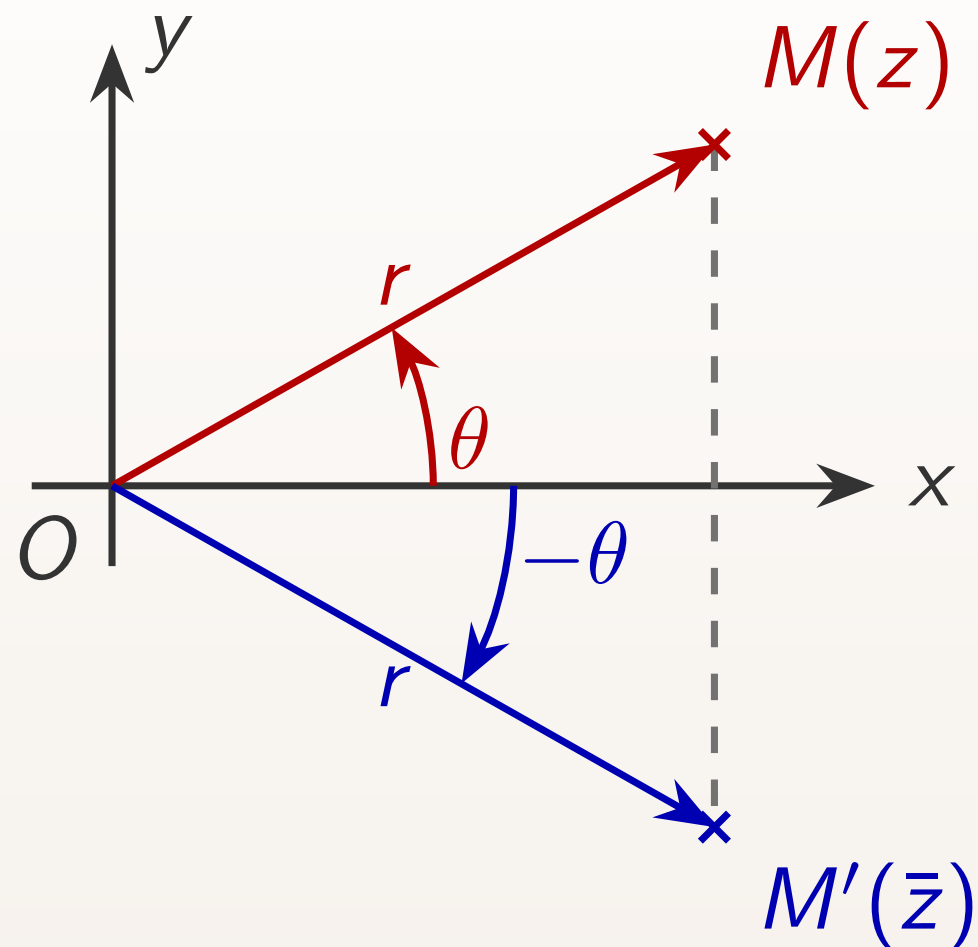


Conjugaison complexe



Soit $z = a + ib = re^{i\theta}$

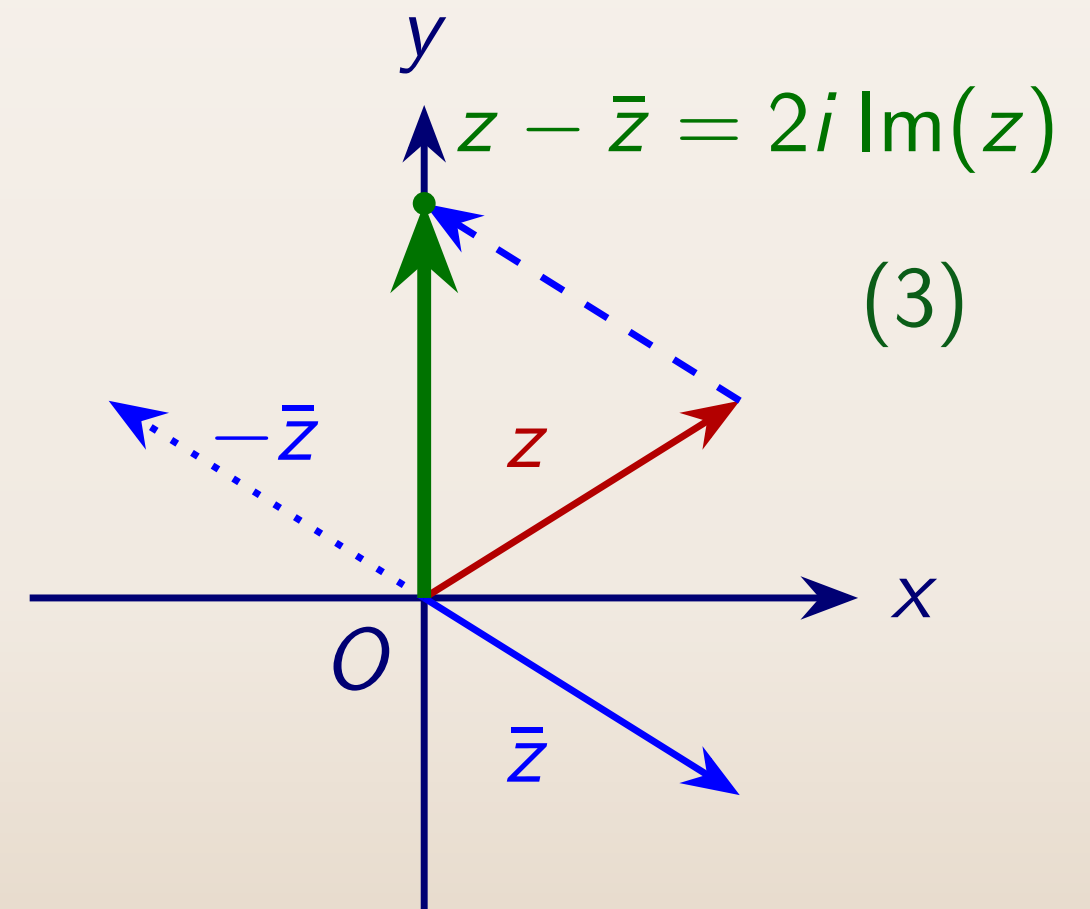
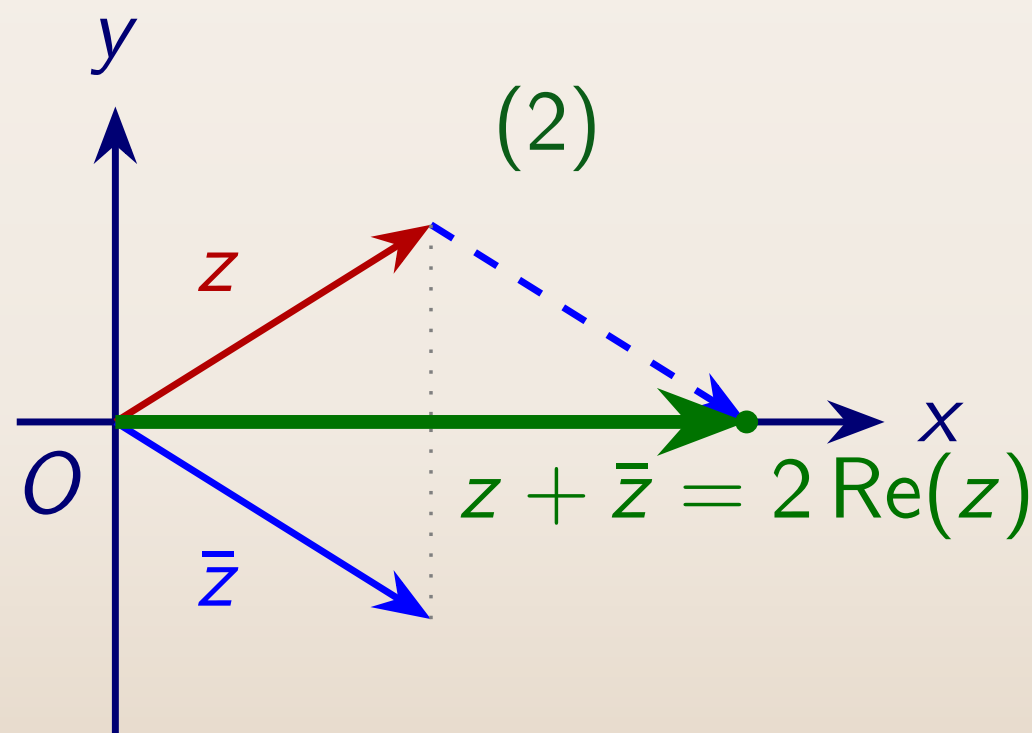
- alors $\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta}$ est le **conjugué** de z
- inversement, $z (= \bar{\bar{z}})$ est le conjugué de $\bar{z}$

