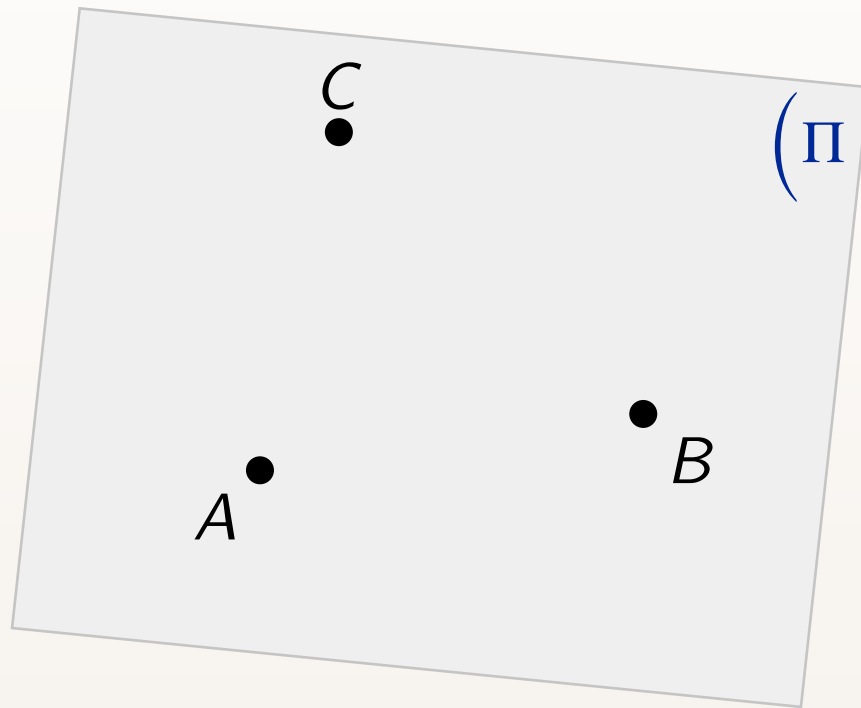
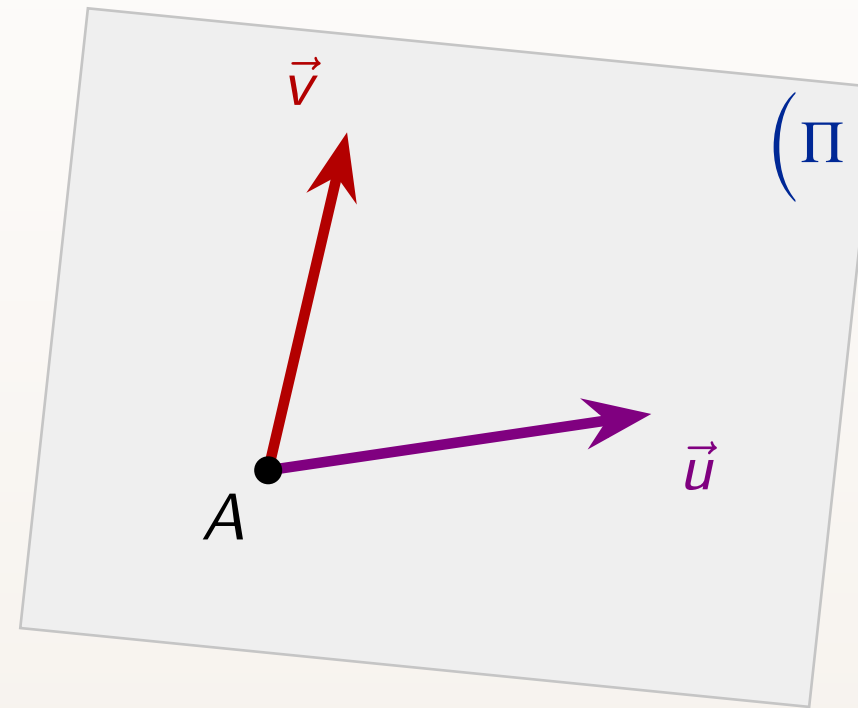


