

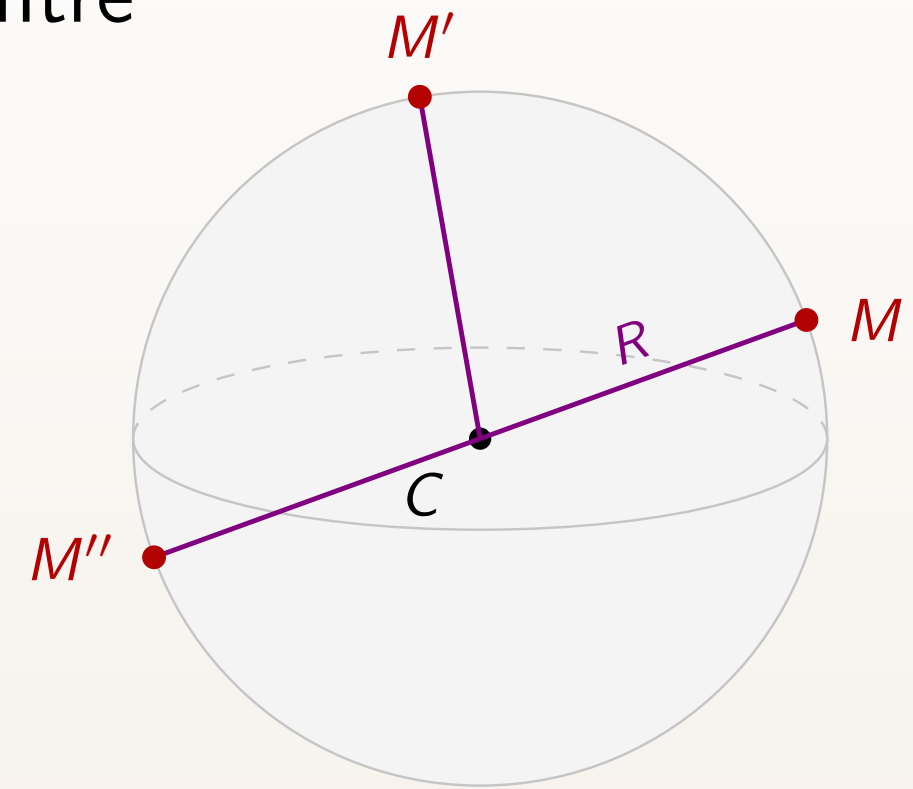
Sphères

Une sphère décrit les points situés à la distance R du centre

$$\mathcal{S} = \{M(x ; y ; z) / CM = R\}$$

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{pmatrix}$$

$$CM^2 = R^2 = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} \text{ avec le carré scalaire}$$



Équation canonique de $\mathcal{S}$ de centre C et de rayon R

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2$$

Remarques :

- pas de forme paramétrique cartésienne dans l'espace pour la sphère
- la forme paramétrique est utile pour décrire un **cercle**

Questions

1. Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 7)^2 = 16$

Centre $C(2; -2; 7)$ et rayon $R = 4$

2. Déterminer l'équation cartésienne canonique de la sphère de centre $(2; 1; -3)$ et de rayon 5.

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 25$$

3. $\left\{ M(x, y, z) / (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = -4 \right\}$ est-il une sphère ?

