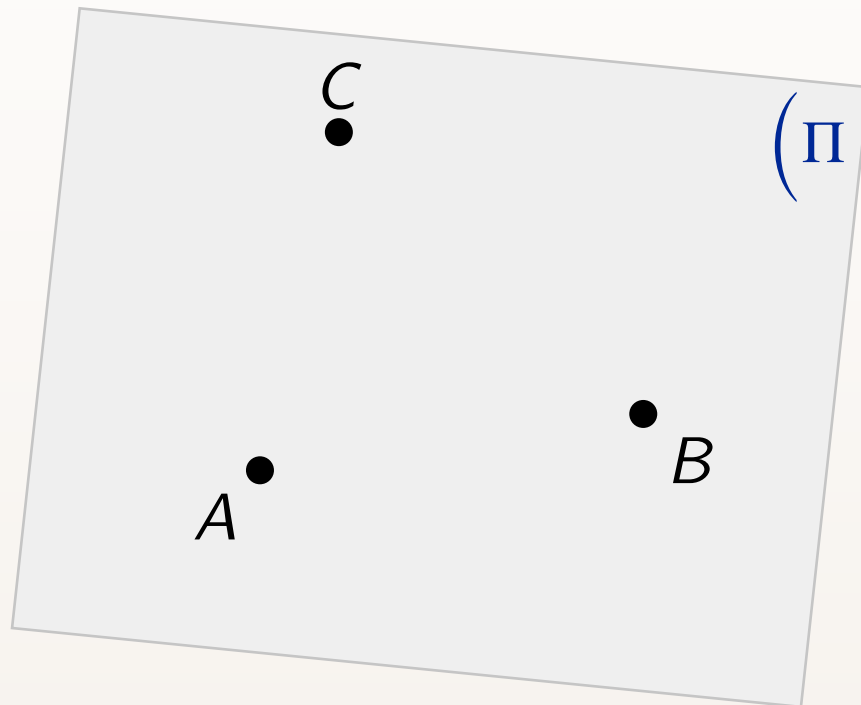
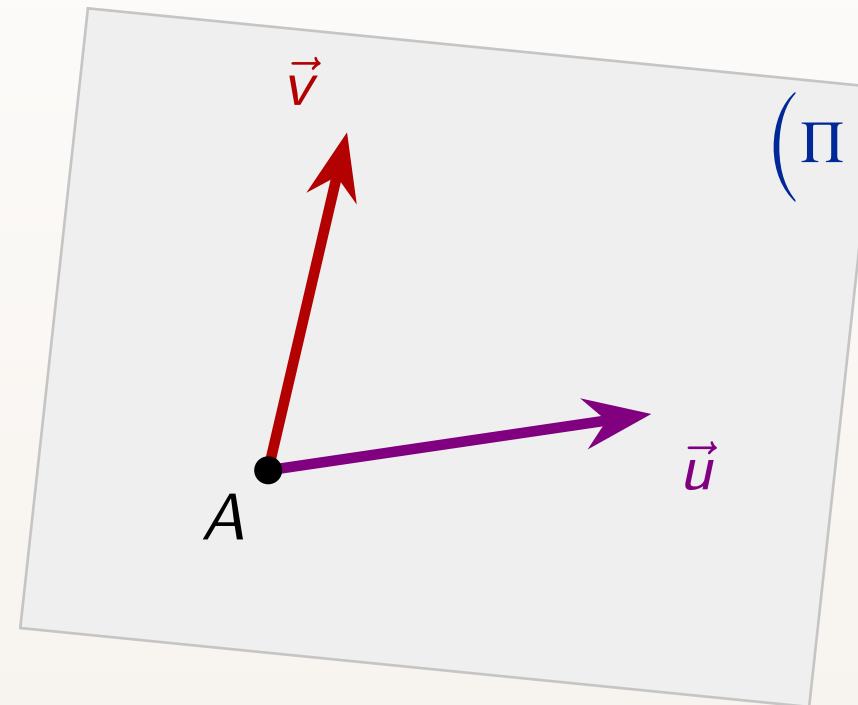


