

Trigonométrie

Corrigé projeté, exercice par exercice

Outils mathématiques 1

B.U.T.1 Mesures Physiques

Exercice 0 — Test de positionnement

(a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(b) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; c'est $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sin 2x = 2 \sin x$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(d) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

VRAI (e) $\cos(-x) = -\cos x$
 $\cos$ est *paire* : $\cos(-x) = \cos x$

FAUX (f) $\sin x = 2$ a des solutions
 $\sin$ est à valeurs dans $[-1; 1]$

FAUX (g) $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$

VRAI (h) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

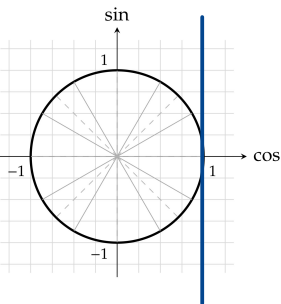
FAUX

FAUX

FAUX

VRAI

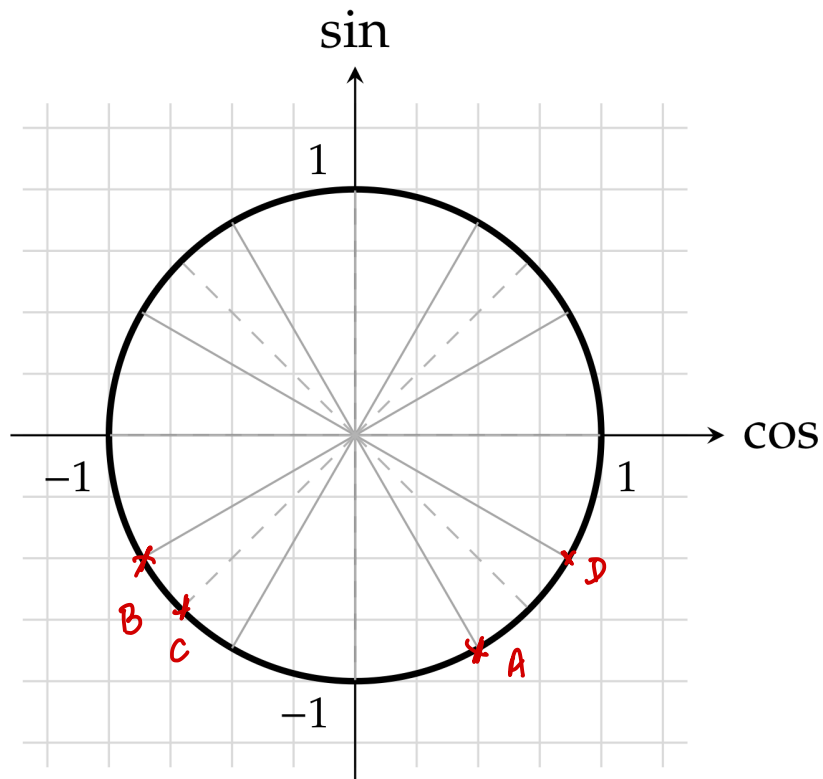
Exercice 1 — Valeurs remarquables



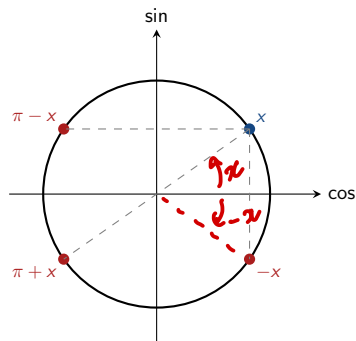
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	0

À retenir

Le **sinus** se lit en **ordonnée**, le **cosinus** en **abscisse**. La ligne des cosinus se lit de gauche à droite en *décroissant* de 1 à -1 : c'est la seule chose à mémoriser.

