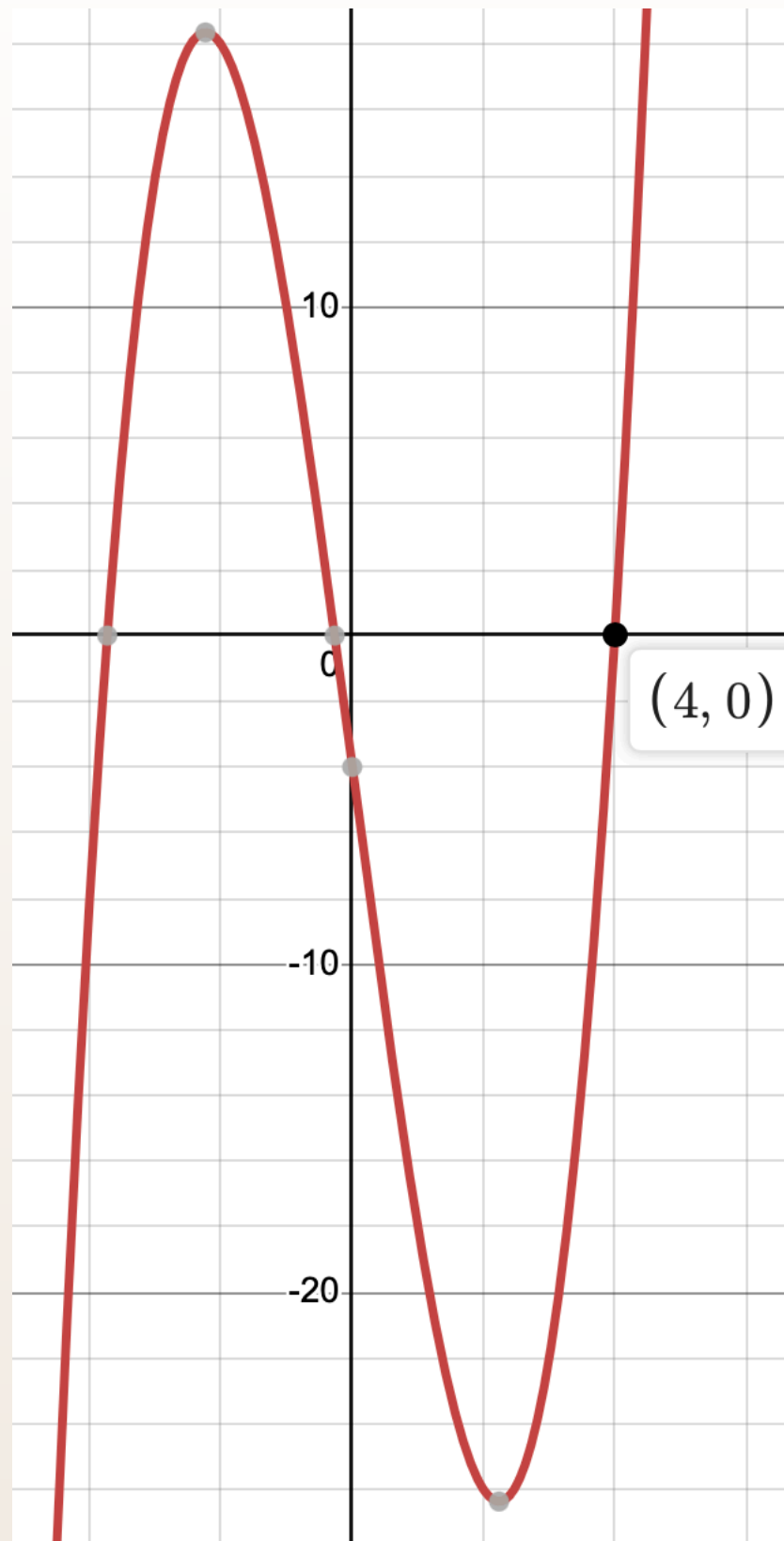


Introduction



- Italie, XVI^e siècle :
 ➔ *Scipione del Ferro, Cardano, Tartaglia, Bombelli*
- Résolutions d'équations de degré 3
- Utilisation des formules de Cardan :
 - Racines carrés négatives même pour calculer des solutions réelles 🤔
 - $x^3 - 15x - 4 = 0 \longrightarrow \sqrt{-121} = ?$

On pose i / $i^2 = -1$

- i est le nombre imaginaire
- $(11i)^2 = -121$

Remarque : i est parfois noté j

Formes complexes et approche géométrique

Nombres complexes :

- Ensemble $\mathbb{C}$
 - Chaque nombre $z \in \mathbb{C}$ contient **2 informations**
- *approche géométrique*

→ **Affixe :**

- Nombre complexe $z \in \mathbb{C}$
- **Même rôle** que les coordonnées
- Associée à un point M ou à un vecteur $\vec{u}$

Forme algébrique
Coordonnées cartésiennes
 (x, y)