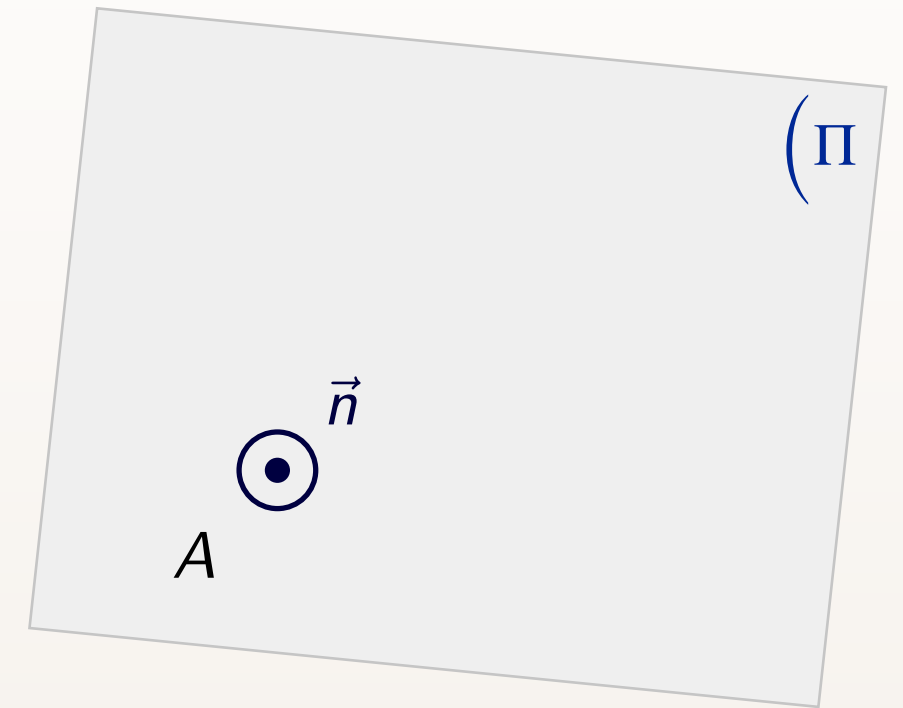
Plans de l'espace



Trois points **non-alignés**



Un point et deux vecteurs
non-collinéaires



Un point et un vecteur **normal**

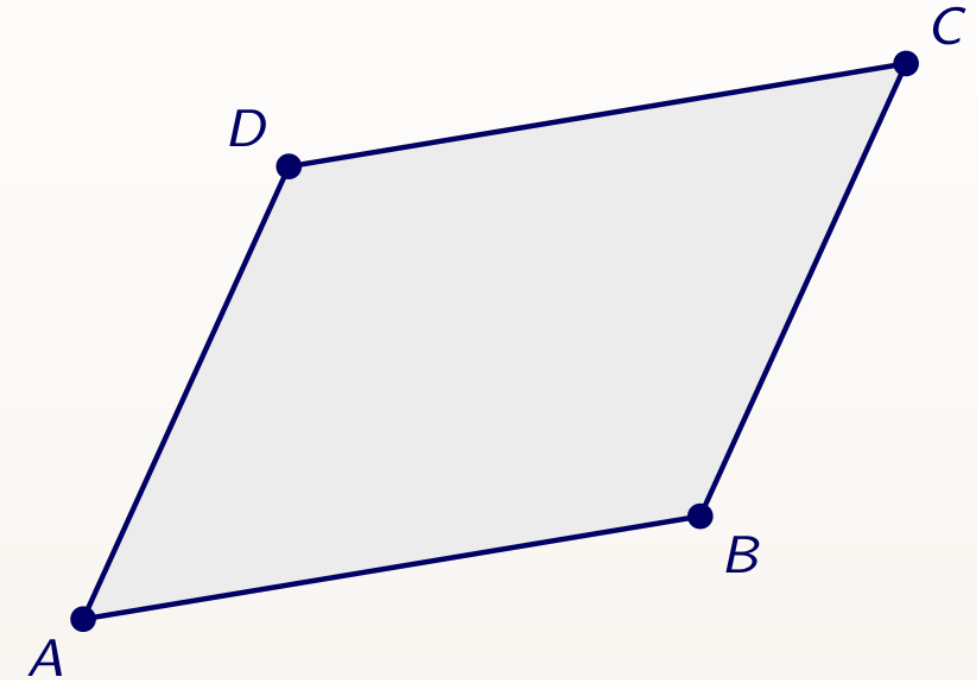
Se ramènent au cas du vecteur normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Question

Soit $ABCD$ un parallélogramme avec $A(1; 2; -1)$, $B(3; 3; 1)$ et $D(2; 4; -3)$.

