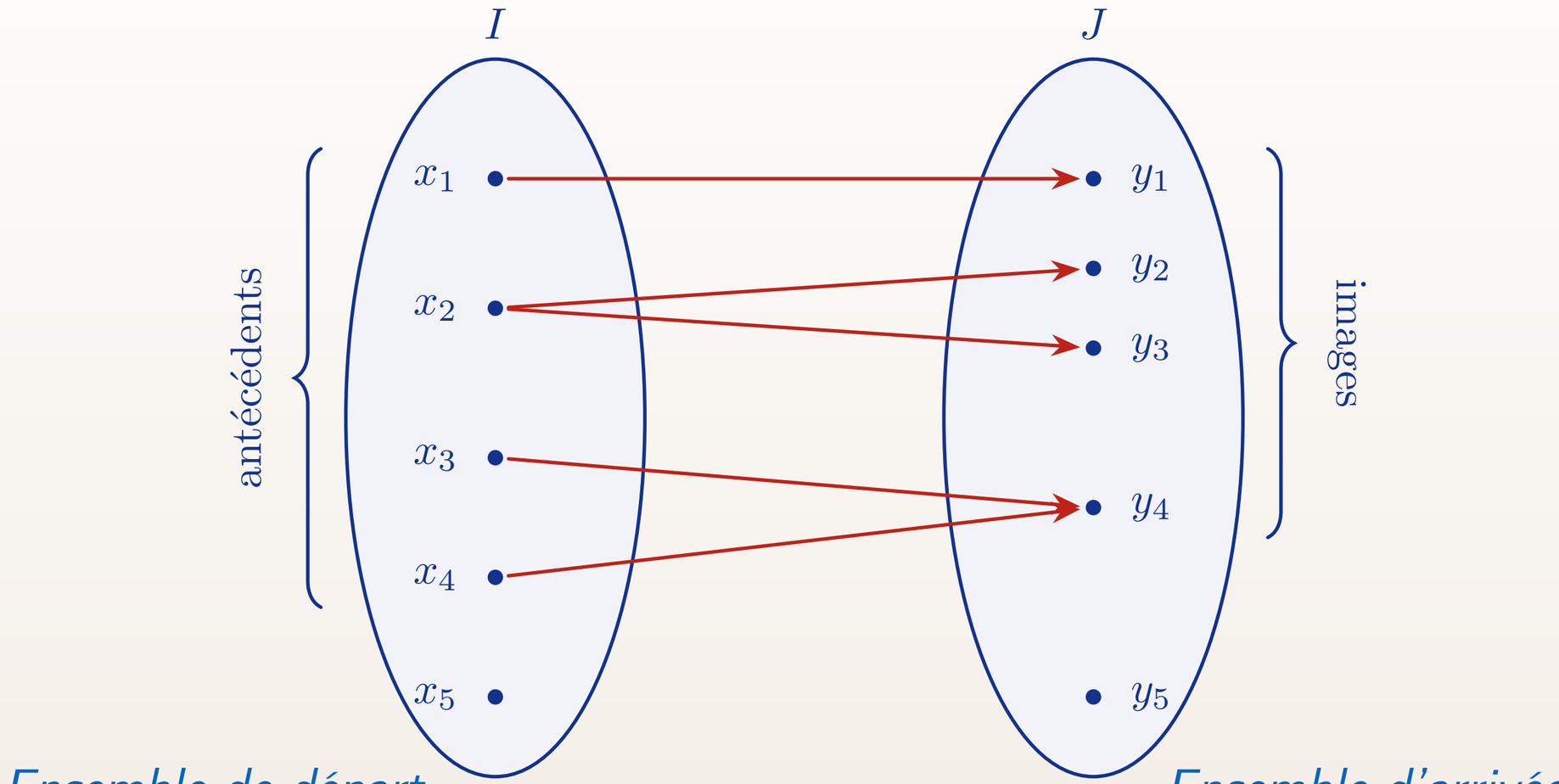
Chapitre 5 : Fonctions numériques

Relations



$$\mathscr{R} : I \longrightarrow J$$

$$x \longmapsto y$$

Pourquoi cette relation n'est-elle **pas** une fonction ?