**Forme trigonométrique
ou exponentielle**
Coordonnées polaires
 $(r; \theta)$

Forme algébrique

C'est la forme $z = a + ib$

→ Affixe de $M(x; y)$: $z = x + iy$

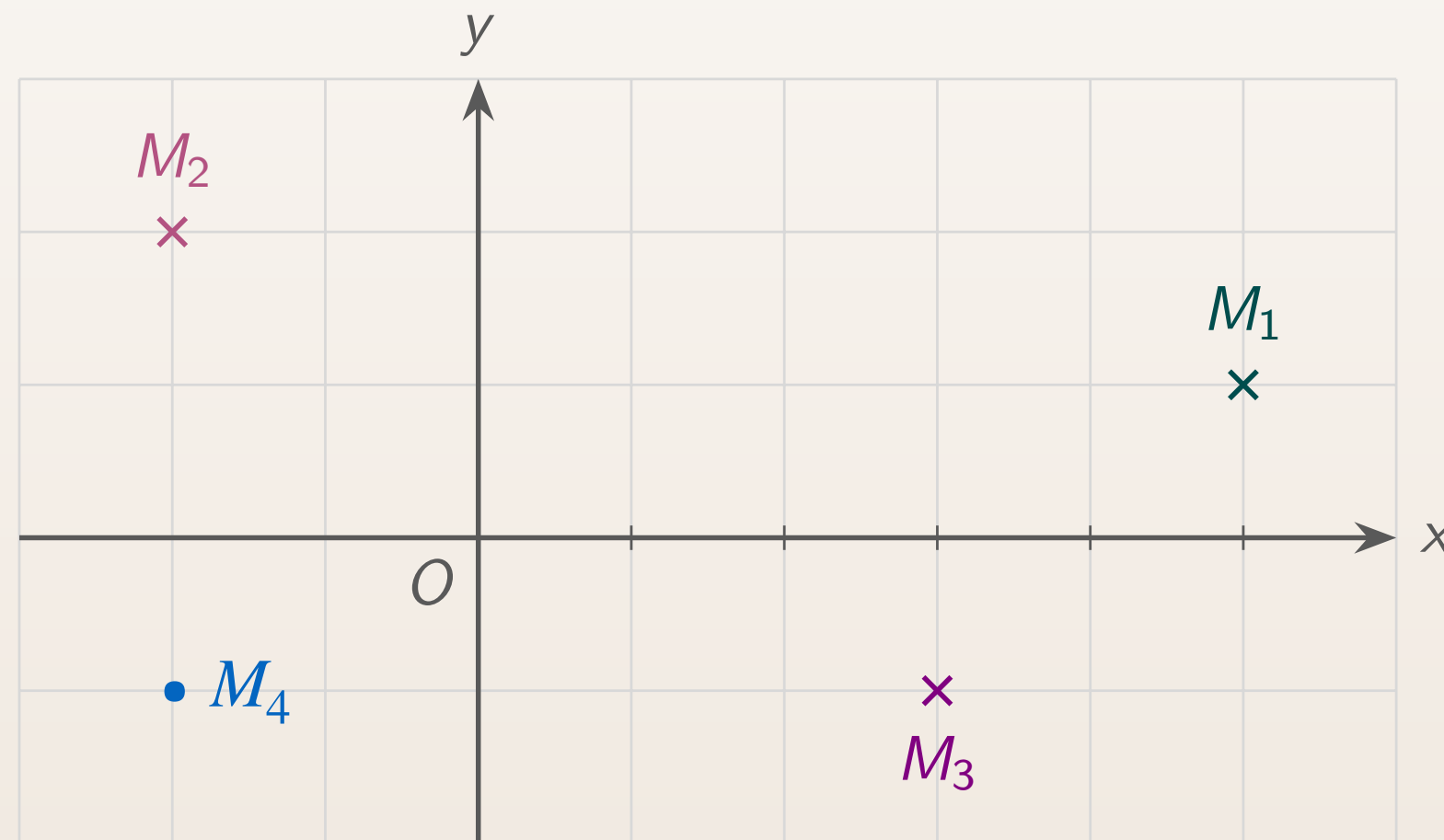
Partie réelle $a = \text{Re}(z)$

représentée en abscisse

Partie imaginaire $b = \text{Im}(z)$

représentée en ordonnée

Question : quelles sont les affixes de M_1 , M_2 et M_3 ?