Calculer la surface S du parallélogramme $ABCD$ et la surface T du triangle ABC



→ Par définition, $S = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$

$$\text{avec } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} & \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| &= \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 3^2} \\ & & &= \sqrt{81} = 9 \text{ unités de surface} \end{aligned}$$

$$\rightarrow T = \frac{S}{2} = 4,5 \text{ unités de surface}$$

Produit mixte (déterminant 3D)



Le produit mixte :

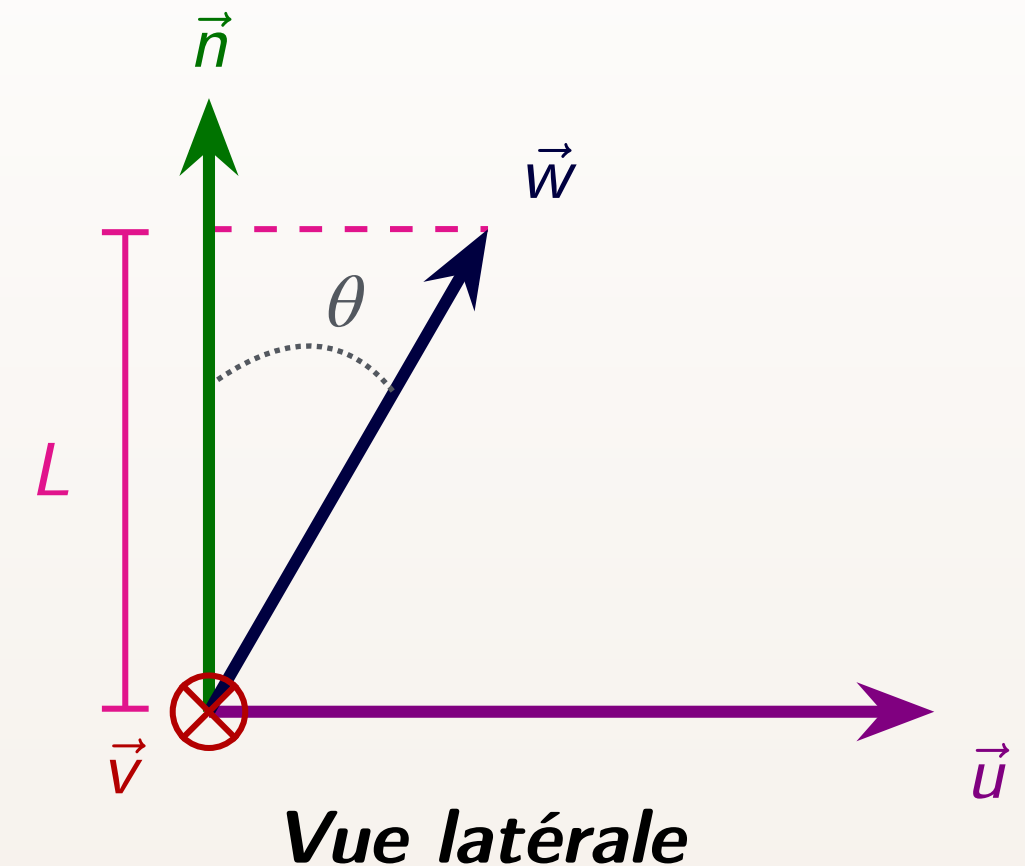
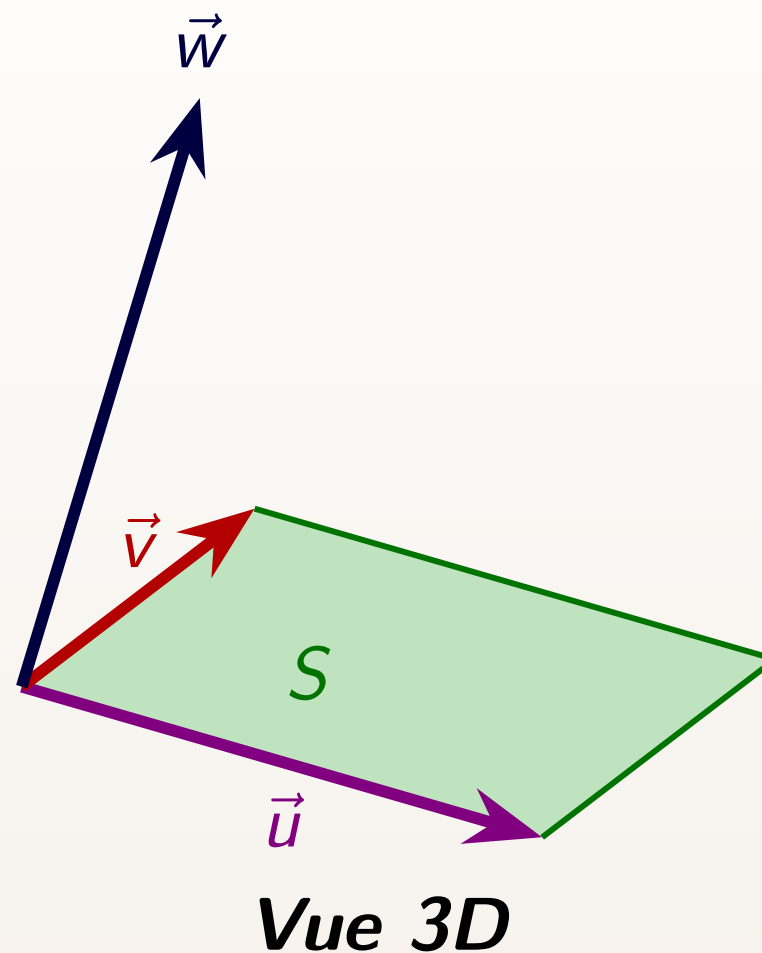
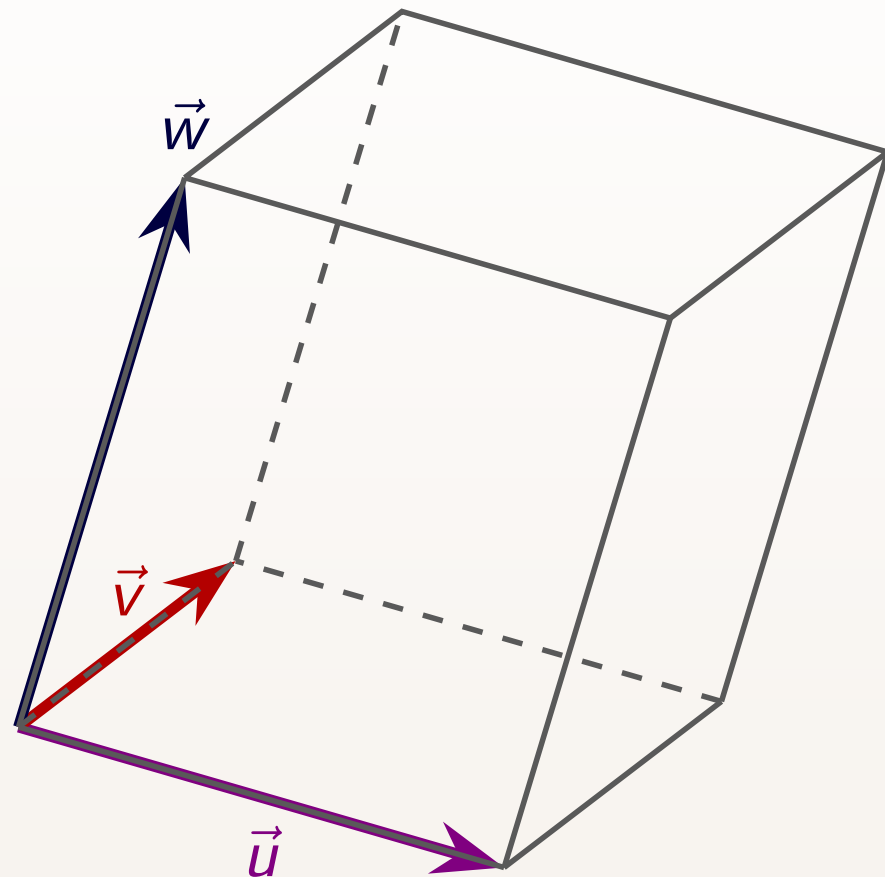
- Donne le **volume orienté** du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (dans cet ordre)
- $m > 0 \iff (\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w})$ est direct
- C'est le déterminant à 3 dimensions (= celui des matrices)

$$\implies m = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Propriétés (elles découlent de la définition) :

