

Chapitre 2 : Géométrie dans l'espace

Bases et repères

- On généralise à 3D :

- Base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Coordonnées : $(x; y; z)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Abscisse

Ordonnée

Côte

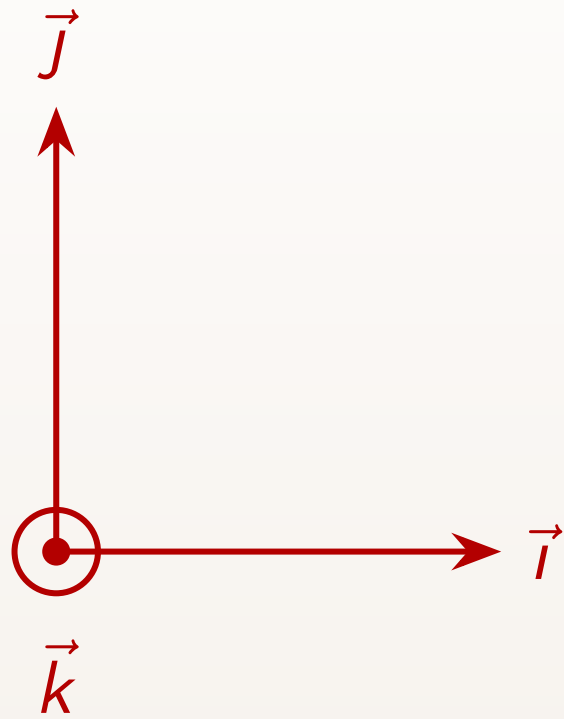
- Vecteur dans la dimension non-représentée : flèche vue de **derrière** ou de **devant**



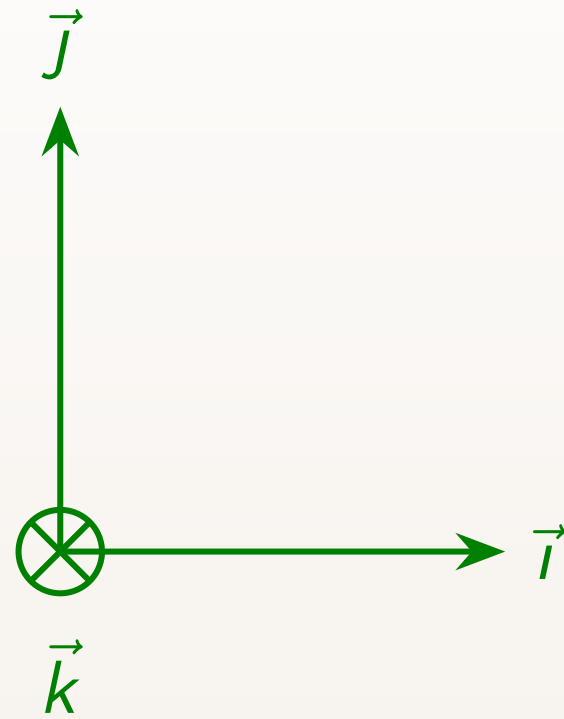
- Nécessité d'**orienter** l'espace :

- Deux possibilités pour positionner $\vec{k}$ par rapport à $\vec{i}$ et $\vec{j}$