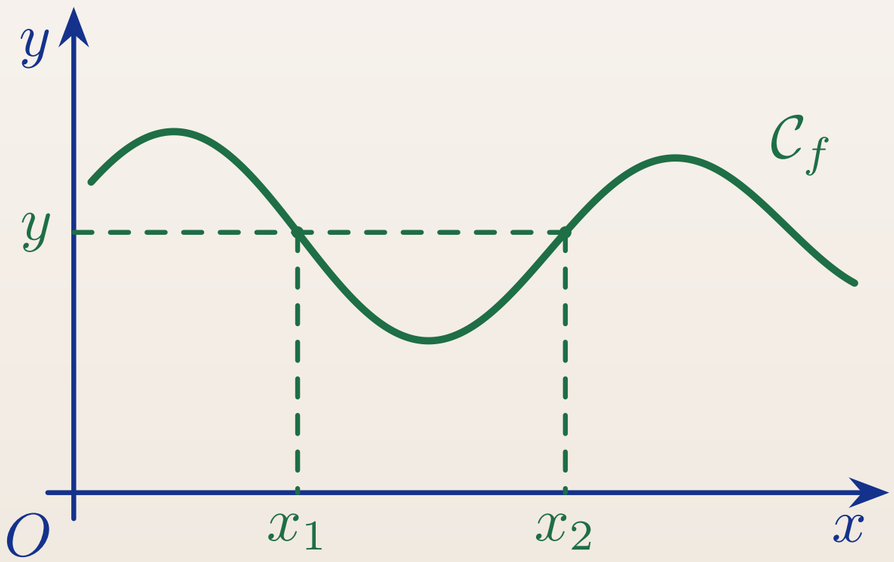
→ *parce que x_2 a deux images*

Fonction numérique

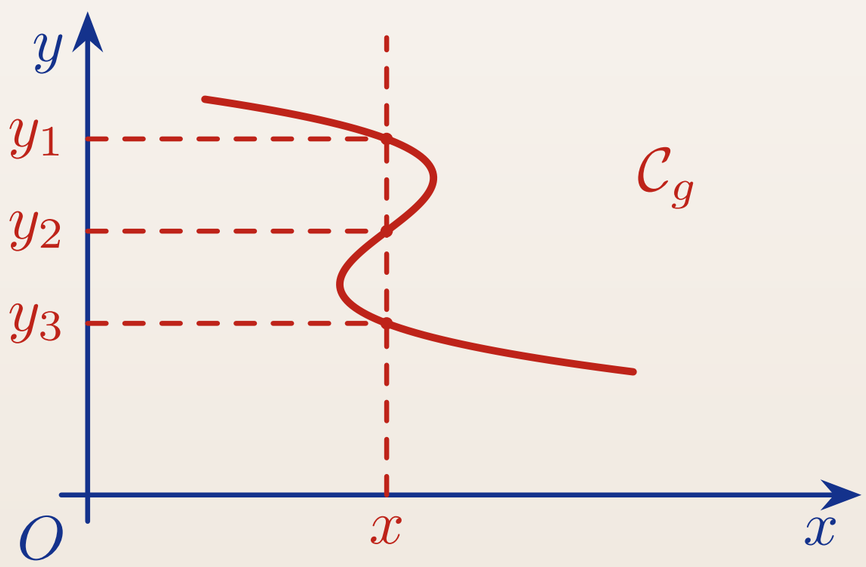
Une relation f est une **fonction** $\Longleftrightarrow$ chaque élément $x \in I$ a **au maximum** une image $y \in J$

Courbe représentative (ou graphe) de f : $\mathscr{C}_f = \left\{ M(x\,;y) \;\middle/\; y = f(x) \right\}$

f est l'équation de $\mathscr{C}_f$



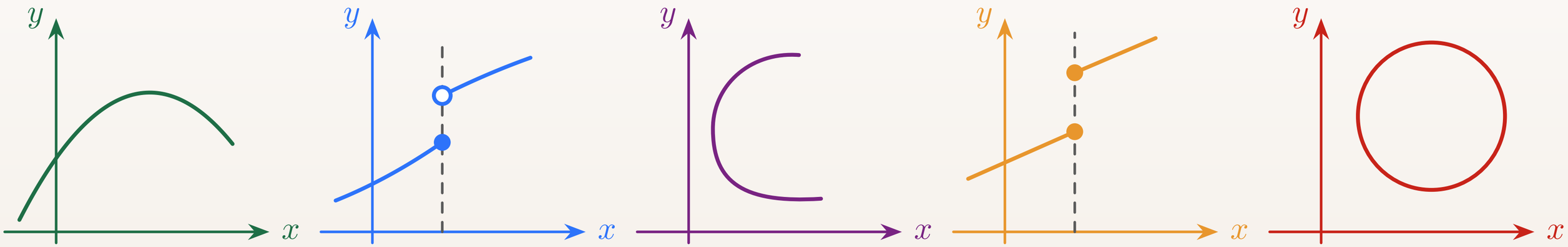
$\mathscr{C}_f$ est le graphe d'une fonction



$\mathscr{C}_g$ ne représente pas une fonction

Question

Puis-je utiliser une fonction pour décrire chacune des courbes suivantes ?



(a) **Oui**

(b) **Oui**

(c) **Non**

(d) **Non**

(e) **Non**

Définitions et notations

f est numérique $\iff$ $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$

Ensemble de définition de f : $\mathscr{D}_f = \left\{ x \in I \;\middle/\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}$

avec $\mathbb{R} = \left]-\infty\,;+\infty\right[$

De plus,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \;\forall g(x) \neq 0$$

Composition de fonctions :

$$x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x) \overset{g}{\longmapsto} z = g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x)$$

« g rond f » ou « g de f »

Questions

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$\mathscr{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle/\, x - 1 \neq 0 \right\} = \mathbb{R}\backslash\{1\} =]-\infty;\, 1[\cup]1;+\infty[$$

$$g(x) = \sqrt{x+1}$$

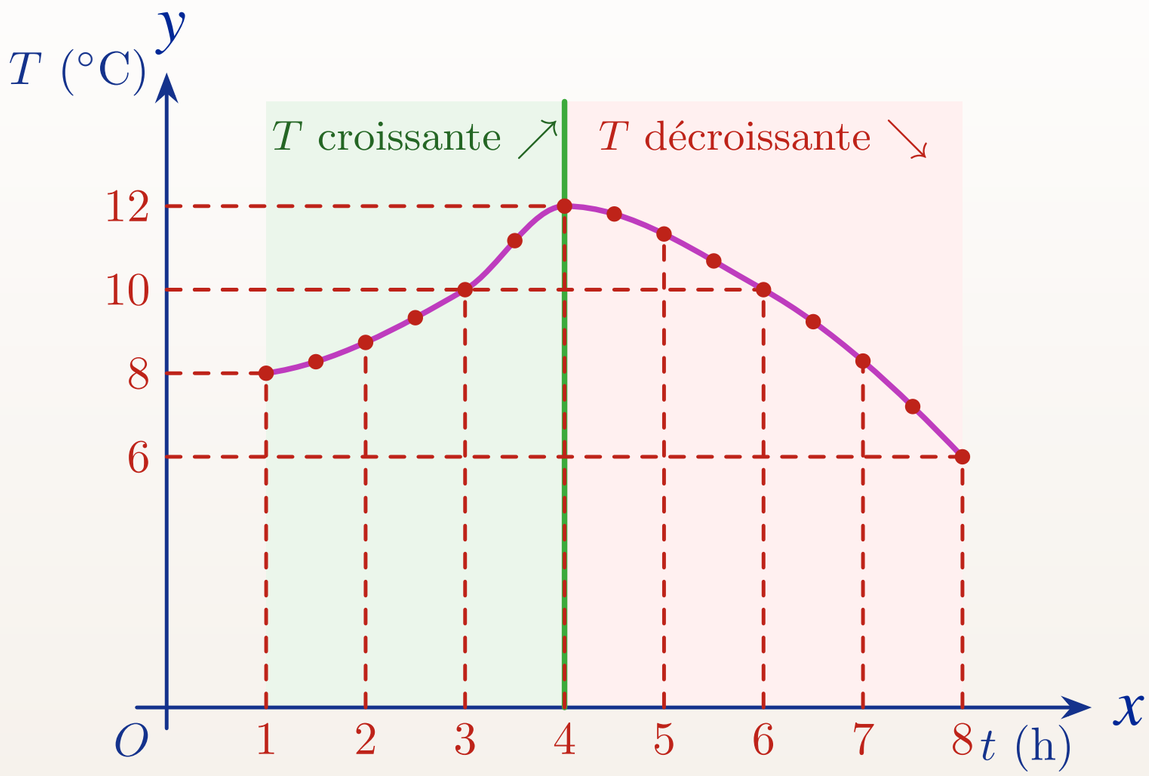
$$\mathscr{D}_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle/\, x + 1 \geq 0 \right\} = \left[-1\,;+\infty \right[$$

$$h(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$$

$$\mathscr{D}_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle/\, x^2 - 1 > 0 \right\} = \left] -\infty\,;-1 \right[\cup \left] 1\,+\infty \right[$$