Transformation $M(z) \longrightarrow M'(\bar{z})$: symétrie d'axe (Ox)

Conséquence : un réel est son propre conjugué

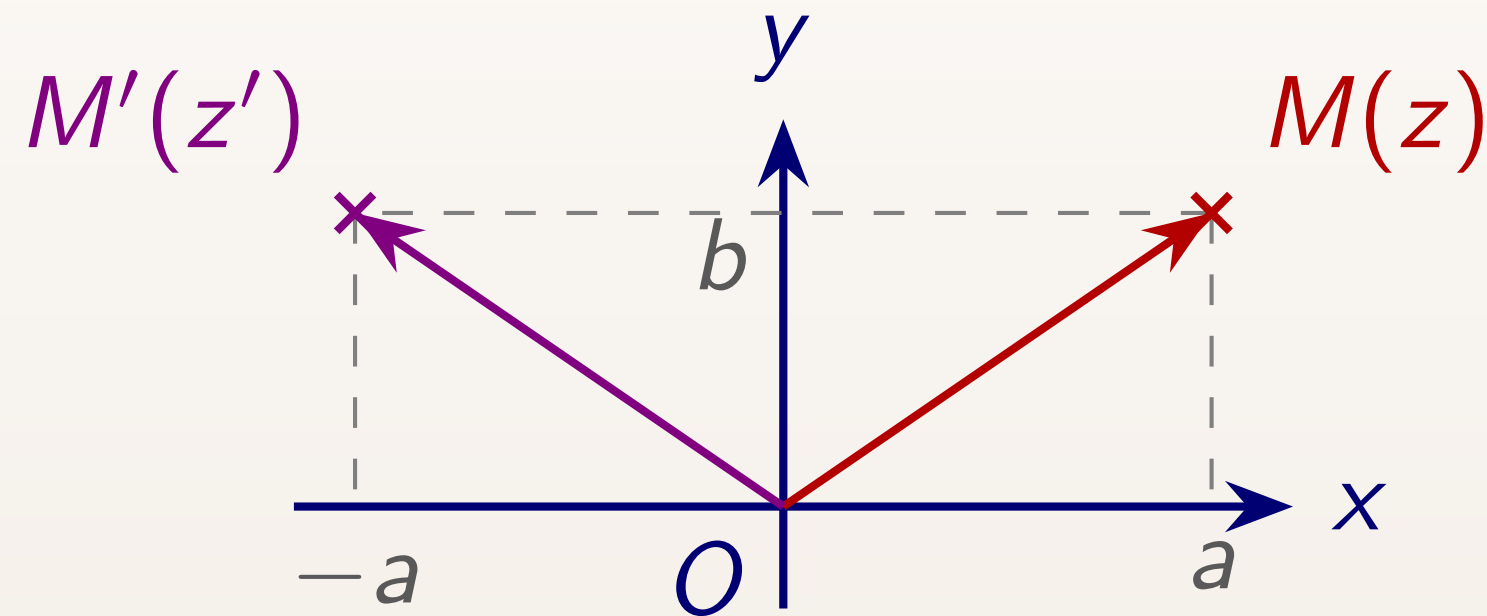
Relations :

$$(1) \quad z \cdot \bar{z} = r^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$



Question

Quelle opération complexe sur l'affixe permet de transformer le point $M(z)$ en son symétrique $M'(z')$ par rapport à l'axe (Oy) ?