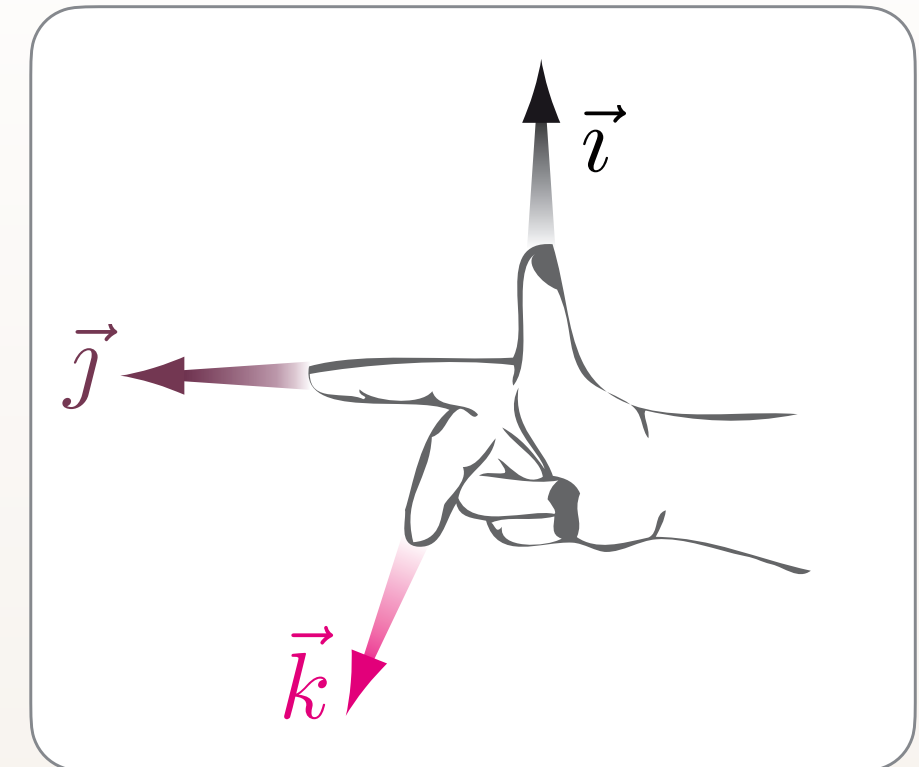
Orientation de l'espace



Trièdre $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ **direct**



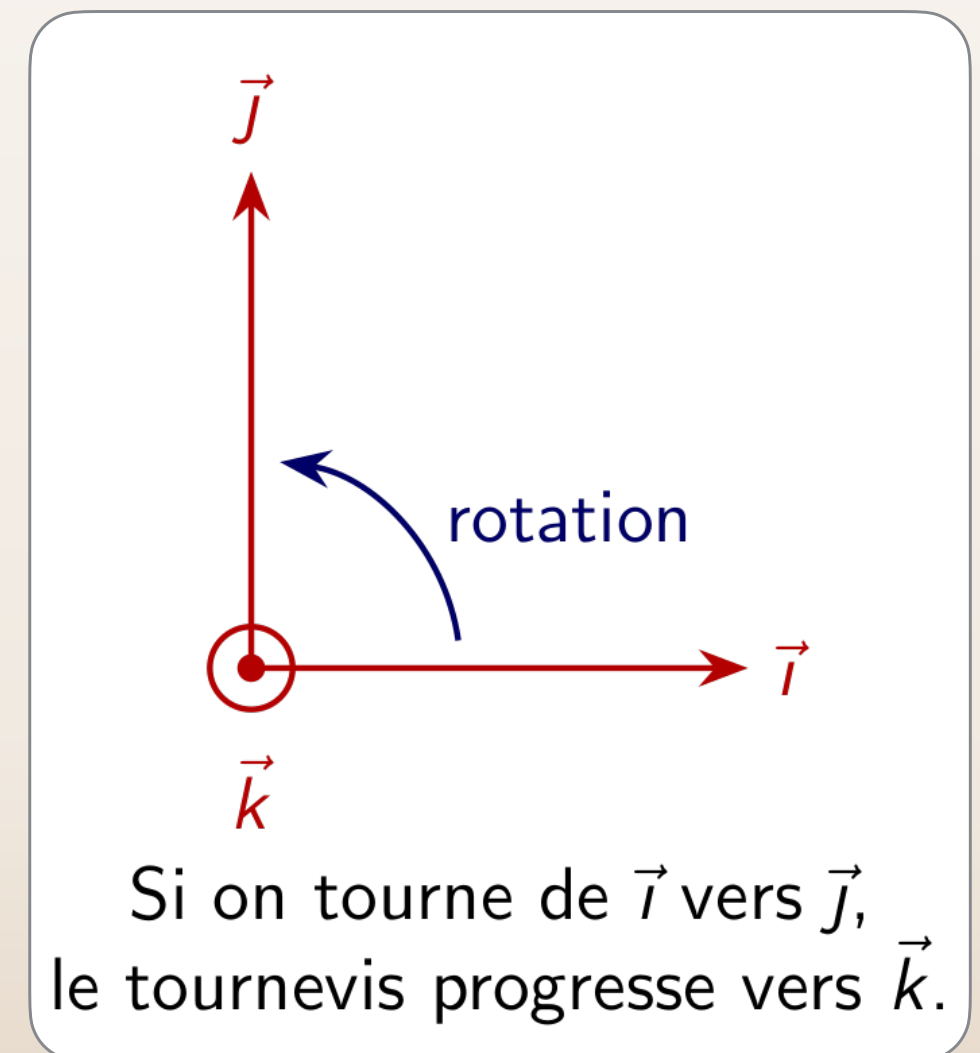
Trièdre $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ **indirect**