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines

Caractéristiques des graphes



La description d'un graphe ou d'une fonction dépend de **l'intervalle d'étude**

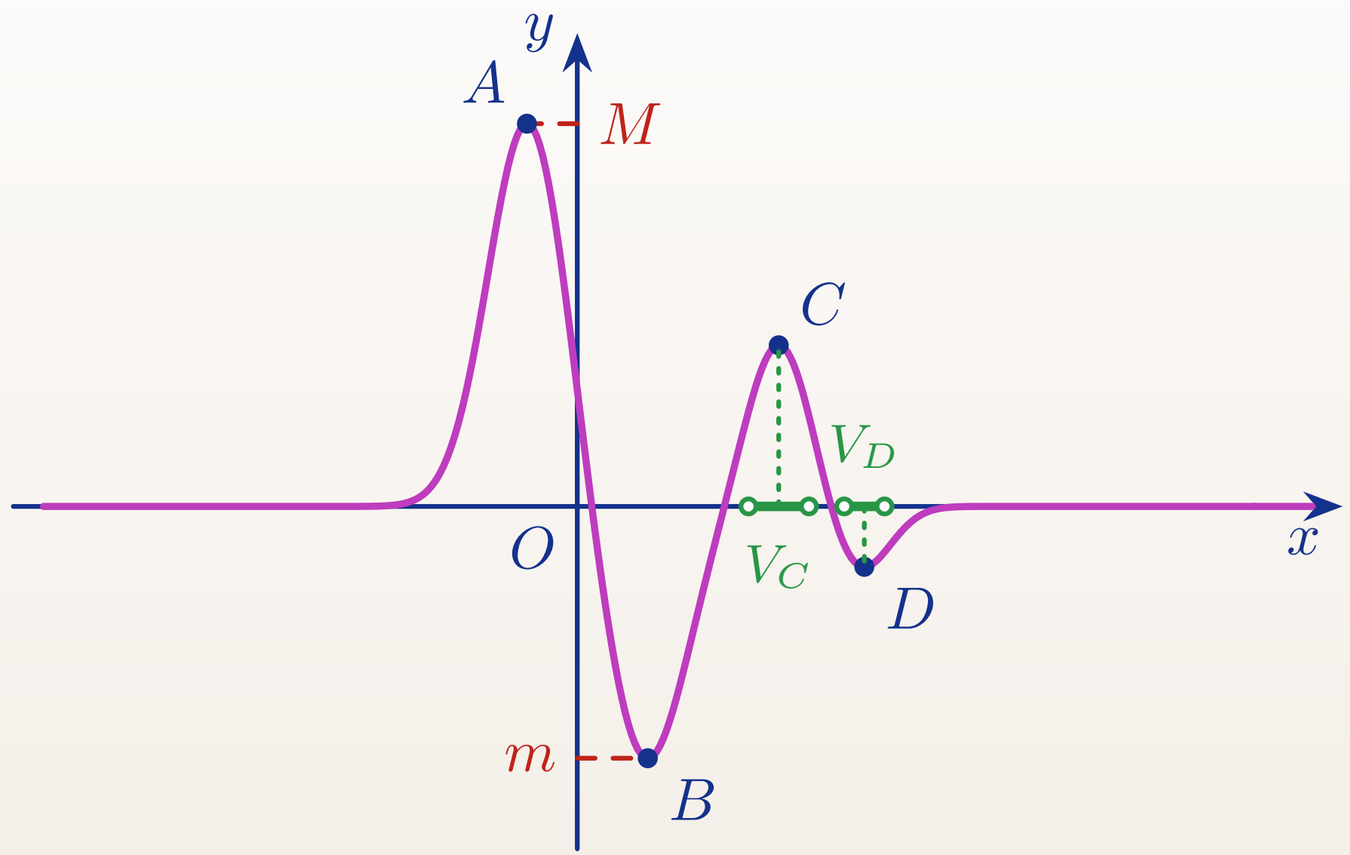
f strictement croissante $\iff x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$

f strictement décroissante $\iff x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$

Taux d'accroissement : $A = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$

- pertinent là où f est monotone
- f strictement croissante $\iff A > 0$

Extrema et bornes



A : maximum **global** de valeur M

B : minimum **global** de valeur m

C : maximum **local** (voisinage V_C)

D : minimum **local** (voisinage V_D)

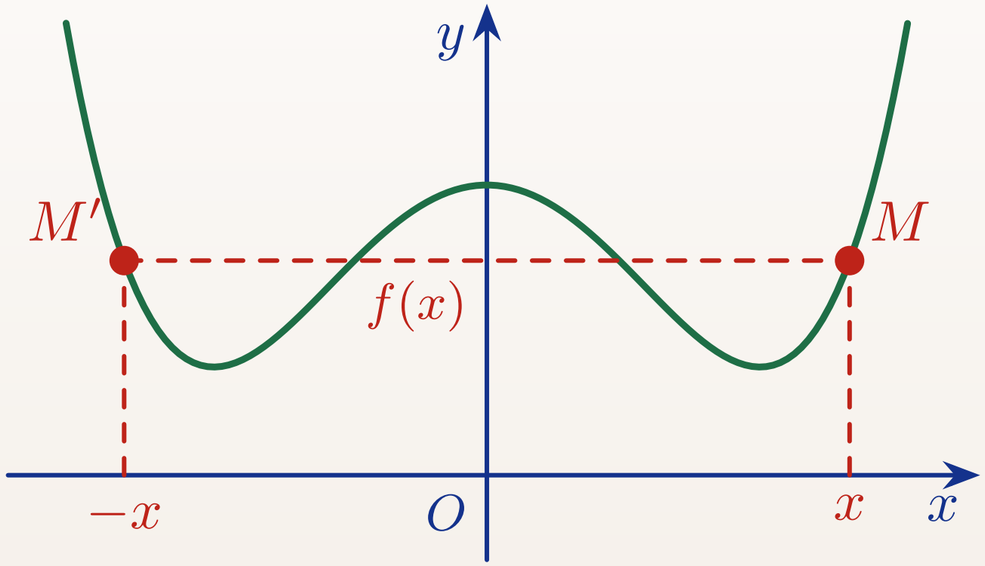
Tout $y \geq M$ est un majorant de f et M est la borne supérieure de f