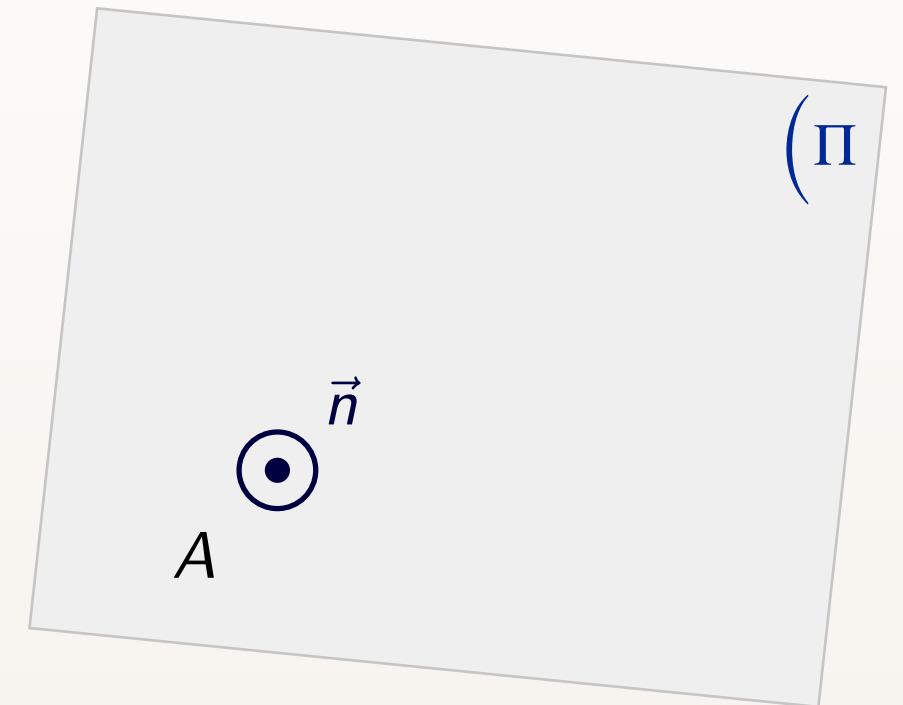
Plans de l'espace



Trois points **non-alignés**



Un point et deux vecteurs
non-colinéaires



Un point et un vecteur **normal**

Se ramènent au cas du vecteur normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \left\{ M(x ; y ; z) / \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = 0 \iff ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_{d \in \mathbb{R}} = 0$$

Une équation canonique de Π de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Questions

1. Donner une équation du plan Π_1 de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par $A(2 ; 1 ; 5)$
- $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff x + 4y - 2z + d = 0$$

$$A \in \Pi_1 \implies 2 + 4 - 10 + d = 0 \implies d = 4 \implies x + 4y - 2z + 4 = 0$$