Règle de la **main droite**

Permutation **circulaire** :
 $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}), (\vec{j} ; \vec{k} ; \vec{i})$ et $(\vec{k} ; \vec{i} ; \vec{j})$
 ont **même orientation**

Par permutation **simple** :
 $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) \longrightarrow (\vec{j} ; \vec{i} ; \vec{k})$
 l'orientation **change**



Si on tourne de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$,
 le tournevis progresse vers $\vec{k}$.

Règle du **tournevis**

Produit scalaire

Même **définition** que dans le plan $\longrightarrow s = \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$

Question : Donner une mesure de l'angle entre $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 s = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta &\implies \cos \theta = \frac{s}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+16} \cdot \sqrt{1+4+1}} \\
 &= \frac{-1+4+4}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{126}} \\
 &\implies \theta = \pm \arccos \frac{7}{\sqrt{126}} \simeq \pm 51,4^\circ
 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Simplifie le **calcul des angles** dans l'espace

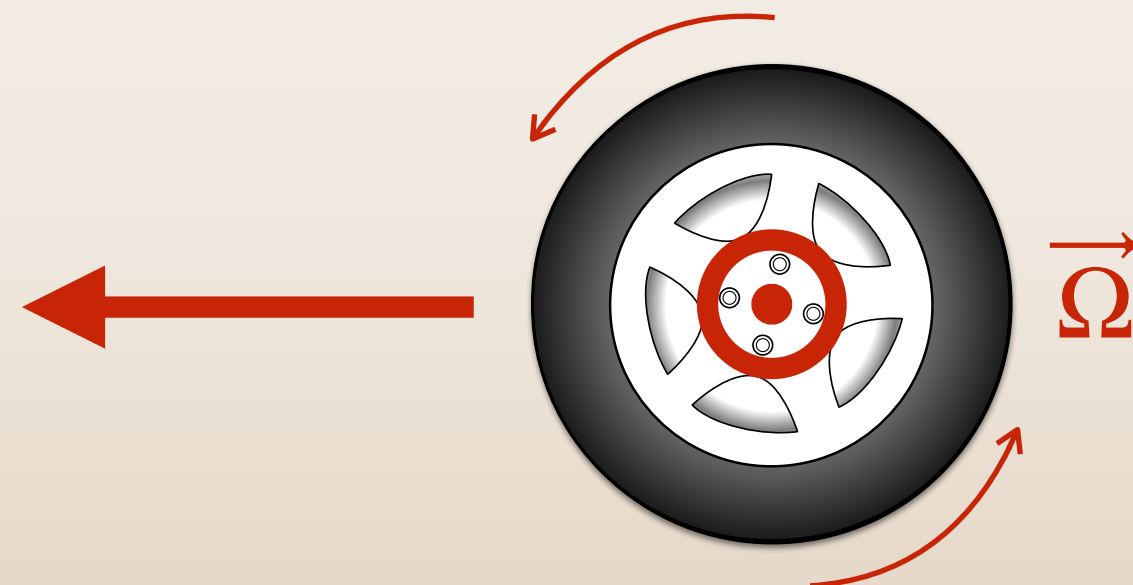
Pseudo-vecteurs



Ils décrivent un **mouvement** de rotation dans le plan **perpendiculaire**

- **Direction** : axe de rotation
- **Sens** : sens de rotation selon règle du tournevis
- **Norme** : vitesse de rotation