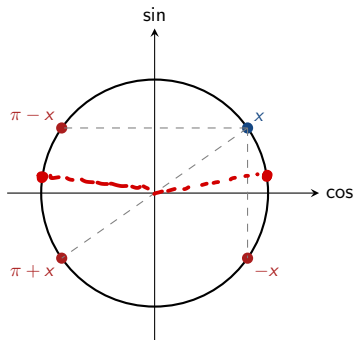


Exercice 1 — Angles associés : lire, ne pas apprendre



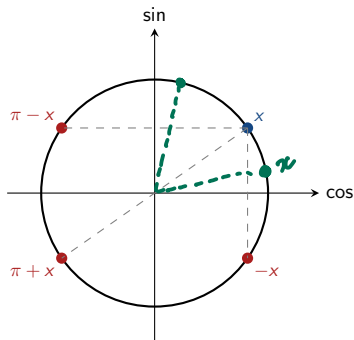
- $-x$: symétrie / axe des **abscisses**
 $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$

Exercice 1 — Angles associés : lire, ne pas apprendre



- $-x$: symétrie / axe des **abscisses**
 $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$
- $\pi - x$: symétrie / axe des **ordonnées**
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$

Exercice 1 — Angles associés : lire, ne pas apprendre



- $-x$: symétrie / axe des **abscisses**
 $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$
- $\pi - x$: symétrie / axe des **ordonnées**
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\pi + x$: symétrie / **origine**
 $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\frac{\pi}{2} - x$: symétrie / **première bissectrice**
 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ (échange)
 $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

À retenir

Huit formules, **une seule figure**. Redessiner le cercle coûte dix secondes et ne trompe jamais ; réciter de mémoire trompe souvent.

Exercice 1(d) — Simplifications

$$\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(2024\pi) = 1 \quad (2024 \text{ est pair})$$

$\cos(2025\pi) = -1$

À retenir

Toujours **retrancher les tours complets** d'abord (2π pour cos et sin, π pour tan). Le calcul se réduit alors à une valeur du tableau.

Exercice 1(d) — Simplifications

$$\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(2024\pi) = 1 \quad (2024 \text{ est pair})$$

À retenir

Toujours **retrancher les tours complets** d'abord (2π pour cos et sin, π pour tan). Le calcul se réduit alors à une valeur du tableau.

Exercice 2 — Les contre-exemples qui comptent

(a) $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

FAUX : $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$. En $x = \pi$: $\sqrt{1} = 1 \neq -1$.

(b) $\cos 2x = 2 \cos x$

FAUX : $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$. En $x = \frac{\pi}{2}$: $-1 \neq 0$.

(c) $\arcsin(\sin x) = x$

FAUX : vrai **seulement** si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. En $x = \pi$: $\arcsin 0 = 0 \neq \pi$.

(e) $\tan$ définie sur $\mathbb{R}$

FAUX : pas en $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

(f) $\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$

FAUX : $y = \pm x + 2k\pi$. $\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

À retenir

Un contre-exemple **bien choisi** vaut une démonstration. Les valeurs 0 , $\frac{\pi}{2}$ et π suffisent presque toujours à démolir une fausse identité.

Exercice 3(a) — La valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

On écrit $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis on applique la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966\end{aligned}$$

De même $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$, et $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$.

(b) $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$: les angles sont **complémentaires**, donc **aucun calcul** n'est nécessaire :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

À retenir

Décomposer l'angle en **somme ou différence d'angles connus** pour calculer des valeurs exactes.
Chercher ensuite les **complémentaires** évite de tout recalculer.

Exercice 3(a) — La valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

On écrit $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis on applique la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966\end{aligned}$$

De même $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$, et $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$.

(b) $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$: les angles sont **complémentaires**, donc **aucun calcul** n'est nécessaire :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

À retenir

Décomposer l'angle en **somme ou différence d'angles connus** pour calculer des valeurs exactes.
Chercher ensuite les **complémentaires** évite de tout recalculer.

Exercice 3(a) — La valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

On écrit $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis on applique la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,966\end{aligned}$$

De même $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$, et $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$.

(b) $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$: les angles sont **complémentaires**, donc **aucun calcul** n'est nécessaire :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

À retenir

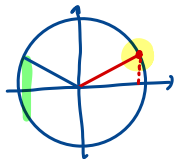
Décomposer l'angle en **somme ou différence d'angles connus** pour calculer des valeurs exactes.
Chercher ensuite les **complémentaires** évite de tout recalculer.