$$z = a + ib$$

$$z' = -a + ib = -(a - ib) = -\bar{z}$$

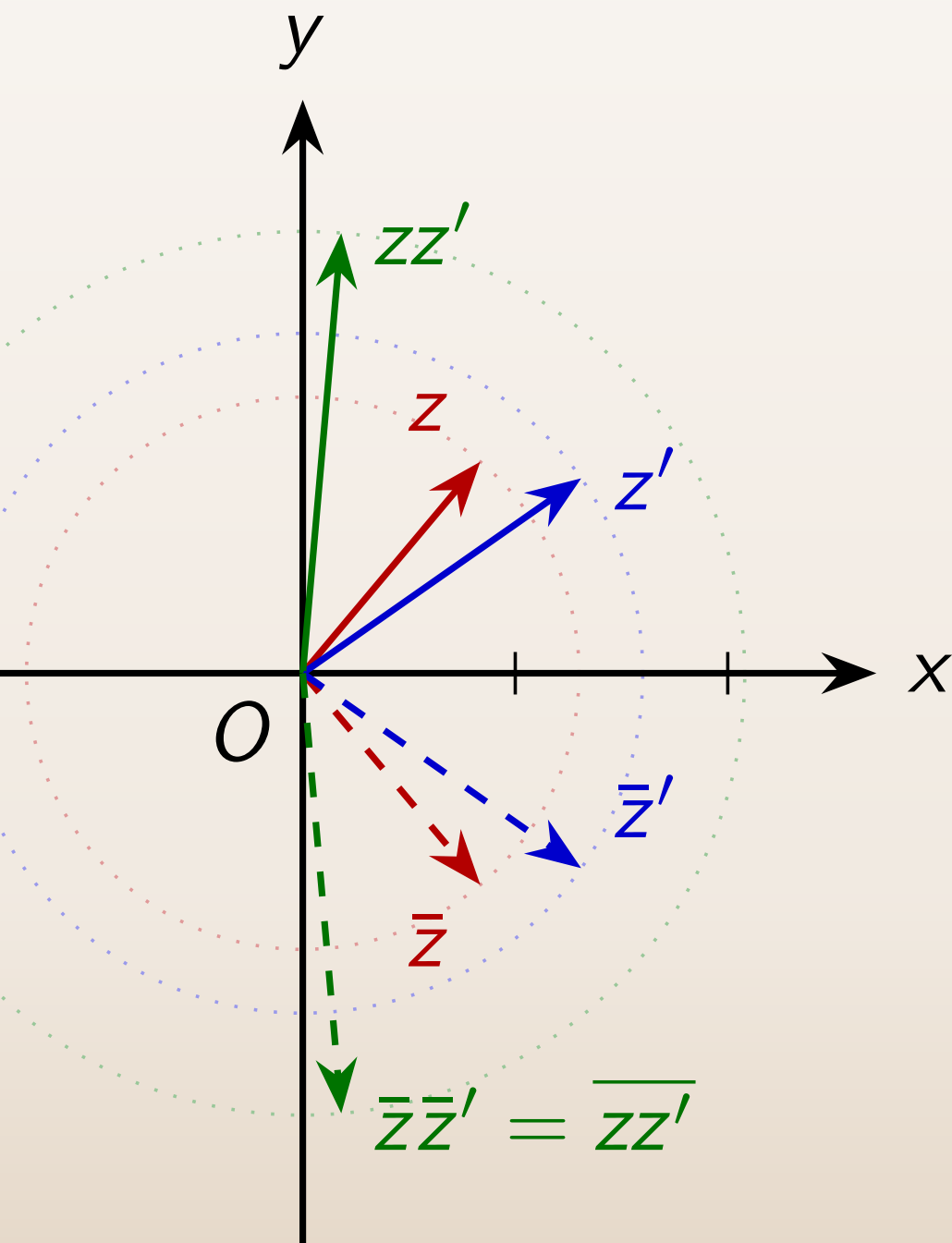