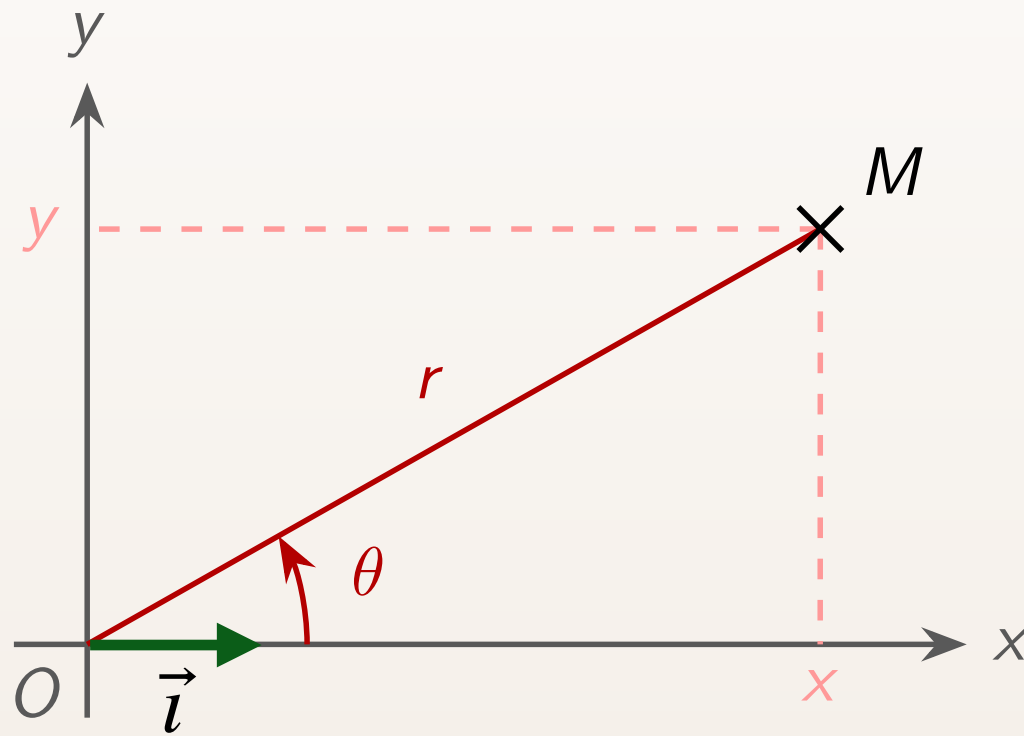
Non car $R^2 < 0 \implies R \notin \mathbb{R}$

Chapitre 3 : Systèmes de coordonnées

Coordonnées polaires

Des **coordonnées du plan** :

- intuitives : « Marchez trois pas vers le nord-est »
-  la référence n'est pas le nord



