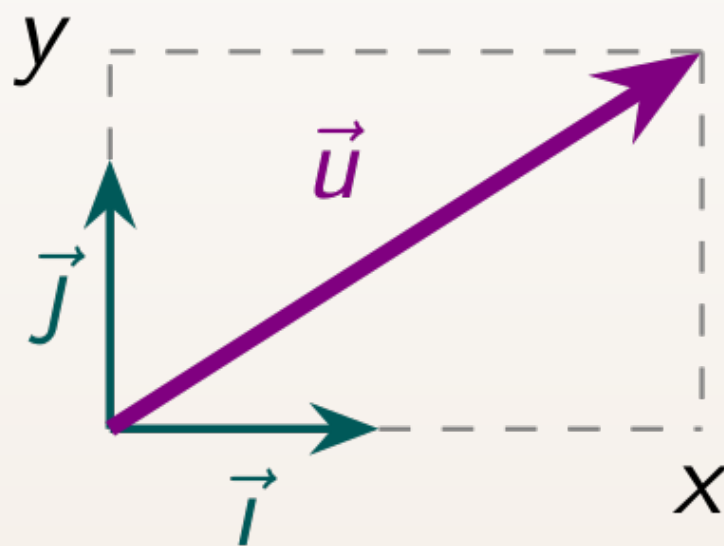


# Remarques sur le produit scalaire

- Base orthonormée :

- $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$
- $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$

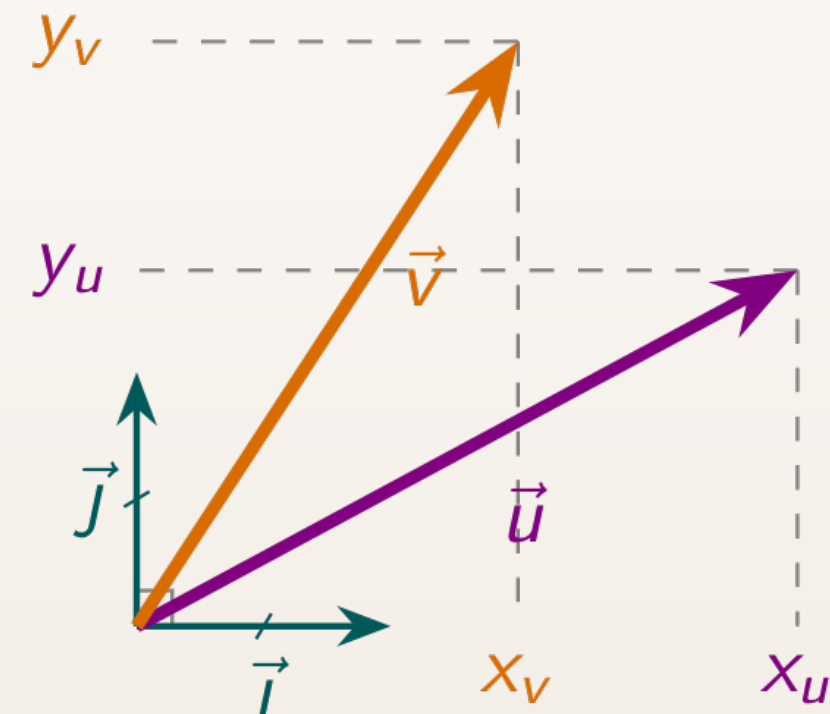
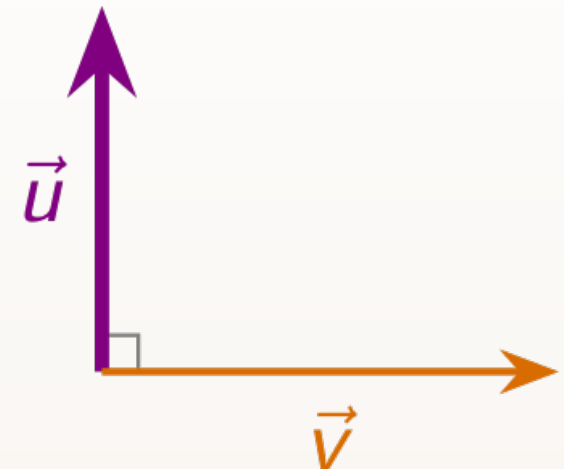


- Carré scalaire :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
- Test d'orthogonalité