Tout $y \leq m$ est un minorant de f et m est la borne inférieure de f

Fonction paire

Une fonction f est **paire** $\iff f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathscr{D}_f$

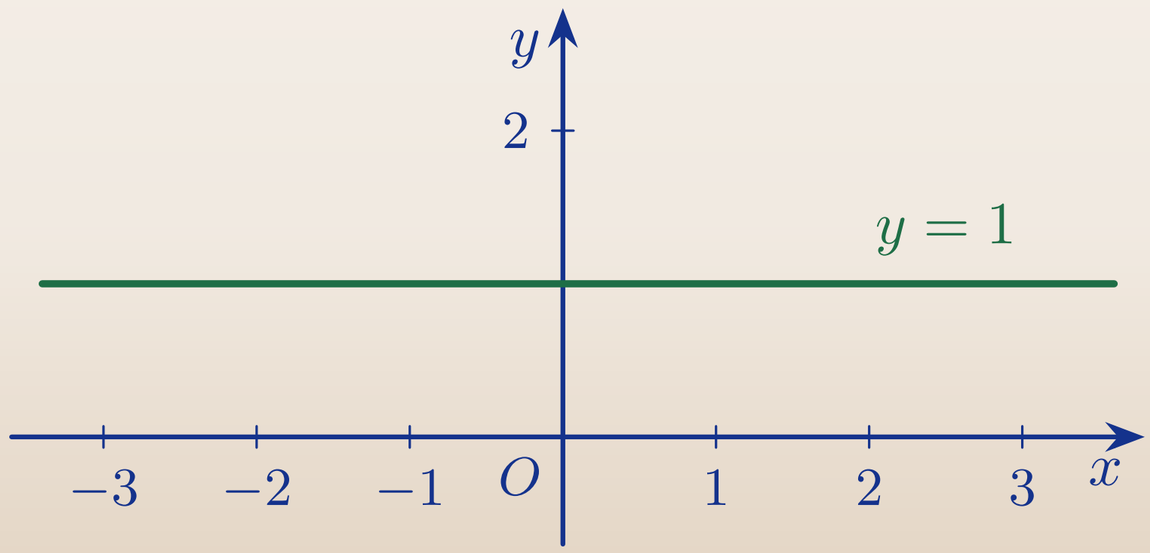
$\iff \mathscr{C}_f$ admet (Oy) pour **axe de symétrie**



$\longrightarrow$ **Nécessairement** : $\mathscr{D}_f$ doit être symétrique autour de 0

Exemples de fonctions paires : $f(x) =$ cste, $\cos x$, x^2, x^4, $\ldots$, x^{2k} avec $k \in \mathbb{Z}$

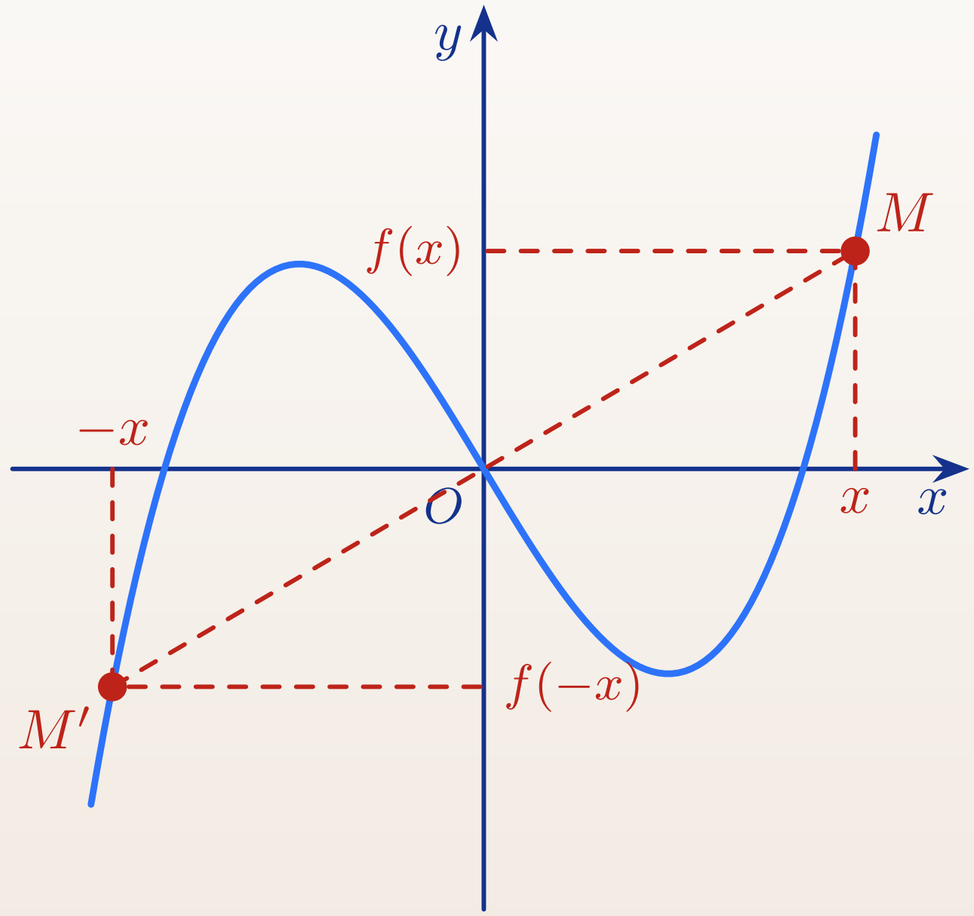
Attention : $f(x) = 1$ est une fonction **paire**



Fonctions impaires

Une fonction f est **impaire** $\iff f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathscr{D}_f$