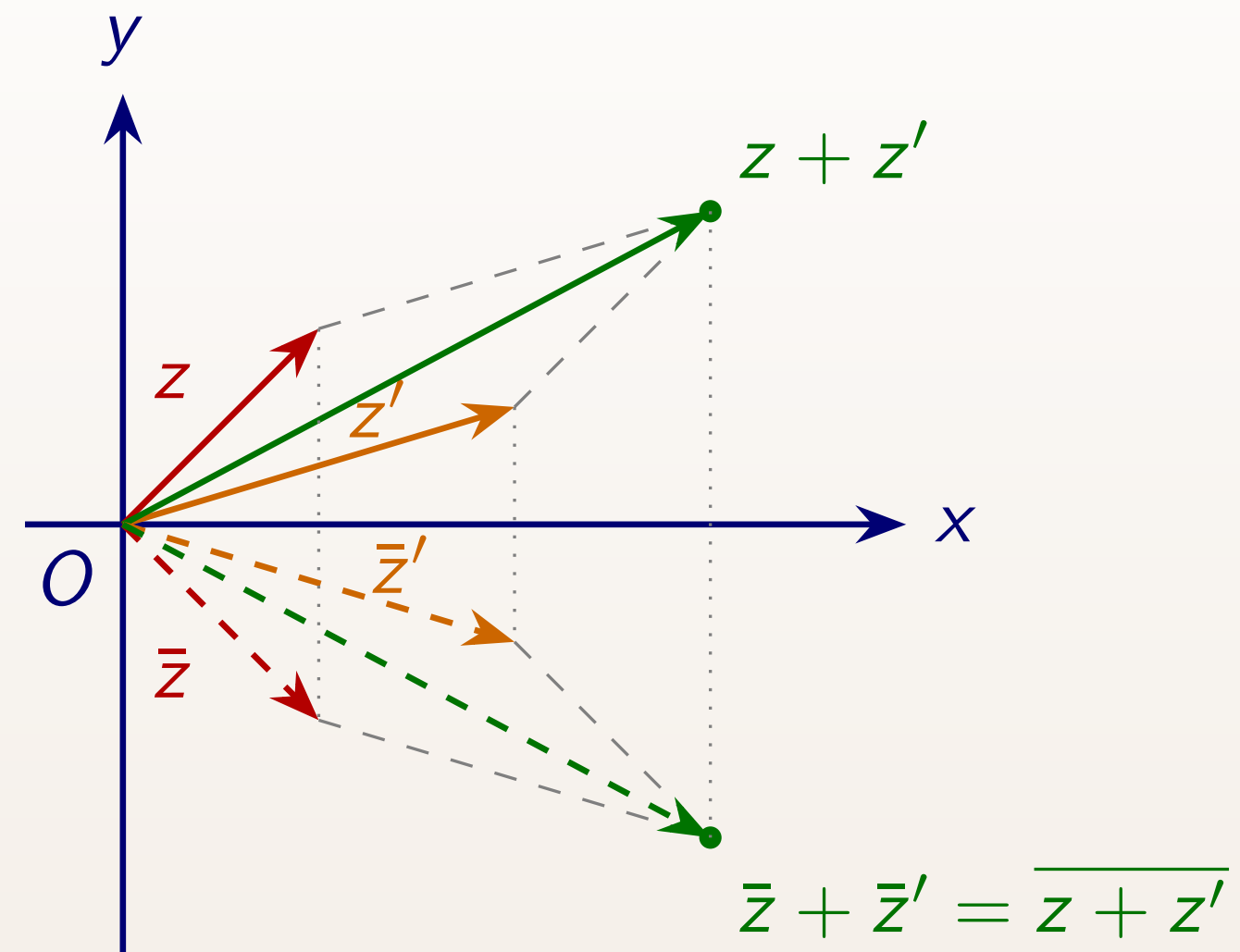
→ $z' = -\bar{z}$ est l'opération associée à la symétrie d'axe (Oy)