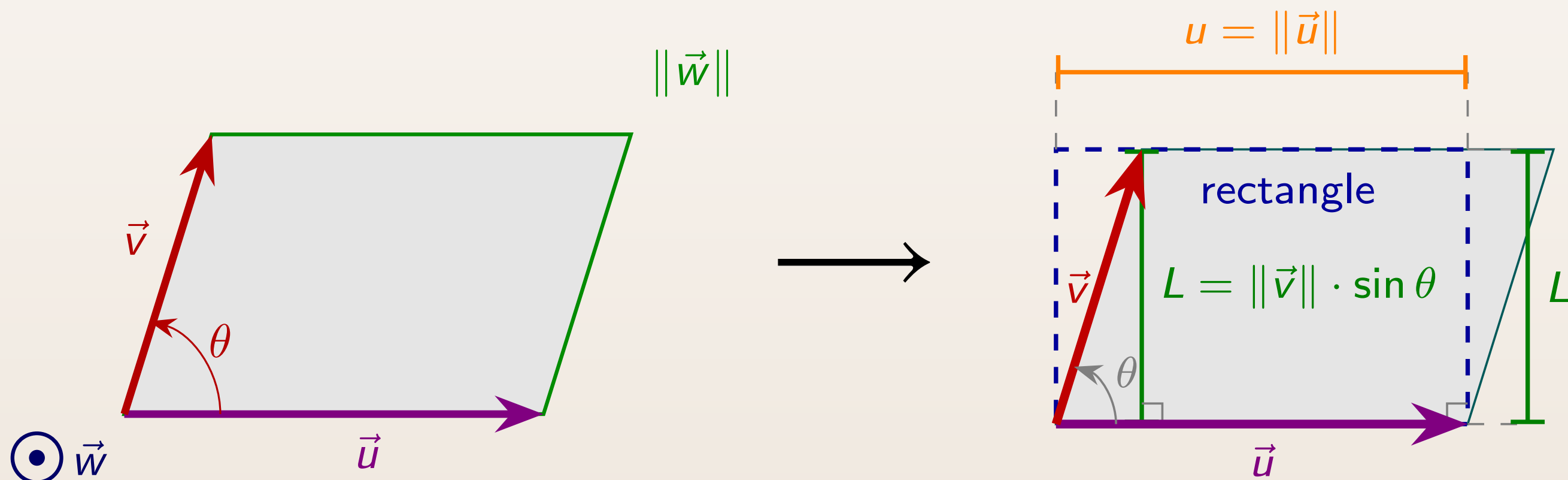
Question : vers où se déplace la roue ?