$\iff \mathscr{C}_f$ admet O pour **centre de symétrie**

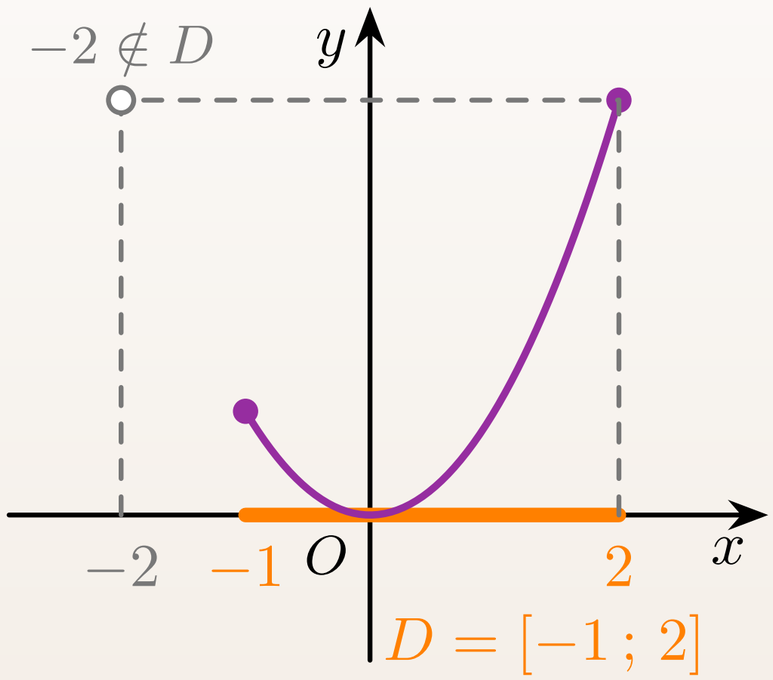


⟶ **Nécessairement** : $\mathscr{D}_f$ doit être symétrique centré en 0

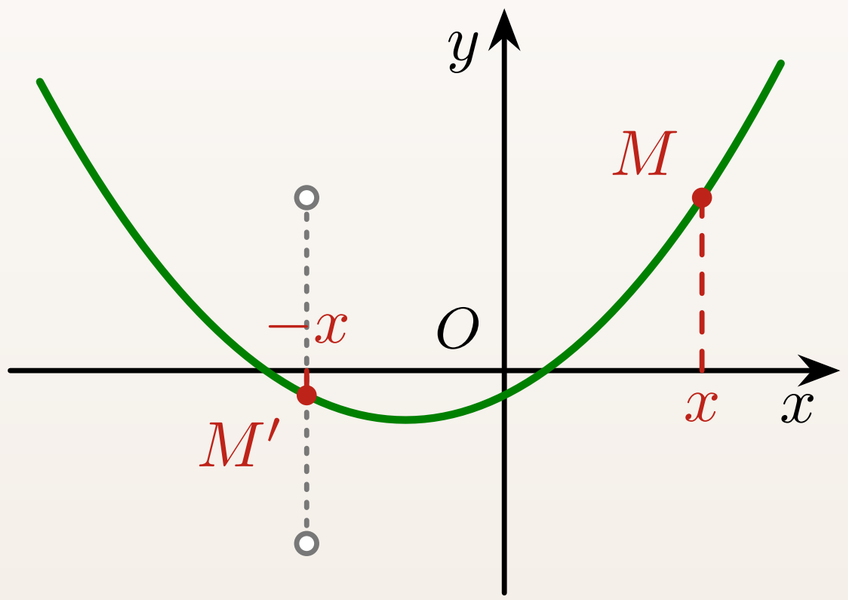
Exemples de fonctions paires : $\sin x$, $\tan x$, x, x^3, …, x^{2k+1} avec $k \in \mathbb{Z}$

Question

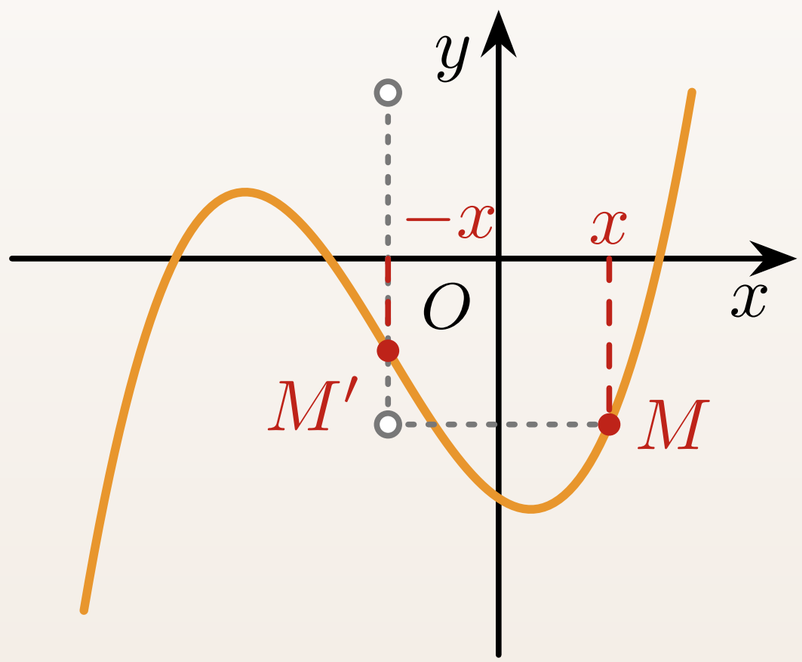
Pourquoi a-t-on ici des courbes représentatives de fonctions ni paires ni impaires ?



Domaine non-symétrique



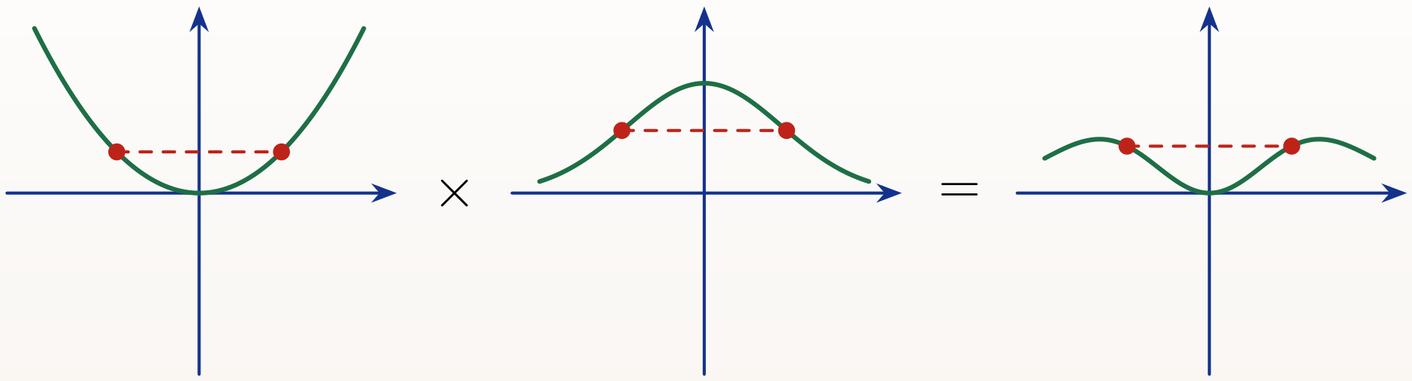
Pas de symétrie d'axe (Oy)