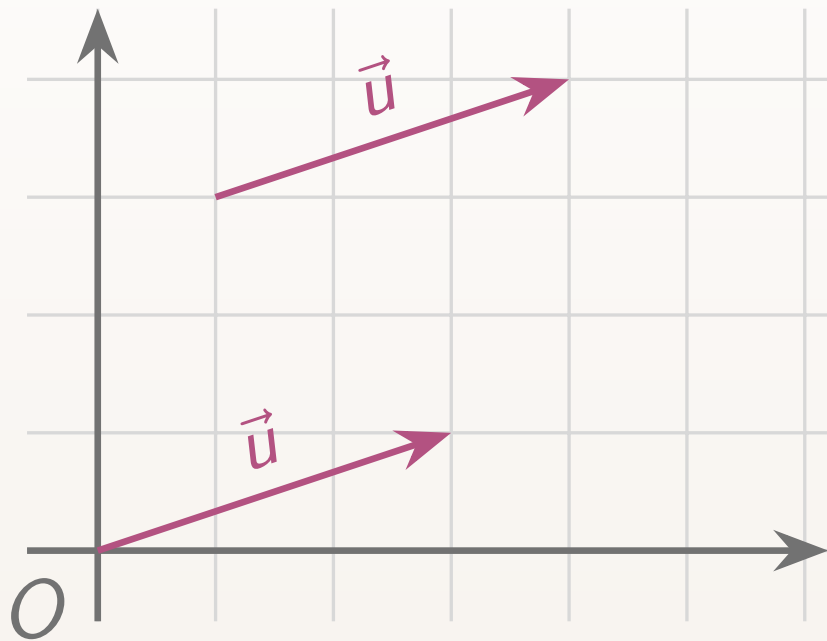
$$z_1 = 5 + i$$

$$z_2 = -2 + 2i$$

$$z_3 = 3 - i$$

Exercice : placer $M_4(z_4)$ avec $z_4 = -2 - i$.

Vecteurs et affixes sous forme algébrique



Question : que vaut z l'affixe de $\vec{u}$?

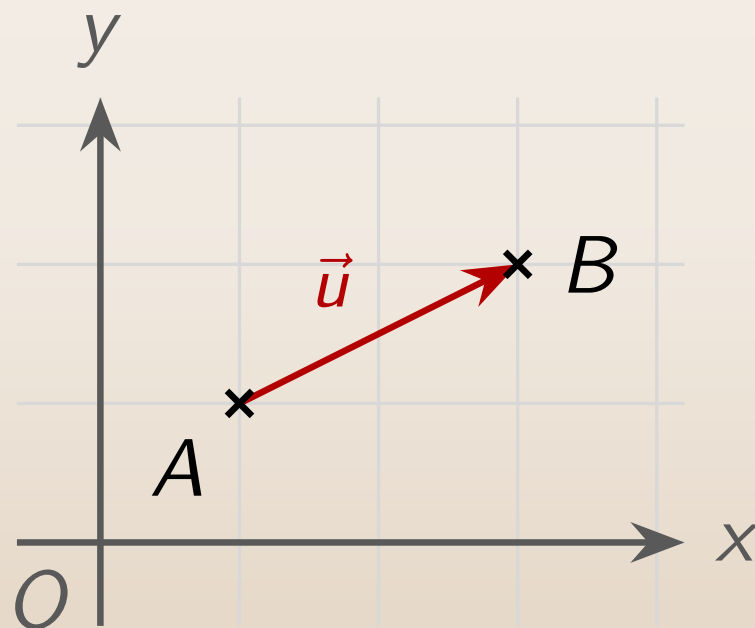
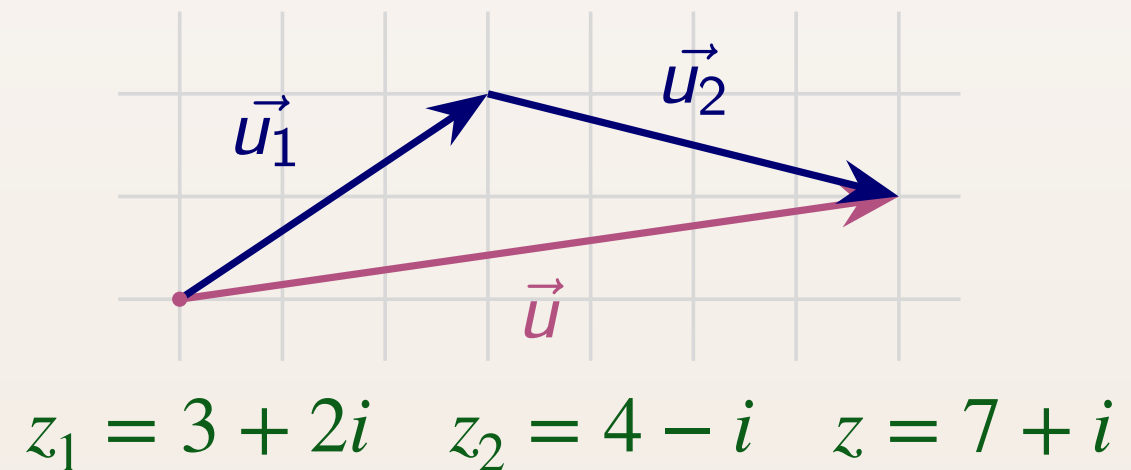
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff z_u = 3 + i$$

$$\longrightarrow \vec{u} = (x; y) \iff z = x + iy$$

Soient $\vec{u}_1(z_1)$, $\vec{u}_2(z_2)$ et $\vec{u}(z)$

Question : valeurs de z_1 , z_2 et z ?