Propriétés du conjugué #1

La conjugaison conserve **toutes les opérations** :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ (addition et soustraction)

$$\begin{aligned} \overline{(a + ib) + (a' + ib')} &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\ &= (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') \end{aligned}$$



- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$ (produit)

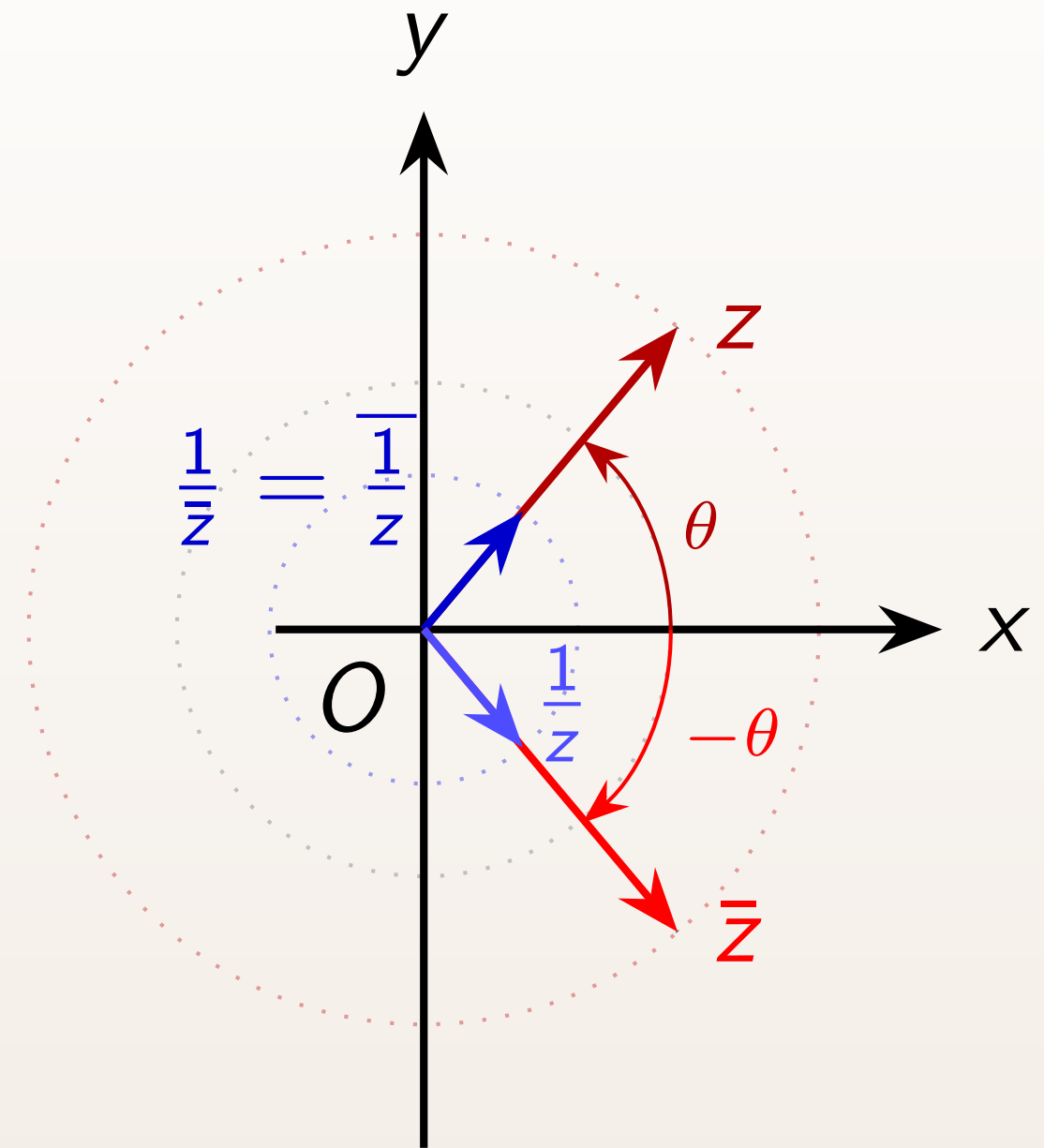
$$\begin{aligned} \overline{r \exp(i\theta) \cdot r' \exp(i\theta')} &= \overline{rr' \exp[i(\theta + \theta')]} \\ &= rr' \exp[-i(\theta + \theta')] = r \exp(-i\theta) \cdot r' \exp(-i\theta') \end{aligned}$$

Propriétés du conjugué #2

La conjugaison conserve **toutes les opérations** :

- $(z \neq 0) : \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ (inversion)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{\bar{z}} &= \frac{\overline{1}}{\overline{r \exp(i\theta)}} = \overline{\frac{1}{r \exp(i\theta)}} \\ &= \frac{1}{r} \exp(-i\theta) = \frac{1}{r \exp(i\theta)} = \frac{1}{\bar{z}} \end{aligned}$$



- $(z' \neq 0) : \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ (quotient)
conséquence de l'inversion

- $(n \in \mathbb{Z}) : \overline{z^n} = (\bar{z})^n$ (puissance)
conséquence du produit et du quotient

Conséquence sur les équations de degré n

Soit l'équation polynôme de degré n : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_2x^3 + \dots + a_nx^n = 0$

- elle admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$

De plus, $\overline{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_2x^3 + \dots + a_nx^n} = \bar{0} = 0$

$$\iff \overline{a_0} + \overline{a_1x} + \overline{a_2x^2} + \overline{a_3x^3} + \dots + \overline{a_nx^n} = 0$$

$$\iff \overline{a_0} + \overline{a_1x} + \overline{a_2x^2} + \overline{a_3x^3} + \dots + \overline{a_nx^n} = 0$$

$$\iff \overline{a_0} + \overline{a_1x} + \overline{a_2x^2} + \overline{a_3x^3} + \dots + \overline{a_nx^n} = 0$$