2. Le point $A(2 ; 1 ; 5)$ appartient-il au plan Π_2 d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$?

$$1 \times 2 + 2 \times 1 - 1 \times 5 + 2 = 1 \neq 0 \implies A \notin \Pi_2$$

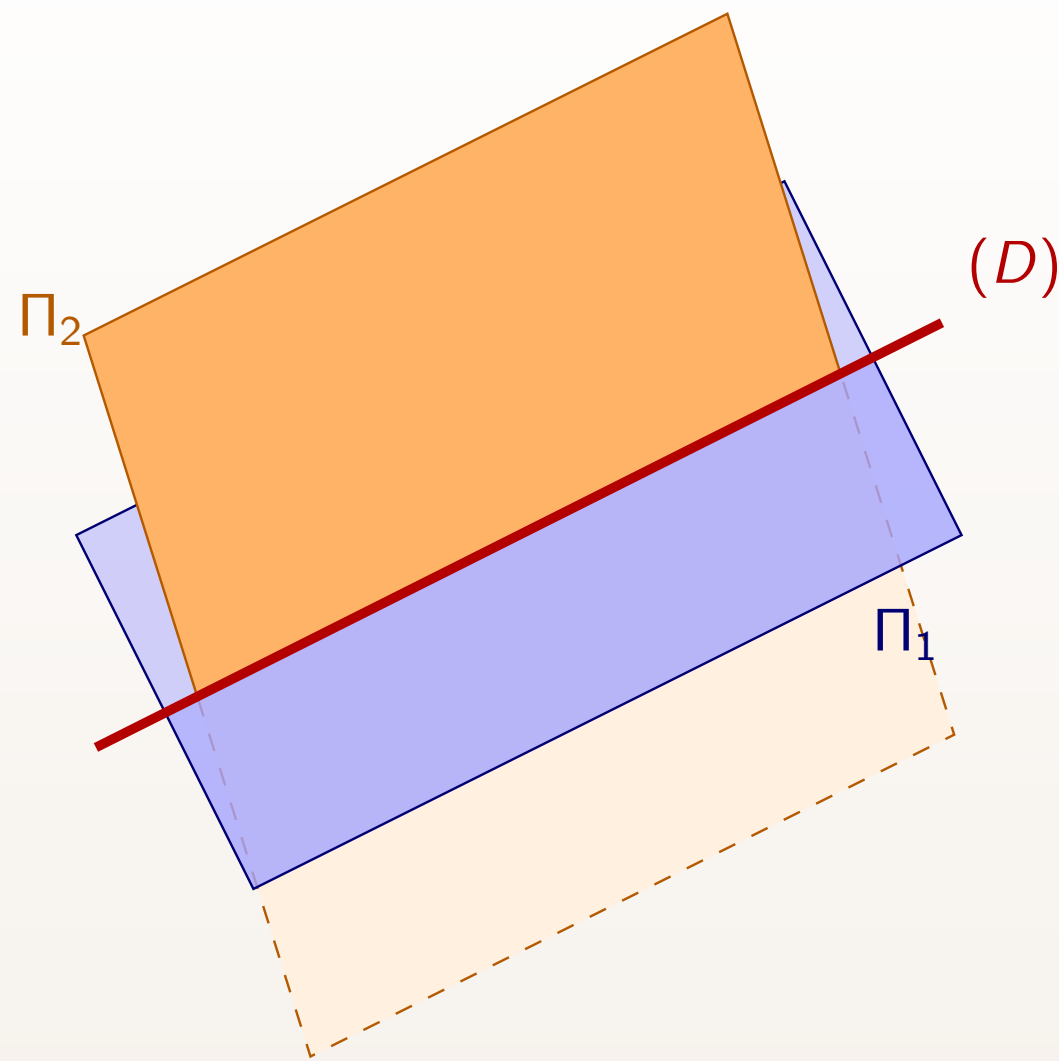
3. Donner une équation du plan Π_2 contenant $A(2 ; 1 ; 5)$, $B(3 ; 5 ; 4)$ et $C(1 ; 2 ; -1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 5 - 1 \\ 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \iff -23x + 7y + 5z + d = 0$$

$$A \in \Pi_2 \implies -46 + 7 + 25 + d = 0 \implies d = 14 \implies -23x + 7y + 5z + 14 = 0$$

Droites de l'espace



Intersection de deux plans

$$M(x ; y ; z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

⚠ Il y a plus d'inconnues que d'équations

$$\mathcal{D} = \left\{ M(x ; y ; z) / \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

Un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u} = (x_u ; y_u ; z_u)$ et passant par A