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \iff z = z_1 + z_2$$



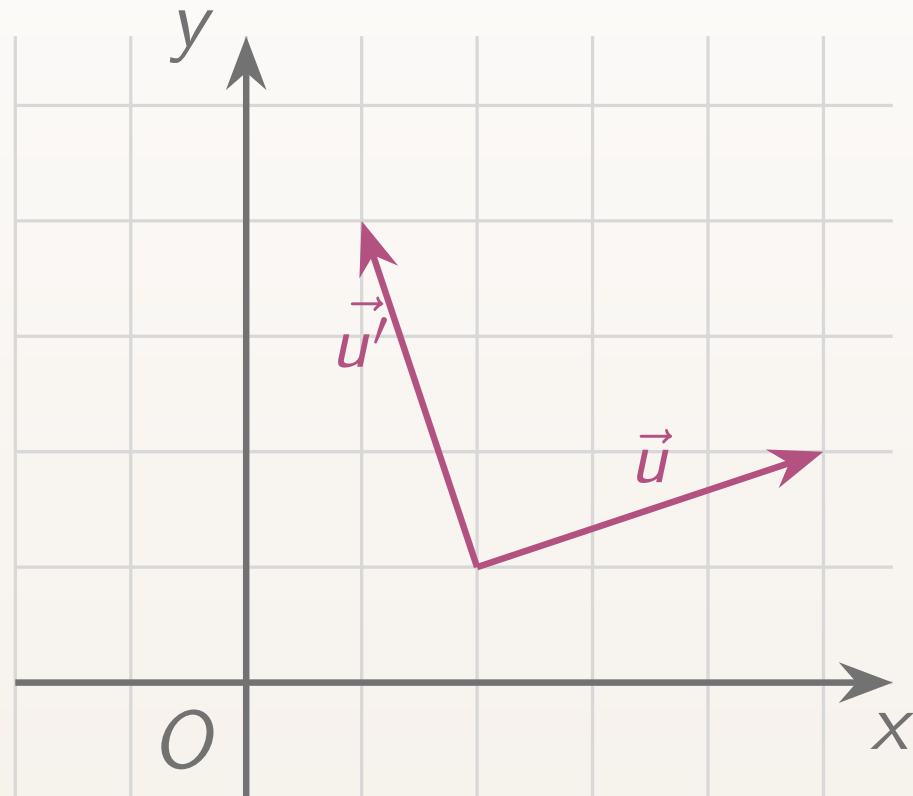
Question : valeurs de z_A , z_B et z ?

$$z_A = 1 + i \quad z_B = 3 + 2i \quad z = z_B - z_A = 2 + i$$

$$\longrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ a pour affixe } z = z_B - z_A$$

Que représente une multiplication par i ?

Pour un **vecteur** :



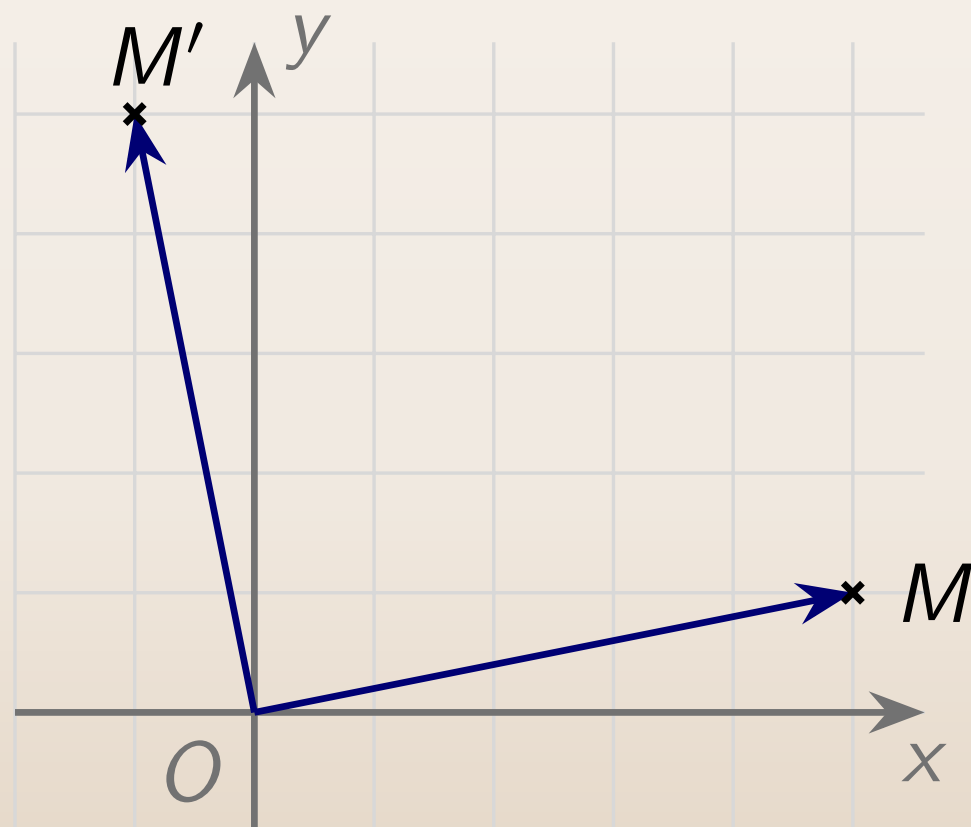
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow z = a + ib$$

$$iz = i(a + ib) = ia + i^2b = -b + ia$$

$$\Rightarrow \vec{u}' = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

« Permutation-opposition »

