupant $v_2 + v_3 = 2V \cos(\omega t) \cos \frac{2\pi}{3} = 2V \cos(\omega t) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -V \cos(\omega t) = -v_1$, d'où $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Conséquence : dans une installation triphasée **équilibrée**, la somme des trois courants est nulle et le fil de neutre ne transporte **aucun** courant. C'est ce qui permet de le dimensionner plus faiblement — voire de s'en passer.

10. (a) $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha; v_0 \sin \alpha)$, d'où $x(t) = v_0 \cos \alpha \, t$ et $y(t) = v_0 \sin \alpha \, t - \frac{gt^2}{2}$. (b) $y = 0$ pour $t = 0$ ou $T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Alors

$$R = v_0 \cos \alpha \times T = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \left[\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}\right] \text{ — c'est bien la duplication } 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \text{ qui condense le résultat. (c)}$$

R est maximale quand $\sin(2\alpha) = 1$, soit $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = 45^\circ$; alors $R_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}$ (numériquement $\approx 40,8 \text{ m}$). *Aucune dérivation n'est nécessaire : le sinus est majoré par 1, et cette borne est atteinte.* (d) $\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$: les angles α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ donnent la même portée. L'identité en jeu est $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$. Le tir le plus *tendu* (α petit) et le tir le plus *courbe* sont équivalents en portée, mais $T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ croît avec α : c'est le tir courbe qui dure le plus longtemps (et monte le plus haut). (e) L'altitude est maximale

quand $\dot{y} = 0$, soit $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{T}{2}$; en reportant : $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. (f) Table :

α	R (m)	h (m)	T (s)
30°	35,3	5,10	2,04
45°	40,8	10,2	2,88
60°	35,3	15,3	3,53

30° et 60° (complémentaires) donnent **exactement la même portée**, mais la flèche est *triple* et la durée de vol 1,7 fois plus longue à 60°. En pratique on choisit le tir tendu : moins de temps de vol, donc moins de prise au vent et une trajectoire plus prévisible. (g)

$\sin(2\alpha) = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{30 \times 9,81}{400} \approx 0,736$, d'où $2\alpha \approx 47,4^\circ$ ou $2\alpha \approx 132,6^\circ$: $\alpha \approx 23,7^\circ$ ou $\alpha \approx 66,3^\circ$ (on vérifie qu'ils sont complémentaires).

(h) i. $P_t = mg \sin \alpha = 4,0 \times 9,81 \times \sin 25^\circ \approx \boxed{16,6 \text{ N}}$; $P_n = mg \cos \alpha \approx \boxed{35,6 \text{ N}}$. ii. $\mu = \frac{P_t}{P_n} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \tan \alpha$: la masse **se simplifie**.

$\mu = \tan 25^\circ \approx \boxed{0,47}$. On dispose ainsi d'un protocole de mesure élémentaire : incliner progressivement le plan jusqu'au décrochage, relever l'angle, prendre sa tangente. Aucune balance, aucun dynamomètre.