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

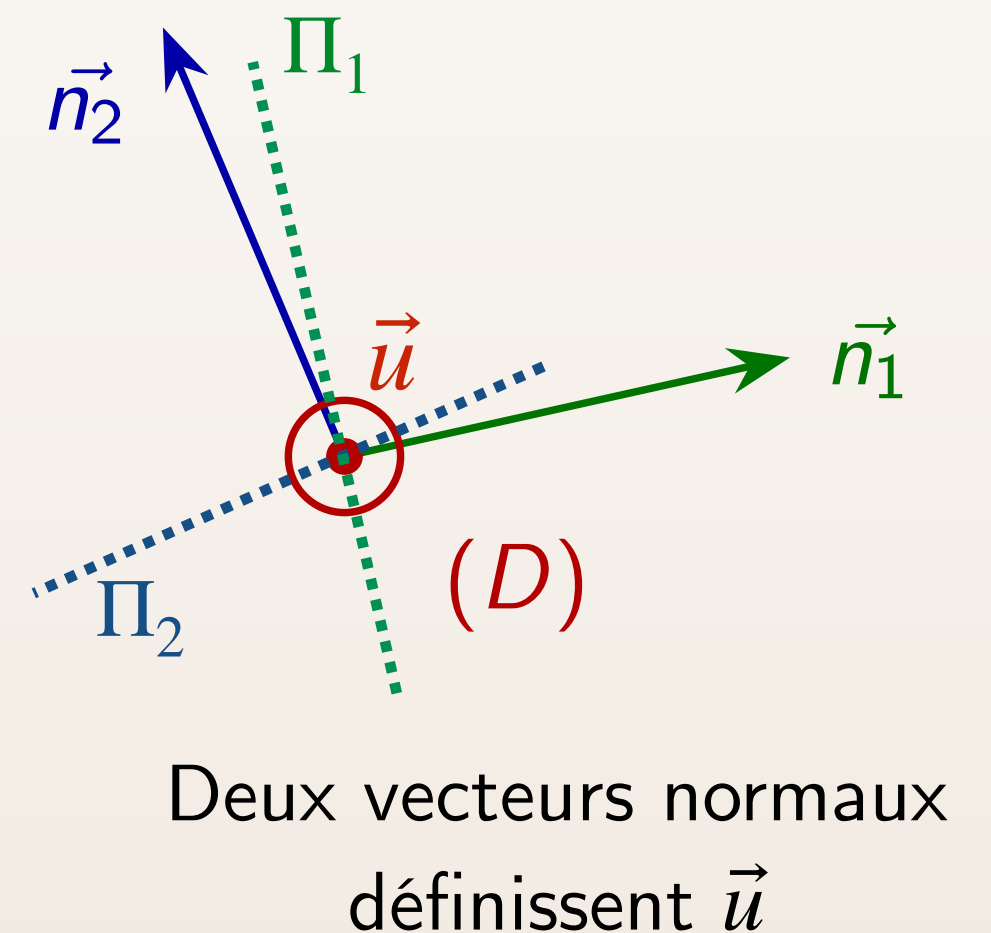
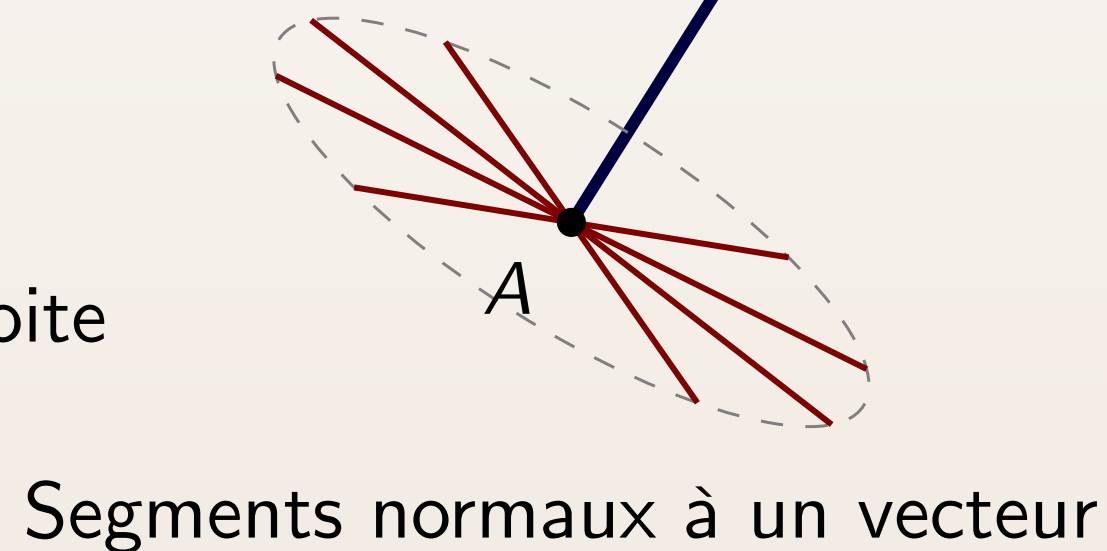
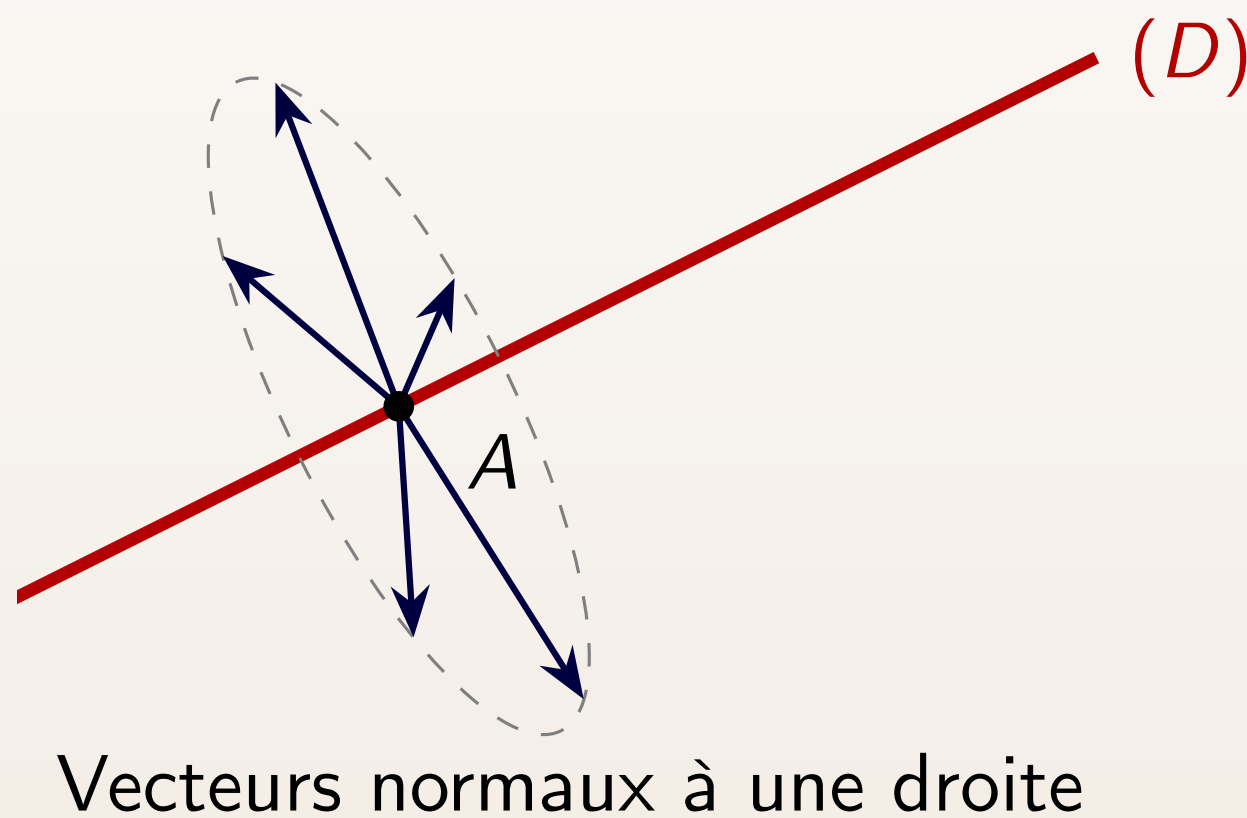
A diagram showing a line $\mathcal{D}$ in perspective. A point A is marked on the line. A red arrow labeled $\vec{u}$ originates from A and points along the line. A point $M(x ; y ; z)$ is also marked on the line.