Exercice 3(c) — $\cos \frac{\pi}{8}$ par duplication (attention au signe)

On part de $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ avec $a = \frac{\pi}{8}$, donc $2a = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right)$$



$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$$

Exercice 3(c) — $\cos \frac{\pi}{8}$ par duplication (attention au signe)

On part de $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ avec $a = \frac{\pi}{8}$, donc $2a = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

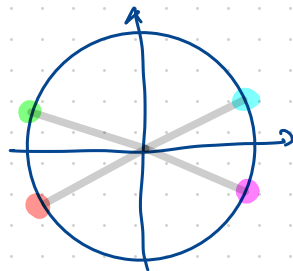
Le point délicat : l'équation donne $\cos^2$, donc **deux** racines possibles. Comme $\frac{\pi}{8}$ appartient au **premier quadrant**, son cosinus est **positif** :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0,924 \quad ; \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0,383$$

À retenir

Une formule de duplication donne toujours un **carré** : elle laisse le signe indéterminé. C'est le **quadrant** de l'angle — et lui seul — qui tranche.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \pm \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

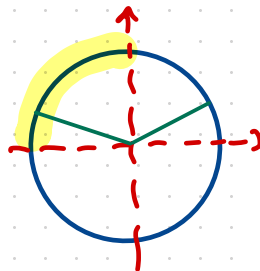
$$= \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(d) Sachant que $\sin \theta = \frac{5}{13}$ avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, calculer $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$.

$$\begin{cases} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta) \end{cases}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

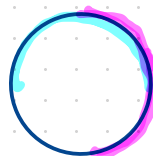


$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

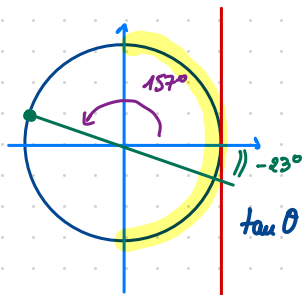
$$\tan \theta = \frac{5}{-12}$$

$$\theta = 180 - \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$$



$$\arccos\left(\frac{5}{-12}\right) = -23^\circ + 180^\circ = 157^\circ$$



$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\theta + \pi) \\ &= \tan(\theta - \pi) \end{aligned}$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cdot \left(\frac{-12}{13}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos(2\theta) = \left(\frac{-12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$a = b = 1$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\cancel{(a-b)}(a+b) = b\cancel{(a-b)}$$

$$a+b = b$$

$$a = 0$$



NE PAS DIVISER PAR ZÉRO !!

Exercice 4 — Trois identités typiques

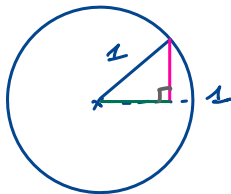
(a) $\sin^4 x - \cos^4 x$: reconnaître $a^2 - b^2$.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$(\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 =$$

$$(\sin^2 x) = (\sin x)^2$$

Val: $\forall x \in \mathbb{R}$



Exercice 4 — Trois identités typiques

(a) $\sin^4 x - \cos^4 x$: reconnaître $a^2 - b^2$.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$: tout écrire en fonction de x (et non de $2x$).

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

$$\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\cancel{\sin^2 x}}{2\cos x \cancel{\sin x}}$$

$$\forall x / \sin x \neq 0$$

$$\forall x \neq k\pi$$

$$\forall x \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \neq k\pi \\ \forall x \neq \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$$= \tan x \quad \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$$

Exercice 4 — Trois identités typiques

(a) $\sin^4 x - \cos^4 x$: reconnaître $a^2 - b^2$.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$: tout écrire en fonction de x (et non de $2x$).

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (x \neq k \frac{\pi}{2})$$

Exercice 4 — Trois identités typiques

(a) $\sin^4 x - \cos^4 x$: reconnaître $a^2 - b^2$.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$: tout écrire en fonction de x (et non de $2x$).

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (x \neq k\frac{\pi}{2})$$

(d) $\sin 3x$: écrire $3x = 2x + x$.

Exercice 4 — Trois identités typiques

(a) $\sin^4 x - \cos^4 x$: reconnaître $a^2 - b^2$.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$: tout écrire en fonction de x (et non de $2x$).

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (x \neq k \frac{\pi}{2})$$

(d) $\sin 3x$: écrire $3x = 2x + x$.

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

À retenir

Deux réflexes couvrent presque tout : **factoriser** (identités remarquables) et **tout ramener au même angle**. Ne jamais oublier de préciser le **domaine de validité** quand un dénominateur apparaît.