→ **Rotation** de $+90^\circ$ autour de l'origine du vecteur

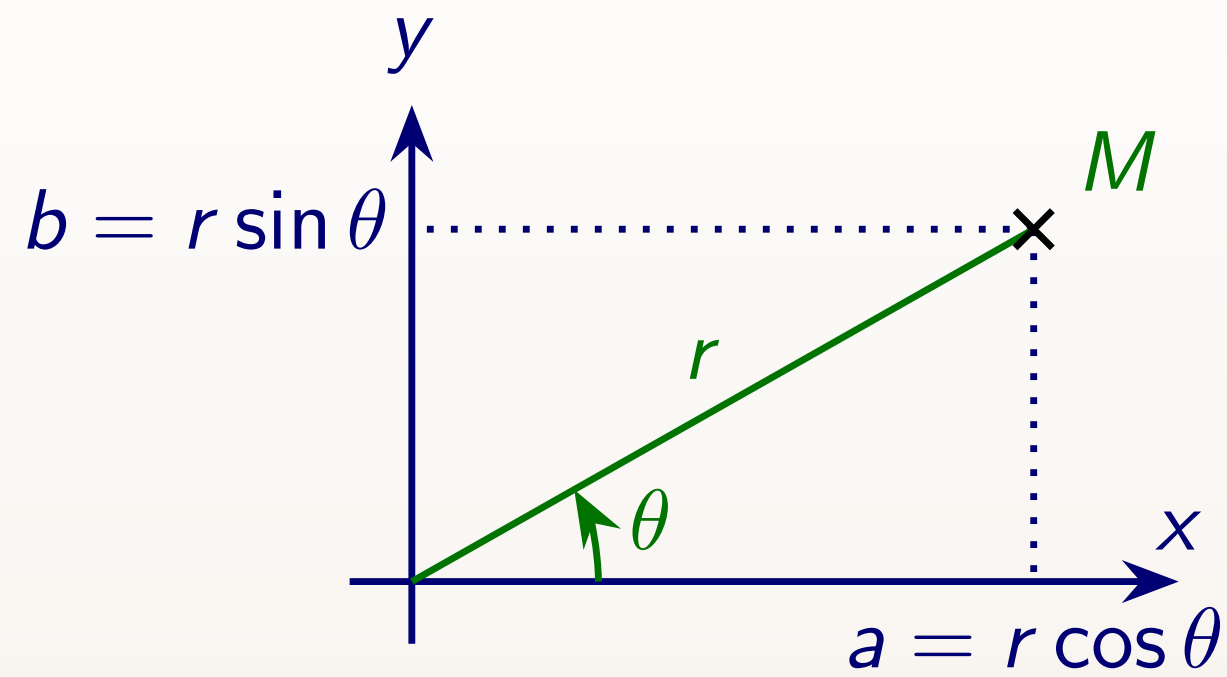


Pour un **point** :

$$M(a; b) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OM} \text{ et } z = z_M$$

→ **Rotation** de $+90^\circ$ autour de l'origine du repère

Forme trigonométrique et exponentielle



Coordonnées **polaires** r, θ

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

module

$$r \geq 0$$

$$r = |z|$$

argument

$$\theta \in]-\pi; \pi]$$

$$\arg(z)$$

Écrivons z sous forme **exponentielle** :

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(-\sin \theta + i \cos \theta) = ir(\cos \theta + i \sin \theta) = iz$$

$$\implies z \text{ est solution de } \frac{dz}{d\theta} - iz = 0$$

$$\text{Or } \frac{dz}{d\theta} - iz = 0 \iff z = r \exp i\theta, r \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow z = re^{i\theta} = r \exp(i\theta)$$