Un point et un vecteur directeur

$$\begin{cases} x = t \cdot x_u + x_A \\ y = t \cdot y_u + y_A \\ z = t \cdot z_u + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Droites de l'espace : remarques

Remarque 1 : Dans l'espace, il existe une **infinité de directions** normales à une autre
 $\implies$ on ne peut pas utiliser un seul vecteur normal, il en faut au moins deux



Remarque 2 : Dans l'espace, on **ne peut pas** décrire une droite avec une seule équation

Questions

1. Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$ de vecteur directeur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et passant par } A(2 ; 1 ; 5)$$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 4t + 1 \\ z = -2t + 5 \end{cases}$$

2. Déterminer les coordonnées du point B de côte nulle appartenant à $\mathcal{D}_1$

$$z = 0 \implies t = \frac{5}{2} \implies x = \frac{9}{2} \implies y = 11 \implies B\left(\frac{9}{2} ; 11 ; 0\right)$$

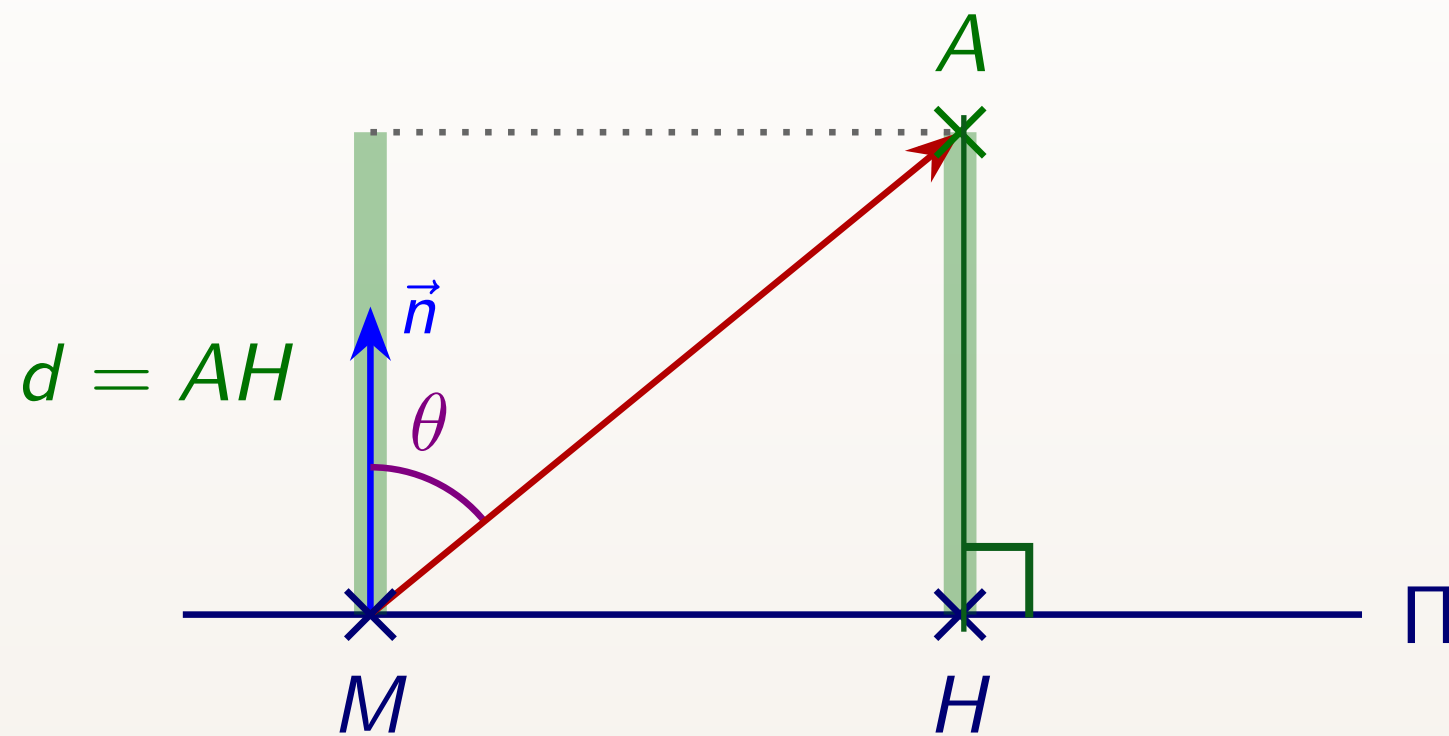
3. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$ définie par l'intersection des plans $\Pi_1 : 3x - y + 2z + 4 = 0$ et $\Pi_2 : -x + 2y + 3z - 1 = 0$

La droite est dans les deux plans donc orthogonale aux deux vecteurs

$\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$ et $\vec{n}_2 = (-1; 2; 3)$. Elle est donc dirigée par

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Distance point-plan



H : projection orthogonale de A sur Π

M : point quelconque de Π

On connaît :

- les coordonnées de A
- l'équation du plan

On cherche : d la distance entre A et le plan Π

$$d = AH = MA \cdot |\cos \theta|$$

$$= \frac{MA \cdot \|\vec{n}\| \cdot |\cos \theta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot |\cos \theta|}{\|\vec{n}\|}$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Application

Calculer, avec trois chiffres significatifs, la distance $d = d(A; \Pi)$ la distance entre le point $A(8 ; 3 ; 1)$ et le plan Π d'équation $3x - 2y + z + 2 = 0$.

$$d = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{avec } \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