5. Résoudre des équations trigonométriques.

Résoudre dans $[0; 2\pi[$, puis donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

(a) $2 \cos x - 1 = 0$

(b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\tan x = 1$

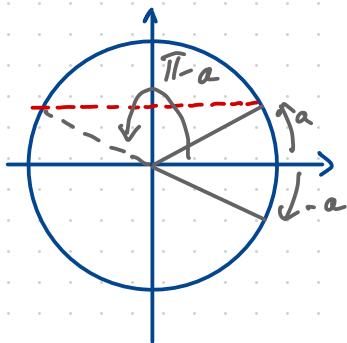
(d) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (poser $X = \cos x$)

(e) $\sin 2x = \sin x$ (~~tout ramener au même membre et factoriser~~ ne surtout pas « simplifier par $\sin x$ »)

(f) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ (tout exprimer en $\cos x$)

(g) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ (réduire d'abord à une seule sinussoïde)

(h) $\cos 3x = \sin x$ (utiliser $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$)



$\cos a = \cos b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & [2\pi] \\ a = -b & [2\pi] \end{cases}$

$\sin a = \sin b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & [2\pi] \\ b = \pi - a & [2\pi] \end{cases}$

7/9/26

(a) $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

ou $x = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

(b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} [2\pi] \\ x = \frac{7\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\pi/4 \\ x = -3\pi/4 \end{cases}$ dans $[-\pi; +\pi]$.

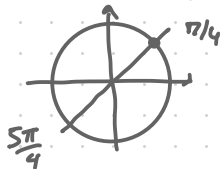
(c) $\tan x = 1 \quad \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad x \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = x & [2\pi] \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} - x = -x & [2\pi] \quad (2) \end{cases}$

$$① \quad 2x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



$$② \quad \frac{\pi}{2} - x = -x [2\pi]$$

$$0 = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ pas de solution}$$

(d) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (poser $X = \cos x$)

(e) $\sin 2x = \sin x$ ~~(tout ramener au même membre et factoriser ne surtout pas « simplifier par $\sin x$ »)~~

(f) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ (tout exprimer en $\cos x$)

(g) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ (réduire d'abord à une seule sinusoïde)

(h) $\cos 3x = \sin x$ (utiliser $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$)

(d) $X = \cos x$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = 9 = 3^2$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

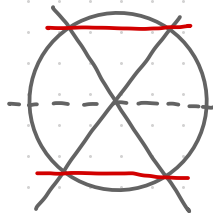
$$\text{ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} [2\pi] ; \pi [2\pi] ; \frac{5\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

(e) $\sin 2x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x [2\pi] \\ 2x = \pi - x [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 [2\pi] \\ 3x = \pi [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$



(f) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ (tout exprimer en $\cos x$)

(g) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ (réduire d'abord à une seule sinussoïde)

(h) $\cos 3x = \sin x$ (utiliser $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$)

(f) $2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 0$

$$-2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{Je pose } X = \cos x$$

$$2X^2 + 3X + 1 \quad -1 \leq X \leq 1$$

$$\Delta = 1 = 1^2$$

$$\Rightarrow X = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow X_1 = -1$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x_1 = X_1 = -1 \quad \cos(x_2) = X_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \pi [2\pi]$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2\pi}{3} \\ x_2 = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (\text{ou } -\frac{2\pi}{3})$$

$$S = \left\{ \pi [2\pi]; \frac{2\pi}{3} [2\pi]; \frac{4\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

(h) $\cos(3x) = \sin(x)$

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - x [2\pi] \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + x [2\pi] \end{array} \right.$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + x [2\pi]$$

$$4x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \left[\frac{2\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \left[\frac{2\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} [\pi]; \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

(g) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$

$$= R \cos(x - \varphi)$$

$$R = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour si } a < 0$$

$$= \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{R} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{R} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

9/9/26

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow x = 0 [2\pi] \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$S = \left\{ 0 [2\pi]; -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\}$$

6. Réduction à une seule sinusoïde et applications.

Toute somme $a \cos x + b \sin x$ se ramène à une seule sinusoïde $R \cos(x - \varphi)$, où R est l'amplitude et φ le déphasage (le maximum, atteint en $x = 0$ pour $\cos$, l'est ici en $x = \varphi$: le signal est « retardé » de φ).