- si les coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont réels alors $\overline{a_k} = a_k, k = 1..n$

$$\implies a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + a_3\bar{x}^3 + \dots + a_n\bar{x}^n = 0$$

$$\implies x \in \mathbb{C} \text{ est solution} \iff \bar{x} \in \mathbb{C} \text{ est aussi solution}$$

Une équation polynôme à coefficients réels admet les solutions complexes par **paires de conjuguées**

Illustration

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ sachant qu'elle admet $x = 1 + i$ comme solution

- L'équation est de degré 3 donc je recherche 3 solutions
- On vérifie en essayant que $x = 1$ est solution ($1 - 3 + 4 - 2 = 0$)
- On sait que $x = 1 + i$ est solution
- Les coefficients sont réels ($1, -3, 4, -2$) donc $x = 1 - i$ est la 3^e solution

Remarques :

- l'équation s'écrit aussi $(x - 1)(x - 1 - i)(x - 1 + i) = 0$
- des réels peuvent cacher des complexes
- toute équation polynôme à degré impair et à coefficients constants admet au moins une solution réelle

Questions

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + 2i) \cdot \overline{(z - 3)} = 2$

$$(1 + 2i)\overline{(z - 3)} = 2 \iff \overline{z - 3} = \frac{2}{1 + 2i} = \frac{2(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - 4i}{5}$$

$$\iff \bar{z} - 3 = \frac{2 - 4i}{5} \iff \bar{z} = \frac{2 - 4i + 15}{5} = \frac{17 - 4i}{5} \iff z = \frac{17}{5} + i\frac{4}{5}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{\left(\frac{2z - 1}{z + 1}\right)} = i$

$$\overline{\left(\frac{2z - 1}{z + 1}\right)} = i \iff \frac{2z - 1}{z + 1} = -i \iff 2z - 1 = -iz - i$$

$$\iff (2 + i)z = 1 - i \iff z = \frac{1 - i}{2 + i}$$

$$\iff z = \frac{(1 - i)(2 - i)}{2^2 + 1^2} = \frac{2 - i - 2i - 1}{5}$$

$$\iff z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

Égalité de deux complexes

On considère $z = a + ib = r \exp(i\theta)$ et $z' = a' + ib' = r' \exp(i\theta')$

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases} \iff \begin{cases} r = r' \\ \text{et} \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que
 $z(2 - i) = 4 + 3i$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
 $z^3 = -27$

→ Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont :

- même partie réelle et même partie imaginaire
- même module et même argument (au modulo 2π près)

Exemple #1

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $z(2 - i) = 4 + 3i$

→ on pose $z = a + ib$ et l'on recherche a et b

$$z(2 - i) = 4 + 3i \iff (a + ib)(2 - i) = 4 + 3i$$

$$\iff 2a + 2ib - ia - i^2b = 4 + 3i$$

$$\iff 2a + 2ib - ia + b = 4 + 3i$$

$$\iff (2a + b) + i(-a + 2b) = 4 + 3i$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b = 4 \\ -a + 2b = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b = 4 \\ -2a + 4b = 6 \end{cases}$$