module

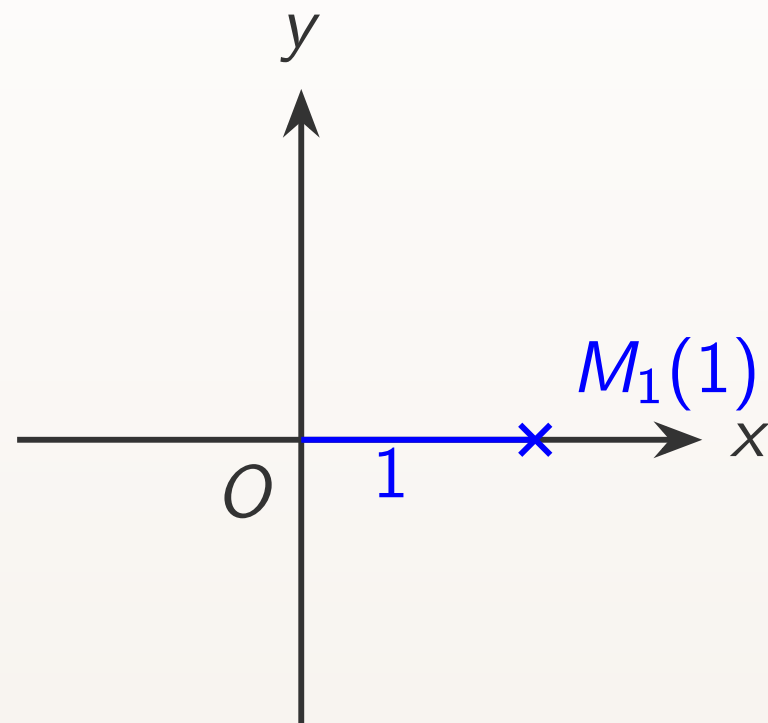
$$r \geq 0$$

argument

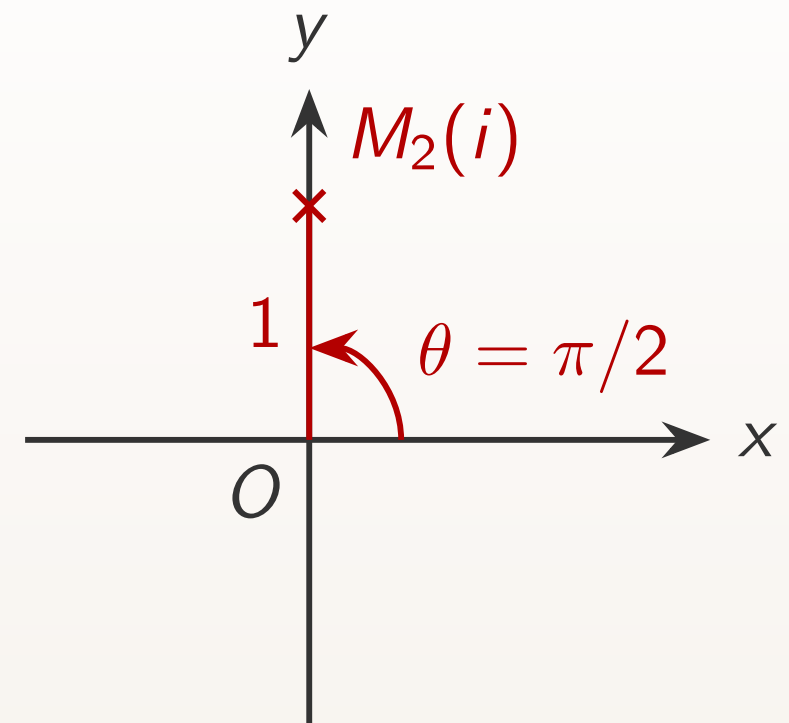
$$\theta \in]-\pi; \pi]$$

$\implies z$ **hérite** des propriétés de l'**exponentielle**

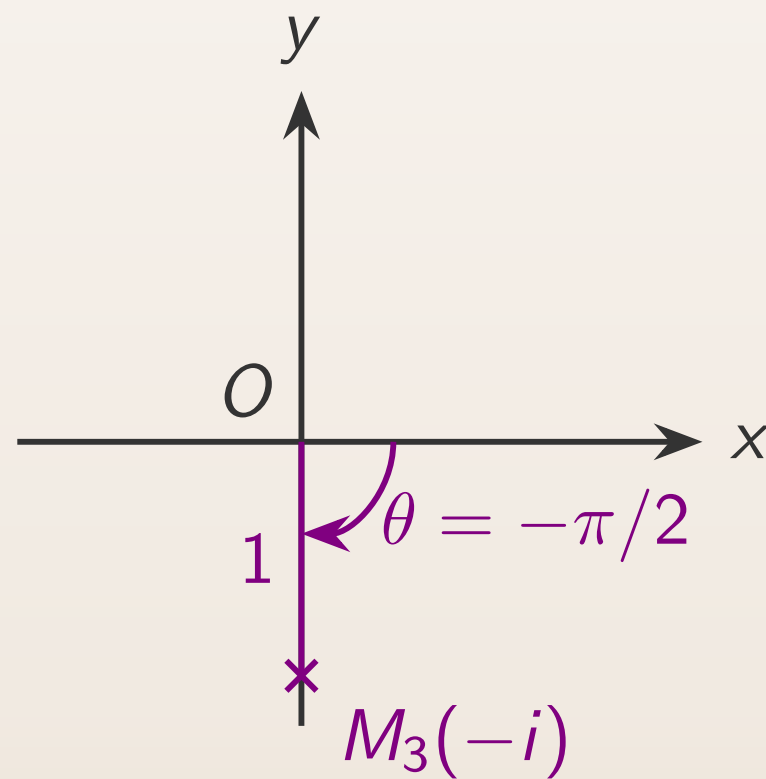
Affixes particulières