(a) Développer $R \cos(x - \varphi)$ et, par identification avec $a \cos x + b \sin x$, retrouver $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et l'expression de φ .

$$\begin{aligned} R \cos(x - \varphi) &= R [\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi] \\ &= R \cos \varphi \cos x + R \sin \varphi \sin x \stackrel{?}{=} a \cos x + b \sin x \\ &\quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = R \cos \varphi \\ b = R \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = a/R \\ \sin \varphi = b/R \end{cases} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

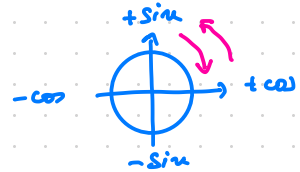
$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + b^2 &= R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi \\ &= R^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) = R^2 \\ &\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$7. \int_{-\pi}^{\pi} A \cos^2(x) dx = I$$

Rappel: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ou $F'(x) = f(x)$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(nx) \rightarrow \frac{\sin(nx)}{n}$$



$$I = \frac{A}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \frac{A}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx = \frac{A}{2} [x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{A}{2} (\pi + \pi) = A \cdot \frac{2\pi}{2} = A \cdot \pi.$$

7. Linéarisation, produits et intégrales.

(a) Linéariser $\sin^2 x \cos^2 x$ et $\cos^4 x$ (exprimer en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$ uniquement).

(b) En déduire $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ et $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$.

(c) Transformer en somme, puis calculer :

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x) \sin(3x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(2x) \, dx$$

(d) Relations d'orthogonalité. Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{4} ([1 - \cos(2x)][1 + \cos(2x)]) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \underbrace{\cos^2(2x)}_{\sin^2(2x)}) = \frac{1}{4} \left[\frac{1 - \cos(4x)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{8} [1 - \cos(4x)] \\ \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{8} \int_0^\pi 1 \, dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos(4x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} [x]_0^\pi = \frac{\pi}{8} = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \right]^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos(2x))^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos(4x)}{8} \\ &= \frac{3}{8} + f_{\text{alt}}(x) \\ \Rightarrow \int_0^\pi \sin^4 x \, dx &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

14/9/26

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx-mx) - \cos(nx+mx)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n-m)x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n+m)x) dx \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Si $n \neq m$ les fonctions sont alternatives $\Rightarrow I = 0$.

$$\text{Si } n = m \quad I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dx - 0 = \pi$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-m} \sin((n-m)x) + \frac{1}{n+m} \sin((n+m)x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

$n \neq m$

10. Application en mécanique du point : tir balistique.

Un projectile est lancé depuis l'origine avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ avec l'horizontale. On néglige les frottements et l'on prend g pour l'accélération de la pesanteur.

- (a) Écrire les composantes de $\vec{v}_0$, puis établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
 (b) Déterminer la *durée de vol* T (instant du retour en $y = 0$), puis montrer que la **portée** vaut

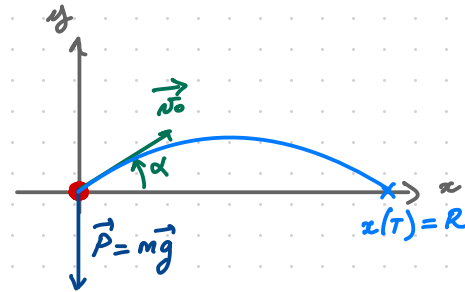
$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

C'est la formule de duplication $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ qui fait tout le travail : la repérer dans le calcul.

- (c) Pour quelle valeur de α la portée est-elle **maximale**? Que vaut alors $R_{\max}$? Justifier par une propriété de la fonction sinus, sans dérivation.

- (d) Montrer que deux angles de tir distincts donnent la **même** portée, et qu'ils sont **complémentaires** (α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$).
 Sur quelle identité trigonométrique repose ce résultat? Lequel des deux tire le plus longtemps?