Pas de symétrie de centre O

$\longrightarrow$ Absence de parité n'implique **pas** absence de symétrie

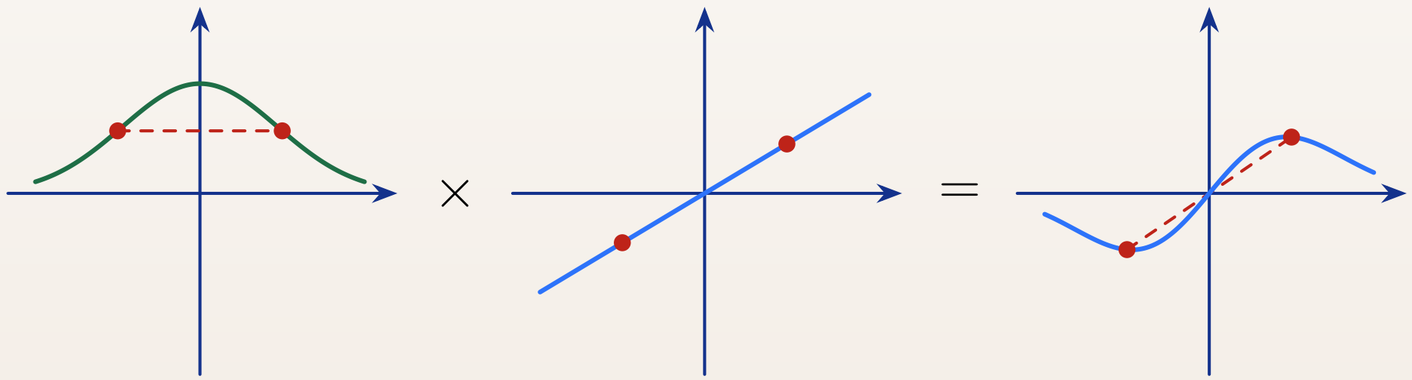
Opérations : produits et quotients



$f(-x) = f(x)$ $\quad$ $g(-x) = g(x)$ $\quad$ Paire

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (f \cdot g)(x)$$

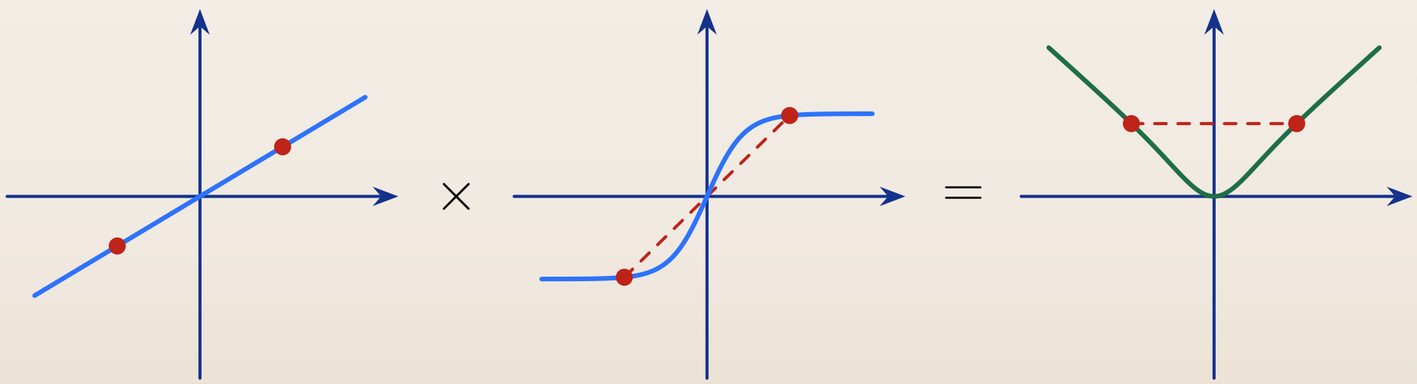
Paire x Paire $\longrightarrow$ Paire



$f(-x) = f(x)$ $\quad$ $g(-x) = -g(x)$ $\quad$ Impaire

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot \big(-g(x)\big)$$
$$= -(f \cdot g)(x)$$

Paire x Impaire $\longrightarrow$ Impaire



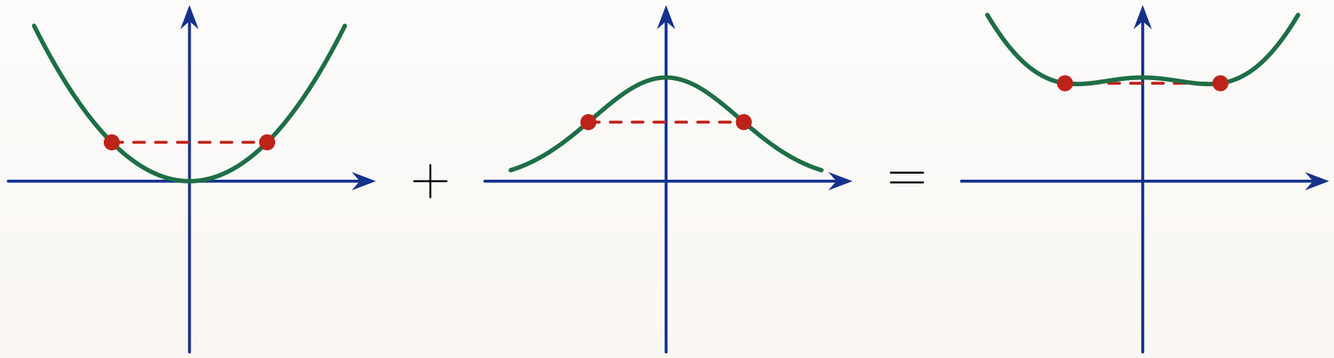
$f(-x) = -f(x)$ $\quad$ $g(-x) = -g(x)$ $\quad$ Paire