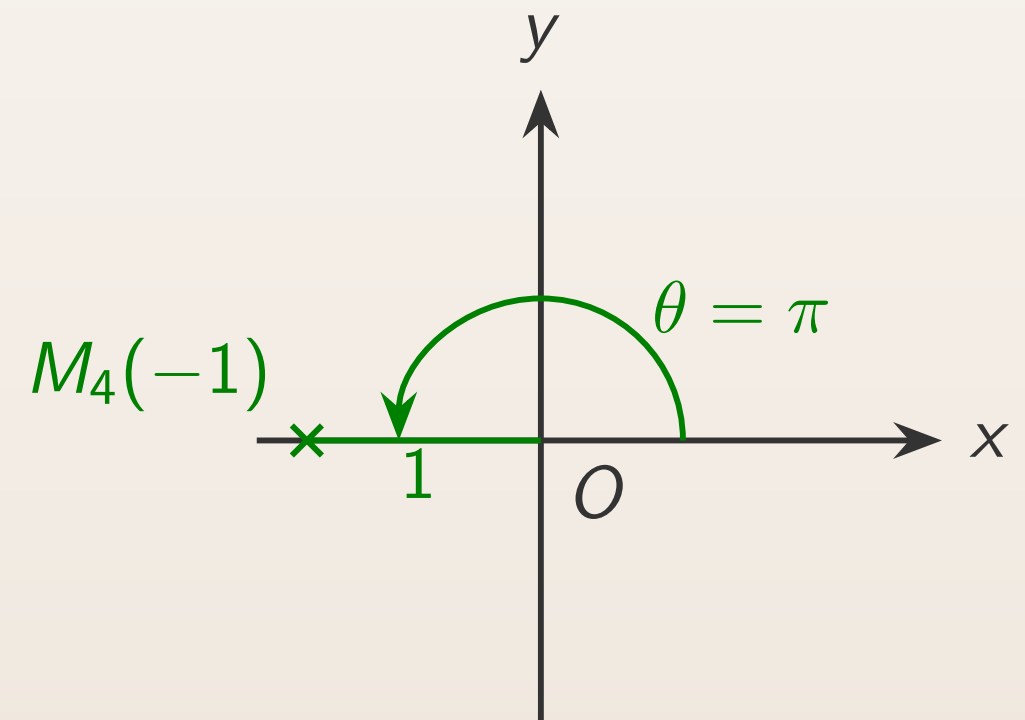
$$1 = 1 \exp(i \cdot 0) = 1e^{i0}$$



$$i = 1 \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$



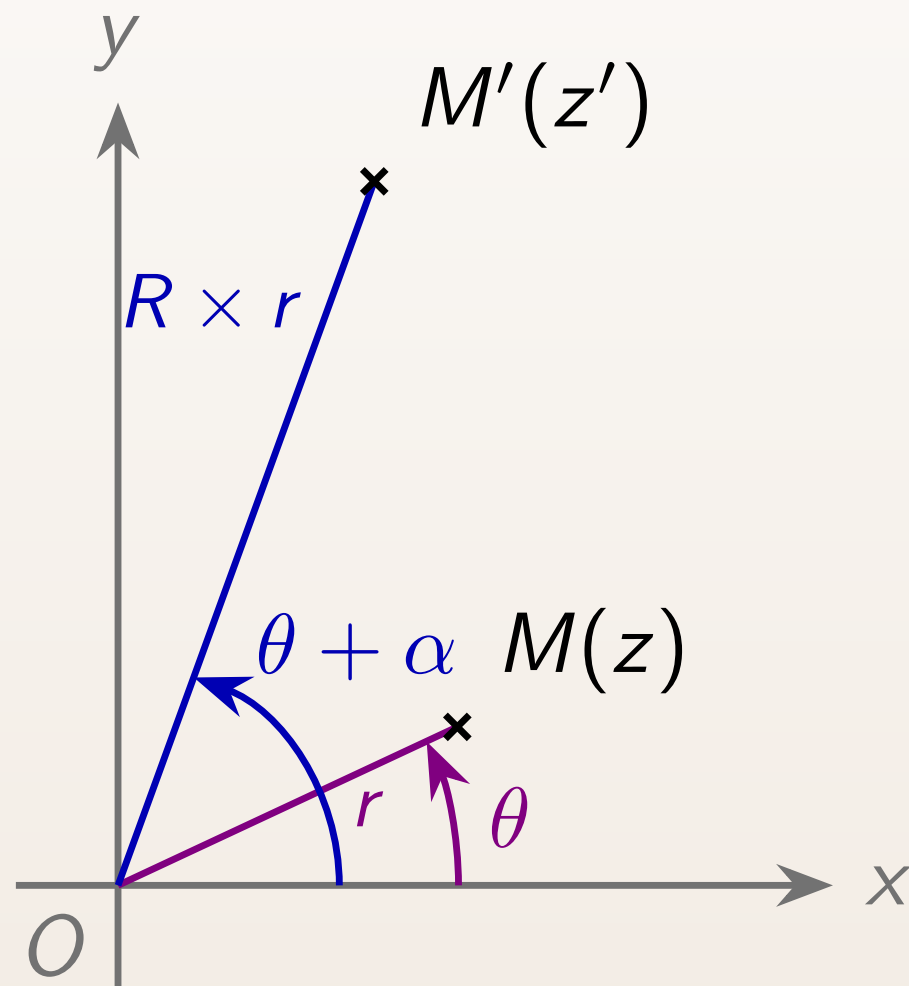
$$-i = 1 \exp\left(i \cdot \frac{-\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