- (e) Établir l'expression de la *flèche* (altitude maximale) $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.



$$\text{On pose } x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{P} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{1}{m} \times 0$$

$$\frac{d\vec{v}_y}{dt} = \frac{1}{m} (-mg) = -g$$

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_x = 0 + \vec{v}_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$\frac{d\vec{v}_y}{dt} = -g \Rightarrow \vec{v}_y = -gt + \vec{v}_{0y} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha + 0 \\ y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 + 0 \end{cases}$$

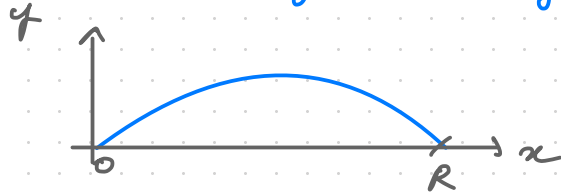
$$y=0 \Leftrightarrow t=T$$

$$\Leftrightarrow 0 = v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\Leftrightarrow T \left(v_0 \sin \alpha - \frac{gT}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow T=0 \text{ ou } T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow x(T) = R = \frac{v_0 T \cos \alpha}{1} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$



$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$R = R_{\max} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \alpha = 45^\circ$$

(d) Soient A et B deux angles qui ont le même R

$$\text{alors : } \sin(2A) = \sin(2B)$$

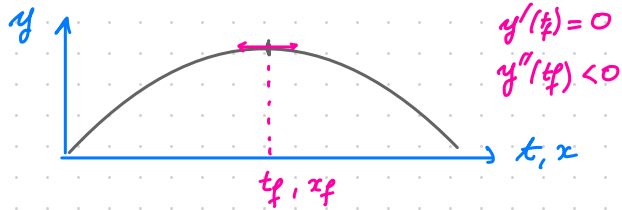
$$\begin{cases} 2A = 2B \Leftrightarrow A = B \\ 2A = \pi - 2B \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} - B \end{cases}$$

Deux angles ont même portée s'ils sont complémentaires
à $\frac{\pi}{2}$ (ou 90°)

16/9/26

(c) $y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad v_y = 0$$



En t_f , $y = y_{\max}$ et $v_y = 0$.

Wanted: t_f puis h

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$t_f / v_y(t_f) = 0 \Leftrightarrow 0 = -gt_f + v_0 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\begin{aligned} h = y(t_f) &= v_0 t_f \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_f^2 \\ &= v_0 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha \\ h &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}$$

(f)

α	R (m)	h (m)	T (s)
30°	35,3	5,10	2,04
45°	40,8	10,2	2,88
60°	35,3	15,3	3,53

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad \frac{(m/s)^2}{m/s^2}$$

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \frac{m/s}{m/s^2}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \frac{(m/s)^2}{m/s^2}$$

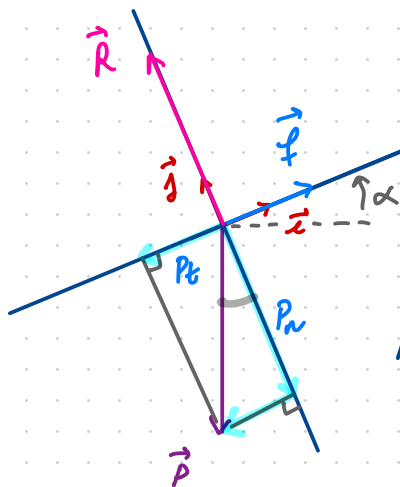
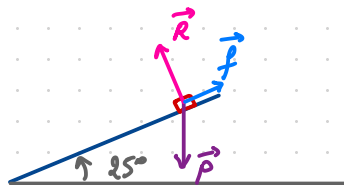
$$(g) \quad R = 30 = \frac{20^2}{9,81} \sin(2\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 0,736 \quad \arcsin(0,736) = 47,4^\circ$$

$$\sin(2\alpha) = \sin(47,4^\circ)$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 47,4^\circ \Rightarrow \alpha = 23,7^\circ \\ 2\alpha = 180^\circ - 47,4^\circ \simeq 132^\circ \Rightarrow \alpha \simeq 66,3^\circ \end{cases}$$

(h)



$$\begin{aligned} P_t &= -mg \sin \alpha \\ P_n &= -\|\vec{P}\| \cdot \cos \alpha \\ &= -mg \cos \alpha \end{aligned}$$

$$P_t = -4 \times 9,81 \times \sin(25^\circ) = -16,6$$

$$\Rightarrow f = 16,6 \text{ N}$$

$$P_n = -4 \times 9,81 \times \cos(25^\circ) = -35,6 \Rightarrow R = 35,6 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{P_t}{P_n} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$