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = \big(-f(x)\big) \cdot \big(-g(x)\big)$$
$$= +(f \cdot g)(x)$$

Impaire x Impaire $\longrightarrow$ Paire

$\longrightarrow$ Il en va de **même** pour les **quotients**

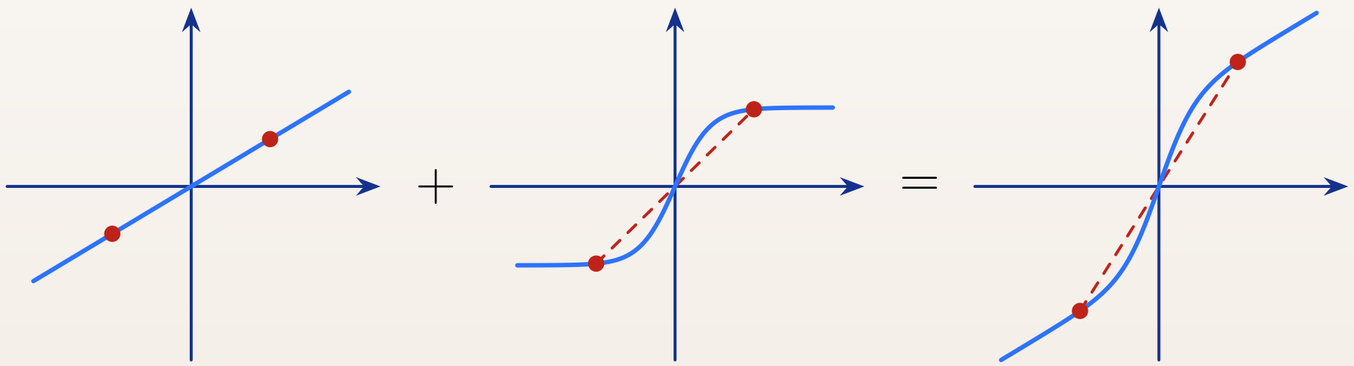
Opérations : sommes et différences



$f(-x) = f(x)$ $\quad$ $g(-x) = g(x)$ $\quad$ Paire

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$$
$$= (f+g)(x)$$

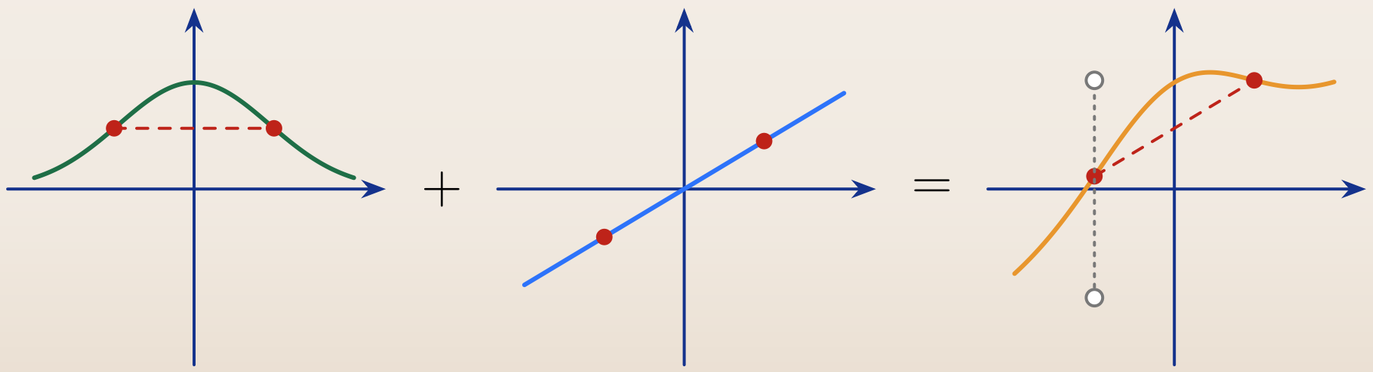
Paire + Paire $\longrightarrow$ Paire



$f(-x) = -f(x)$ $\quad$ $g(-x) = -g(x)$ $\quad$ Impaire

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$$
$$= -(f+g)(x)$$

Impaire + Impaire $\longrightarrow$ Impaire



$f(-x) = f(x)$ $\quad$ $g(-x) = -g(x)$ $\quad$ **Ni paire ni impaire**

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$
$$= (f-g)(x)$$

Paire + Impaire $\longrightarrow$ Aucune parité

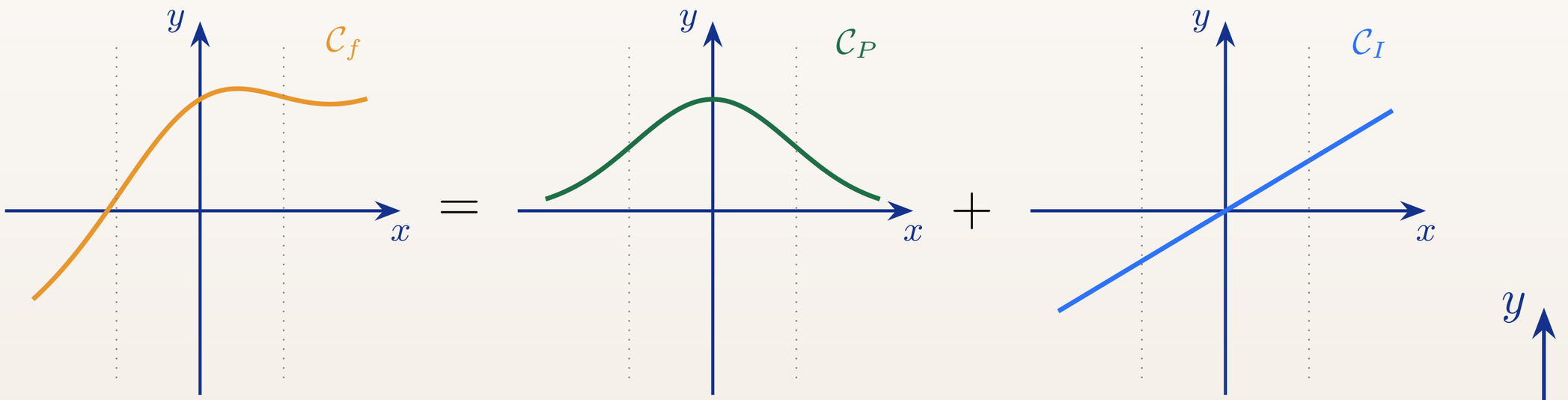
Questions

Dans le tableau ci-dessous, indiquer les parités des fonctions :