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \iff$ il est **invariant** par permutation **circulaire**
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \iff$ il **change** de signe par permutation **simple**
- Si les vecteurs sont non-nuls : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \iff \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**

Méthode de calcul du produit mixte



- On **oriente** la surface S
- On considère $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
 - ➔ $\|\vec{n}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = |S|$
 - ➔ $\vec{n} / (\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{n})$ direct
- $m = L \cdot S$ (= volume avec un signe)
 - ➔ $\vec{n} \cdot \vec{w} = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta = L \cdot S$
 - ➔ Signe de m : **orientation** relative de $\vec{n}$ et $\vec{w}$, donc de $(\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w})$

$$m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

et toutes les permutations circulaires

1. J'écris $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans l'ordre, en commençant par celui que je veux
2. Je pose $\wedge$ où je veux → première opération
3. Je fais le produit scalaire du résultat avec le troisième vecteur

Exemple

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

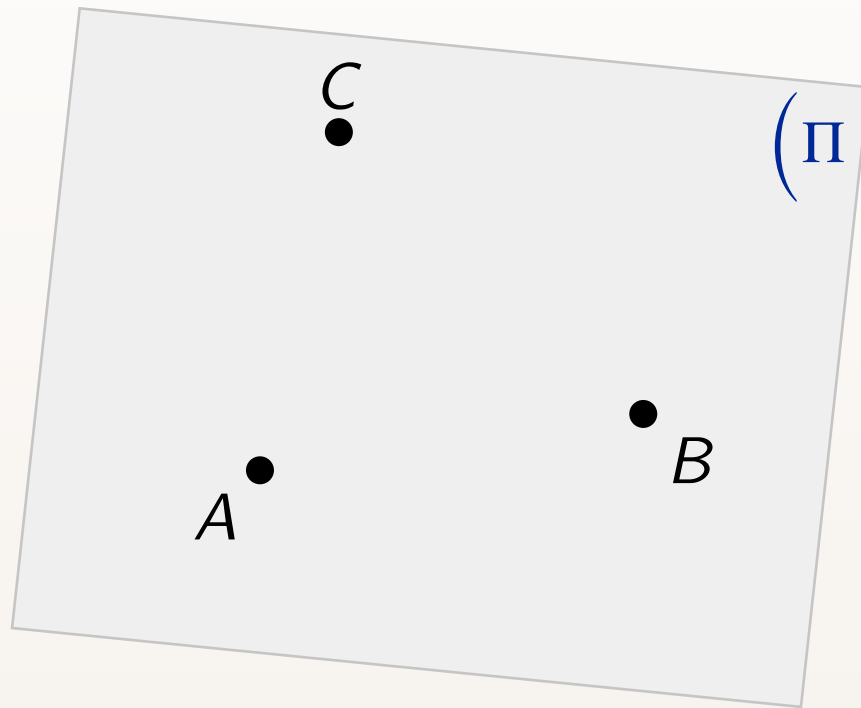
1. Déterminer l'orientation du trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
2. Calculer le volume V du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$m = [\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}] = [\vec{w} ; \vec{u} ; \vec{v}] = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{w} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -(1) \\ -4 \end{pmatrix}$$