Rappel : M a les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$

$r = OM$ est la **coordonnée radiale**, $r \geq 0$

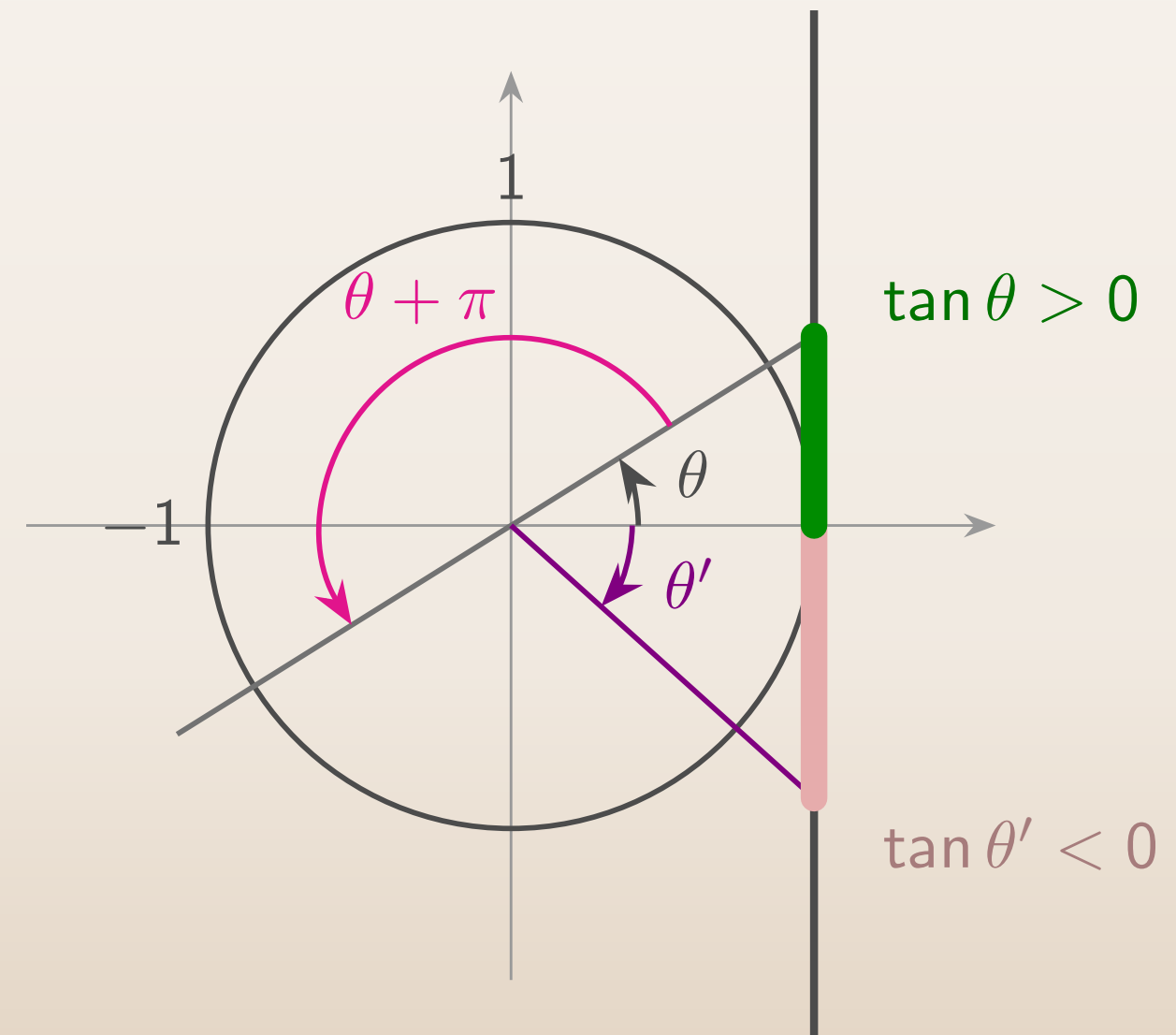
$\theta = \langle \vec{i}, \overrightarrow{OM} \rangle$ est la **coordonnée angulaire**, $\theta \in [-\pi ; \pi]$