Produit vectoriel : définition

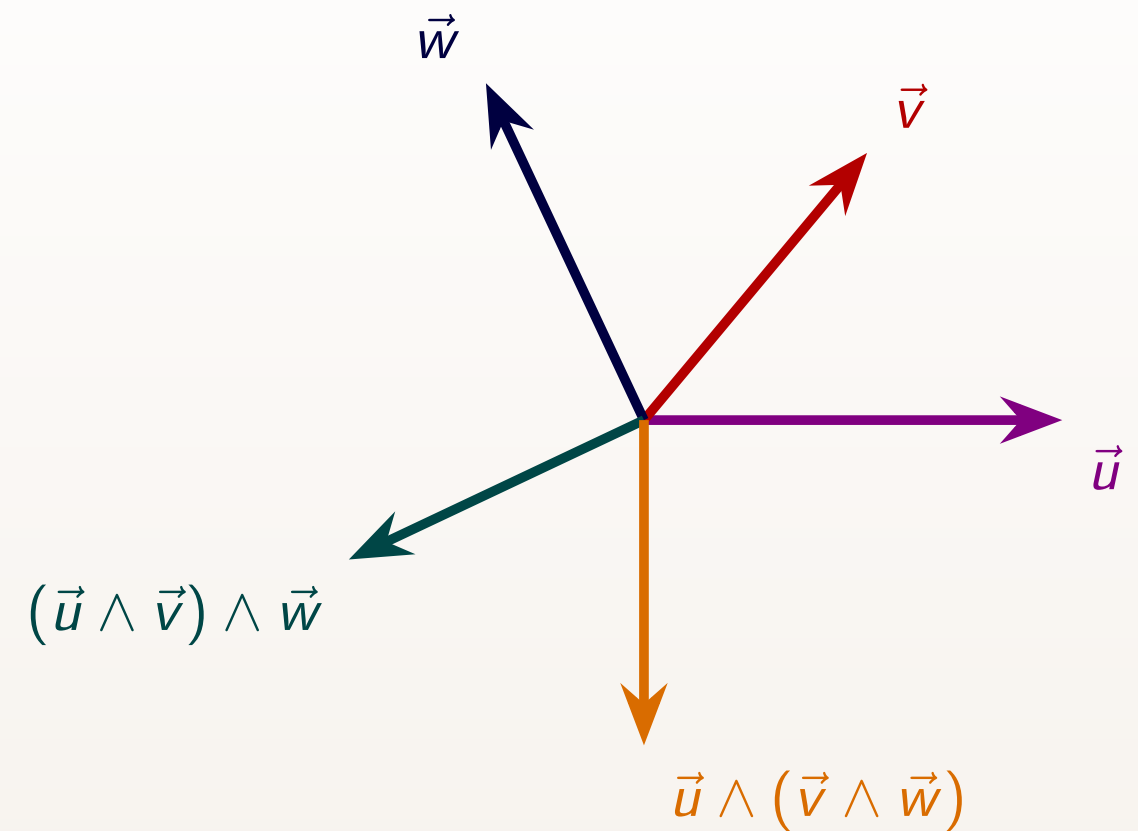
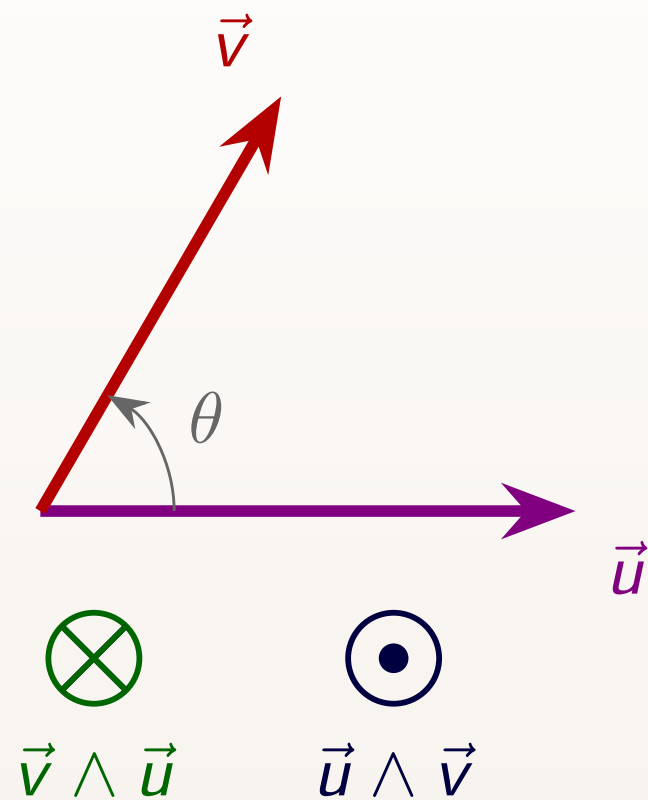


- $\vec{w}$ a :
- pour **direction** l'axe perpendiculaire au plan créé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
 - le **sens** tel que $(\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w})$ est direct
 - pour **norme** l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$



$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\theta)| \geq 0$$

Produit vectoriel : propriétés



Il est **anti-commutatif** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Mais il **n'est pas associatif** :
 $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ ne veut rien dire

Avec les **coordonnées** : importance de l'**ordre** $x, y, z, x, y, \dots$

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v \\ z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v \\ x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v \\ -(x_u \cdot z_v - z_u \cdot x_v) \\ x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} x_u & & x_v \\ y_u & & y_v \end{matrix}$

→ On cache une ligne et on fait le produit en croix des autres, **dans l'ordre**