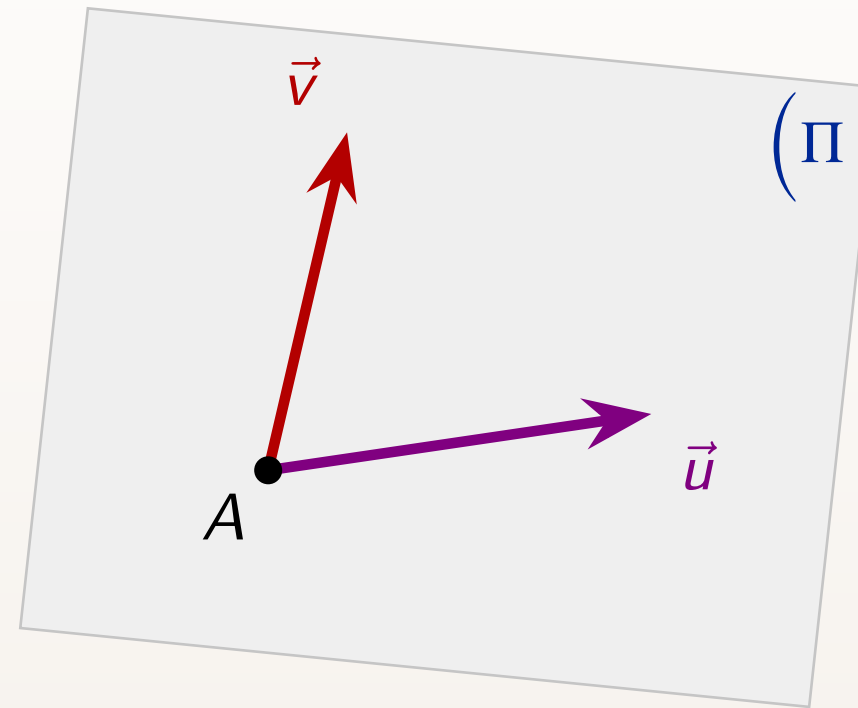
$$\Rightarrow (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 3 - 8 = -13$$

- $\Rightarrow$
1. Le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est indirect car $[\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}] < 0$
 2. $V = |[\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}]| = 13$ unités de volume (13 u^3)

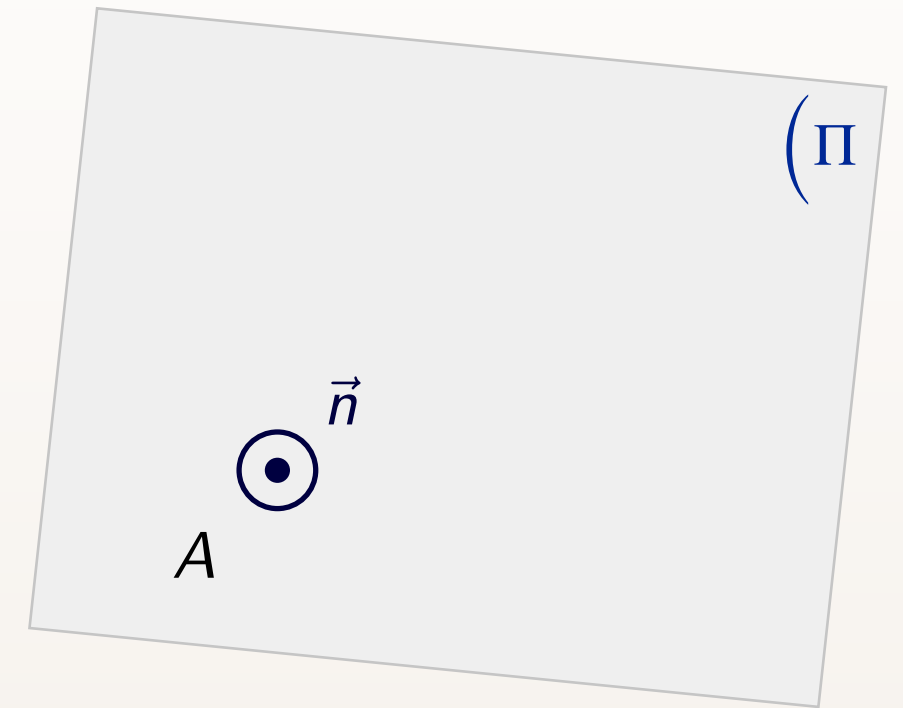
Plans de l'espace



Trois points **non-alignés**



Un point et deux vecteurs
non-collinéaires



Un point et un vecteur **normal**

Se ramènent au cas du vecteur normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$