Polaires $\rightarrow$ cartésiennes

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Cartésiennes $\rightarrow$ polaires

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\pm \frac{1}{2} \text{ tour si } x < 0\right) \end{cases}$$



Questions

1. Quelles coordonnées cartésiennes pour $r = 2$ et $\theta = 10^\circ$?

$$x = r \cos \theta = 1,97 \text{ et } y = r \sin \theta = 0,347 \quad \text{Attention, ce sont des } \mathbf{degrés}$$

2. Quelles coordonnées cartésiennes pour $r = 4$ et $\theta = 100^\circ$?

$$x = -0,695 \text{ et } y = 3,94$$

3. Quelles coordonnées polaires pour $x = 1$ et $y = 4$?

$$r = \sqrt{17} \text{ et } \theta = \arctan\left(\frac{4}{1}\right) = 76,0^\circ$$

4. Quelles coordonnées polaires pour $x = -1$ et $y = 7$?

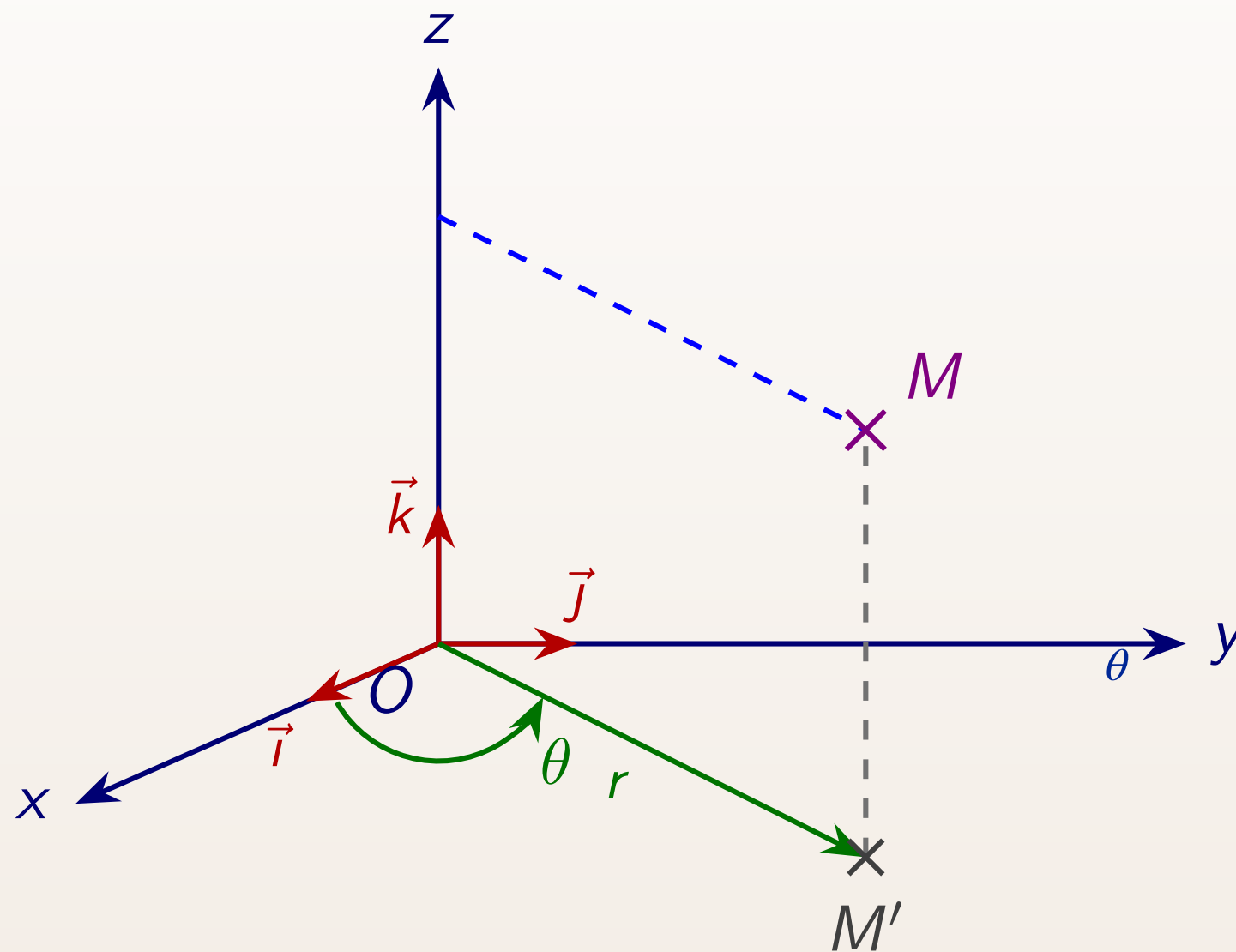
$$r = \sqrt{50} \text{ et } \theta = -81,9^\circ + \underbrace{180^\circ}_{x < 0} = 98,1^\circ$$

5. Quelles coordonnées polaires pour $x = -1$ et $y = -7$?

$$r = \sqrt{50} \text{ et } \theta = 81,9^\circ - \underbrace{180^\circ}_{x < 0} = -98,1^\circ$$

Coordonnées cylindriques

Des **coordonnées de l'espace** : des polaires en 3D



$r \geq 0$ est la **coordonnée radiale**

$\theta \in [-\pi ; \pi]$ est la **coordonnée angulaire**

z est la **côte**

1. Je relève la côte z

2. Je projète M sur $(xOy) \longrightarrow M'$

3. Je relève $r = OM'$ la coordonnée radiale

4. Je relève $\theta = \langle \vec{i}, \overrightarrow{OM'} \rangle$ la coordonnée angulaire

- Mêmes **relations** avec les cartésiennes que les polaires, en ajoutant la côte
- Si $r = \text{cste}$ et que z et θ varient : on trace un **cylindre**

Questions

1. Soit M de coordonnées cartésiennes $(x; y; z) = (\sqrt{3}; 1; 4)$. Déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$.

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = 2 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \quad \Rightarrow (r; \theta; z) = \left(2; \frac{\pi}{6}; 4\right)$$

2. Soit M de coordonnées cartésiennes $(x; y; z) = (-1; \sqrt{3}; 5)$. Déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$.

$$\begin{aligned} z &= 5 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow (r; \theta; z) = \left(2; \frac{2\pi}{3}; 5\right)$$

3. Soit le point M de coordonnées cylindriques $(r; \theta; z) = \left(4; \frac{5\pi}{6}; -2\right)$. Déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y; z)$.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = 4 \frac{-\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} & y &= r \sin \theta = 4 \frac{\sqrt{1}}{2} = 2 & z &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow (x; y; z) = (-2\sqrt{3}; 2; -2)$$