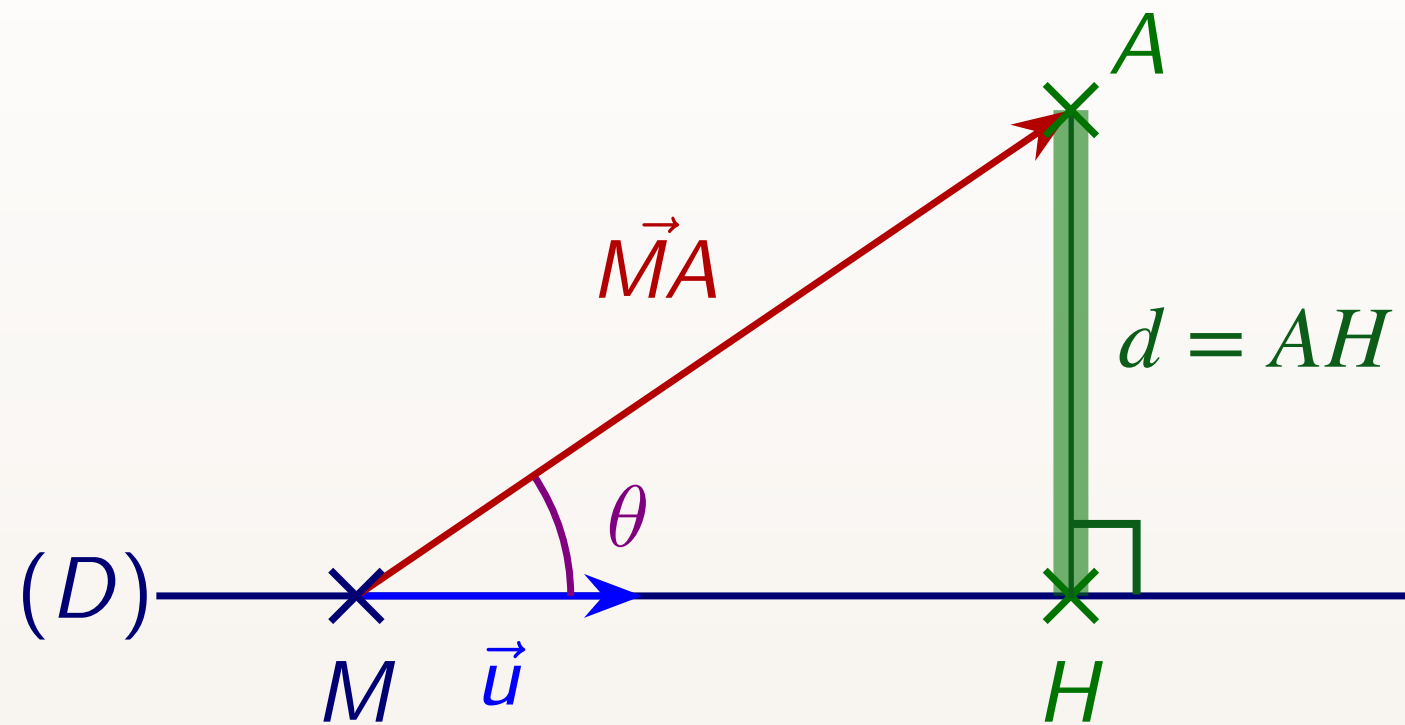
Je choisis $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en prenant trois coordonnées qui vérifient l'équation de Π

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 21 \quad \text{et } \|\vec{n}\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow d = \frac{21}{\sqrt{14}} \simeq 5,61 \text{ unités de longueur}$$

Distance point-droite



On connaît :

- les coordonnées de A
- les équations paramétriques de (D)

On cherche : d la distance entre A et la droite (D)

H : projection orthogonale de A sur (D)

M : point quelconque de (D)

$$d = AH = MA \cdot |\sin \theta|$$

$$= \frac{MA \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\sin \theta|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\sin \theta|}{\|\vec{u}\|}$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Remarque : c'est l'aire du rectangle de côtés d et $\|\vec{u}\|$ divisé par sa longueur $\|\vec{u}\|$

Application

Calculer, avec trois chiffres significatifs, la distance $d = d(A; \mathcal{D})$ la distance entre le point $A(4 ; 0 ; 2)$ et la droite $\mathcal{D}$ ayant pour équations paramétriques :

$$d = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Je choisis $M \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en posant $t = 0$ dans les équations de $\mathcal{D} \implies \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{16 + 9 + 16} = \sqrt{41}$$

$$\text{et } \|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\implies d = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \simeq 4,53 \text{ unités de longueur}$$