$$-1 = 1 \exp(i \cdot \pi) = e^{i\pi}$$

Nombres complexes vs transformations du plan

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z = re^{i\theta}$ et $z' = z \cdot Re^{i\alpha}$
 $\longrightarrow z' = re^{i\theta} \cdot Re^{i\alpha} \implies z' = (R \cdot r) e^{i(\theta+\alpha)}$



Si :

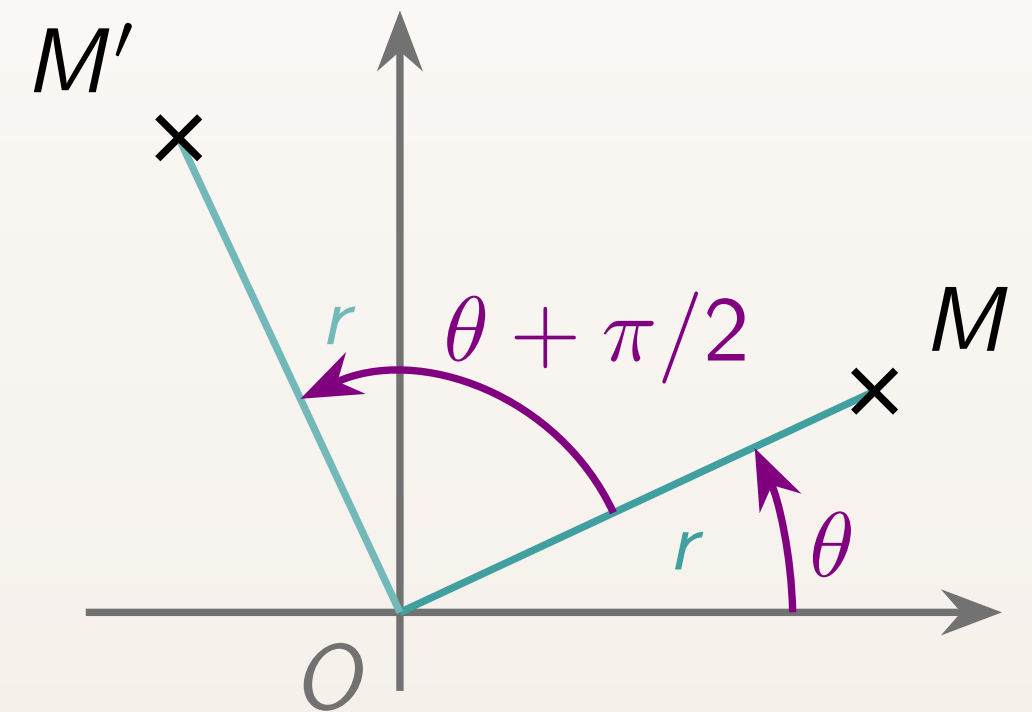
- $R = 1$: **rotation** de centre O et d'angle α
- $\alpha = 0$: **homothétie** de centre O et de rapport R

Sinon ($\alpha \neq 0$ et $R \neq 1$) :

- **similitude** de centre O , de rapport R et d'angle α

Rotation de centre O et d'angle 90°

Soient $M(z)$ et $M'(i \cdot z)$



$$z = re^{i\theta} \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \implies z' = re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

→ **Même résultat que diapo 72**

Question

Soit le point $A(\sqrt{3}; 1)$. Son image B par la rotation de centre O d'angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ suivi de l'homothétie de rapport $k > 0$ est le point $B(0; 4)$. Déterminer θ et k .

- La transformation est une similitude dont l'écriture complexe est $z_B = Z \cdot z_A$ avec $Z = k \exp(i\theta)$
- On écrit donc z_A et z_B sous formes exponentielles : $z_A = \sqrt{3} + i = 2 \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$
 $z_B = 4i = 4 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$
- On calcule $Z = \frac{z_B}{z_A} = \frac{4 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)}{2 \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)} = 2 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$
 $\longrightarrow k = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}$