$$5b = 10 \implies b = 2$$

$$\implies a = 2b - 3 = 1$$

$$\implies z = 1 + 2i$$

Exemple #2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -27$

→ on pose $z = r \exp(i\theta)$ et l'on recherche r et θ

On remarque que $-27 = 27 \exp(i\pi)$

$$\rightarrow [r \exp(i\theta)]^3 = 27 \exp(i\pi)$$

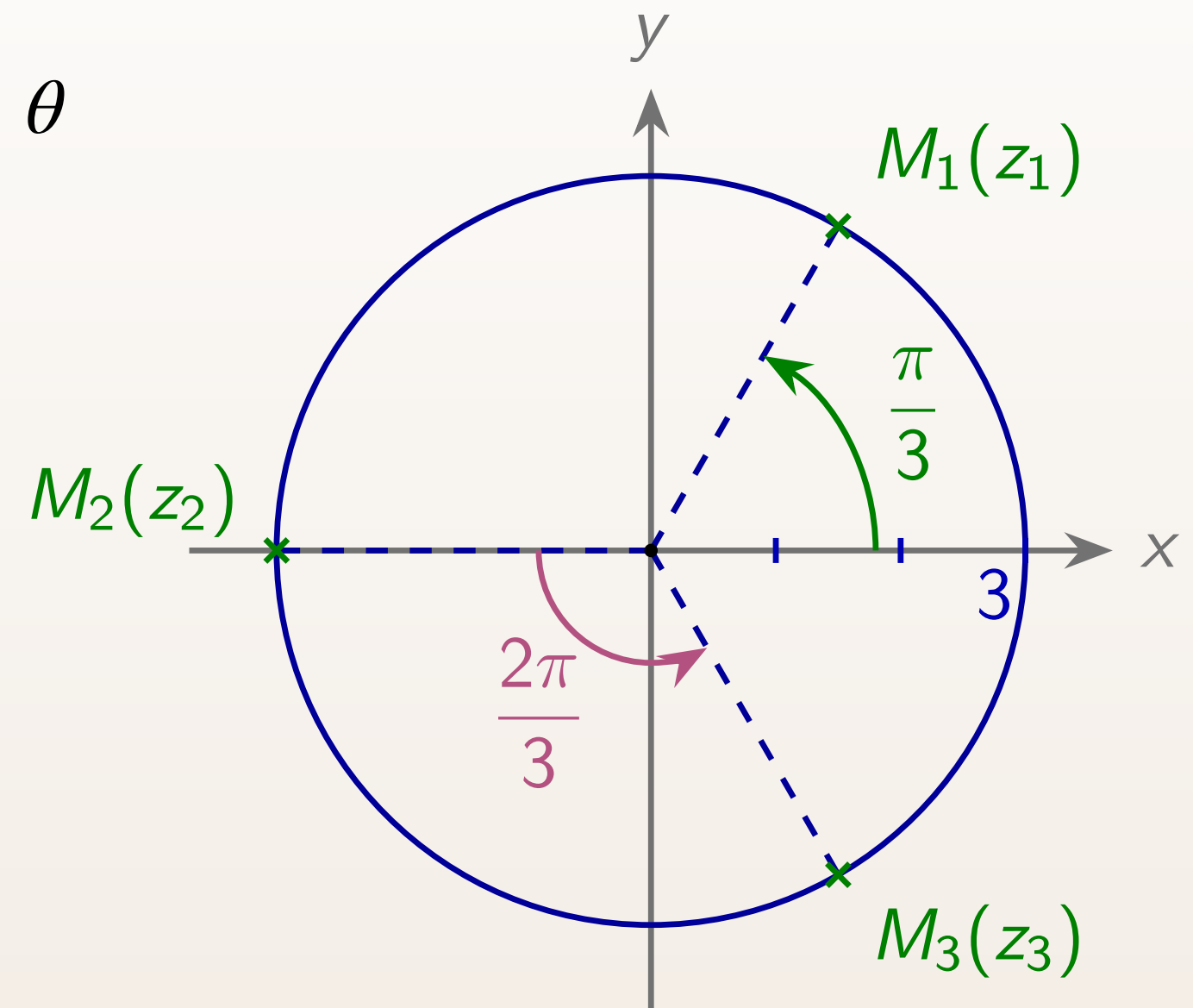
$$\Leftrightarrow r^3 \exp(i 3\theta) = 27 \exp(i\pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 27 \text{ avec } r \geq 0 \\ \text{et} \\ 3\theta = \pi [2\pi] \end{cases}$$

$$r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$3\theta = \pi [2\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$

→ on trouve 3 solutions dans $] -\pi ; \pi]$
qui se répètent dans $\mathbb{R}$



Opérations particulières

Formules d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Complexes et formules de trigonométrie

Formule de **Moivre** pour $n = 2$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$

$$\iff \cos^2 \theta + i^2 \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

$$\iff \underline{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} + i \underline{2 \cos \theta \sin \theta} = \underline{\cos(2\theta)} + i \underline{\sin(2\theta)}$$

$$\longrightarrow \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ et } \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

Linéarisation de cos et sin :

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} - 2}{-4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Formules **d'addition** :

$$\underline{\cos(a+b)} + i \underline{\sin(a+b)} = e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$$

$$= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

$$= \underline{\cos a \cos b - \sin a \sin b} + i \underline{\sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

$$\longrightarrow \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$