Fonction	***Paire***	***Impaire***	***Sans parité***
$\frac{\sin(x)}{\cos x}$		X	
$x^4\cos(x)$	X		
$\ln(1+x)$			X
x^3+1			X
$\frac{x^3}{x^2+1}$		X	
$\exp\left(x^2\right)$	X		

Décomposition d'une fonction sans parité

Soit f une fonction avec $\mathscr{D}_f \in \mathbb{R}$ symétrique par rapport à O **alors** il existe un couple **unique** de fonctions $P(x)$ et $I(x)$, respectivement paire et impaire, tel que $f(x) = P(x) + I(x)$

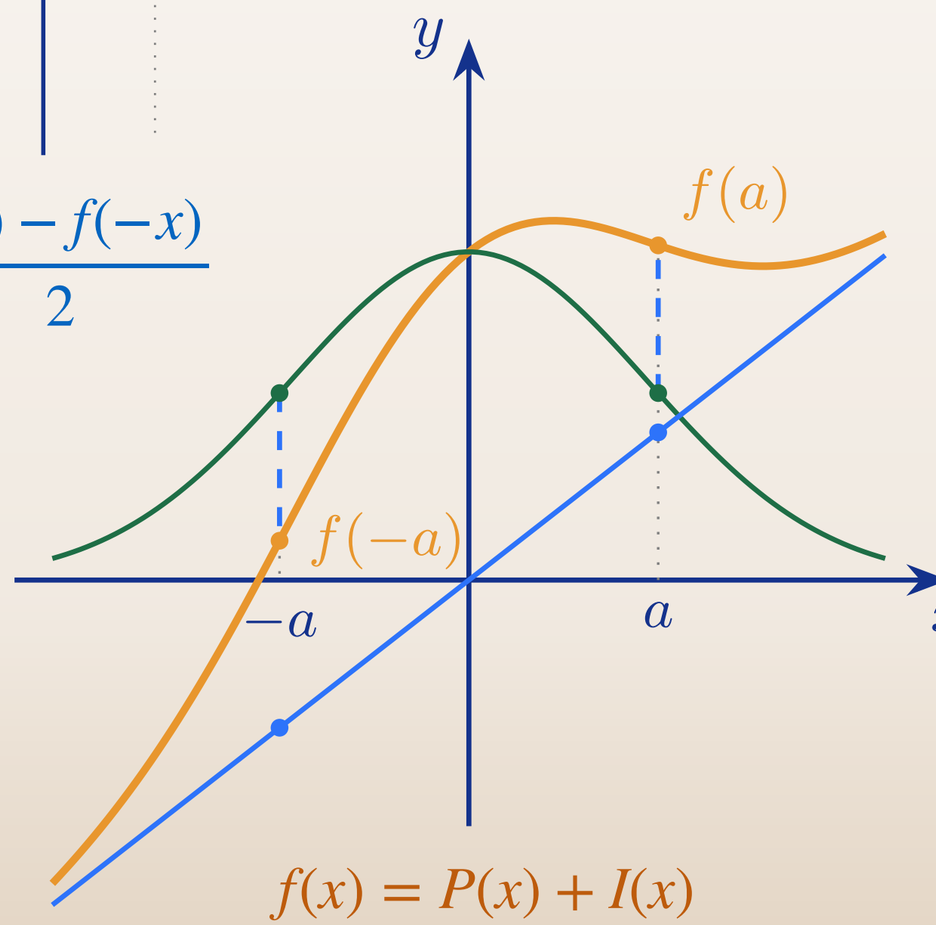


$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

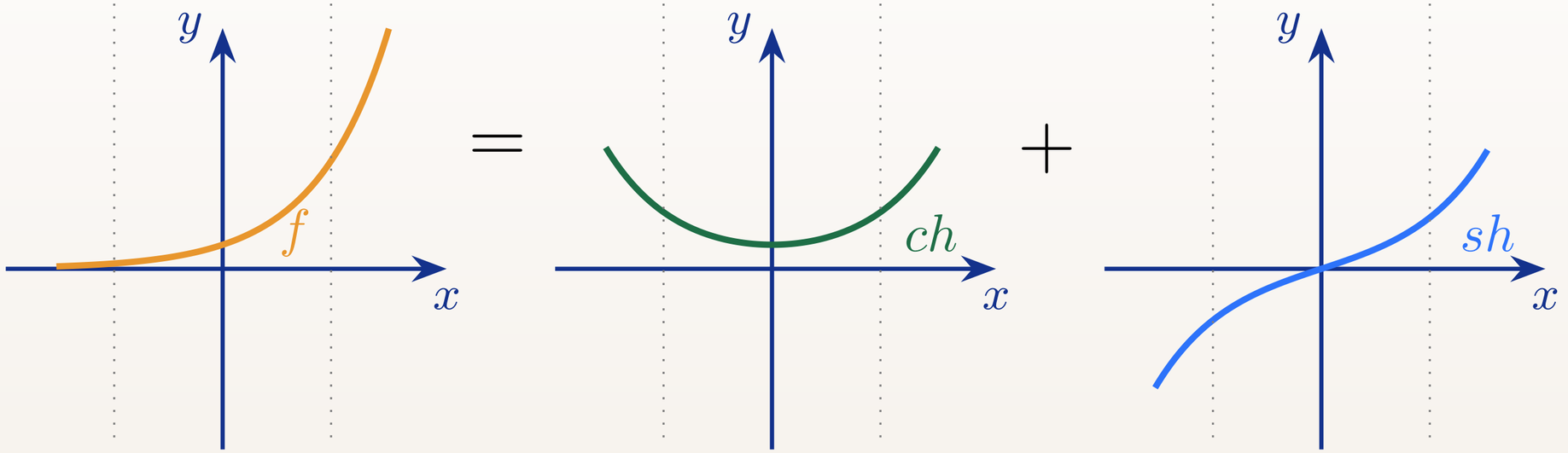
$$P(x) + I(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$



Fonctions hyperboliques

En appliquant la propriété à $\exp(x)$:



$f(x) = \exp(x)$ $\quad \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ $\quad \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$

cosinus hyperbolique ***sinus hyperbolique***

$\longrightarrow$ rappellent les formules d'Euler pour les complexes