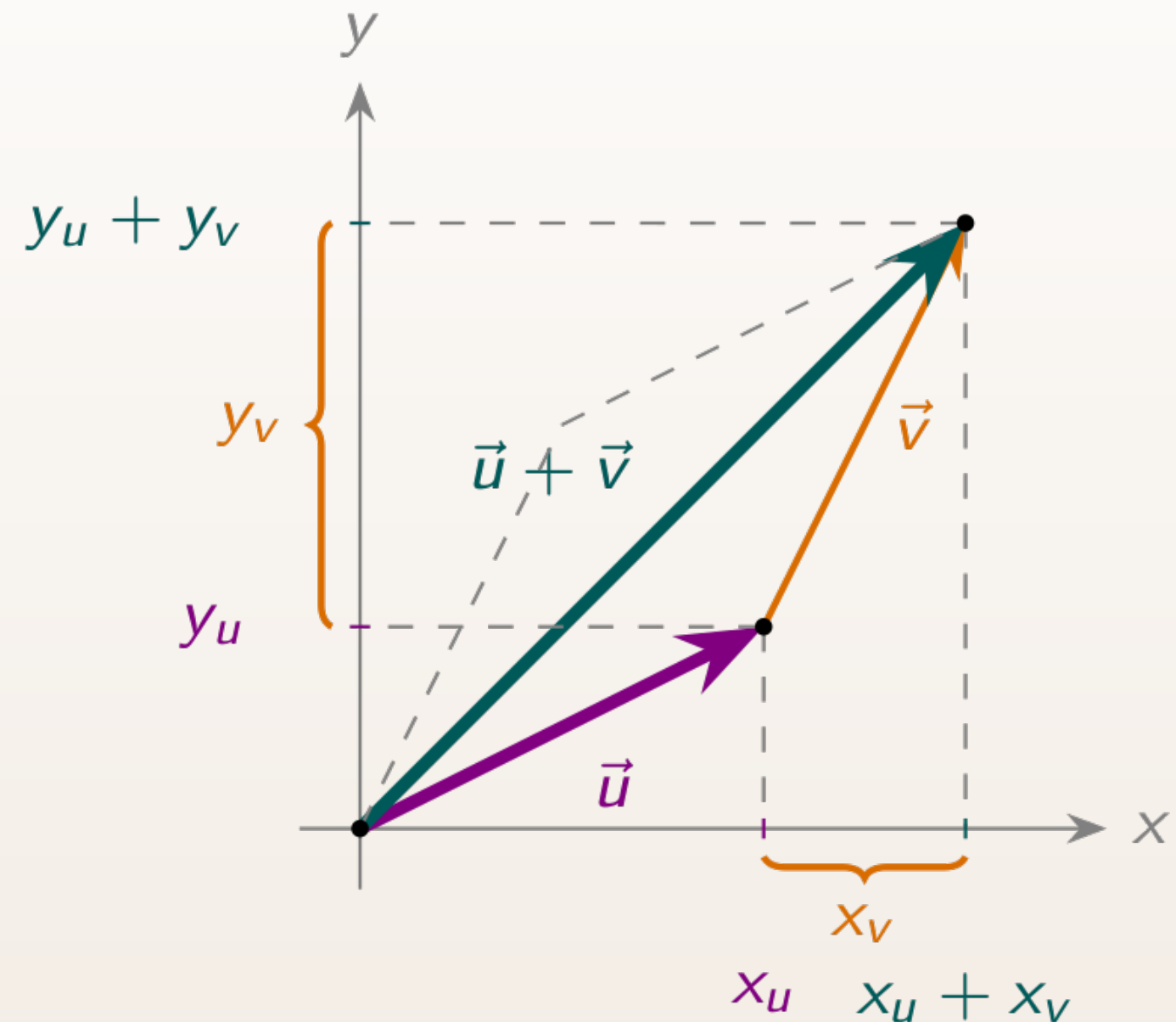
- Coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$$

- Somme des produits des composantes
- voir preuve ../..

# Preuve

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ en développant}$$



En coordonnées :  $(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (x_u + x_v)^2 + (y_u + y_v)^2 = x_u^2 + 2x_u x_v + x_v^2 + y_u^2 + 2y_u y_v + y_v^2 \text{ carré scalaire}$$

Donc  $\cancel{x_u^2} + \cancel{y_u^2} + \cancel{x_v^2} + \cancel{y_v^2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \cancel{x_u^2} + 2x_u x_v + \cancel{x_v^2} + \cancel{y_u^2} + 2y_u y_v + \cancel{y_v^2}$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$$

## Preuve

Dans une base orthornormée :  $\vec{u} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j}$  et  $\vec{v} = x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j}$

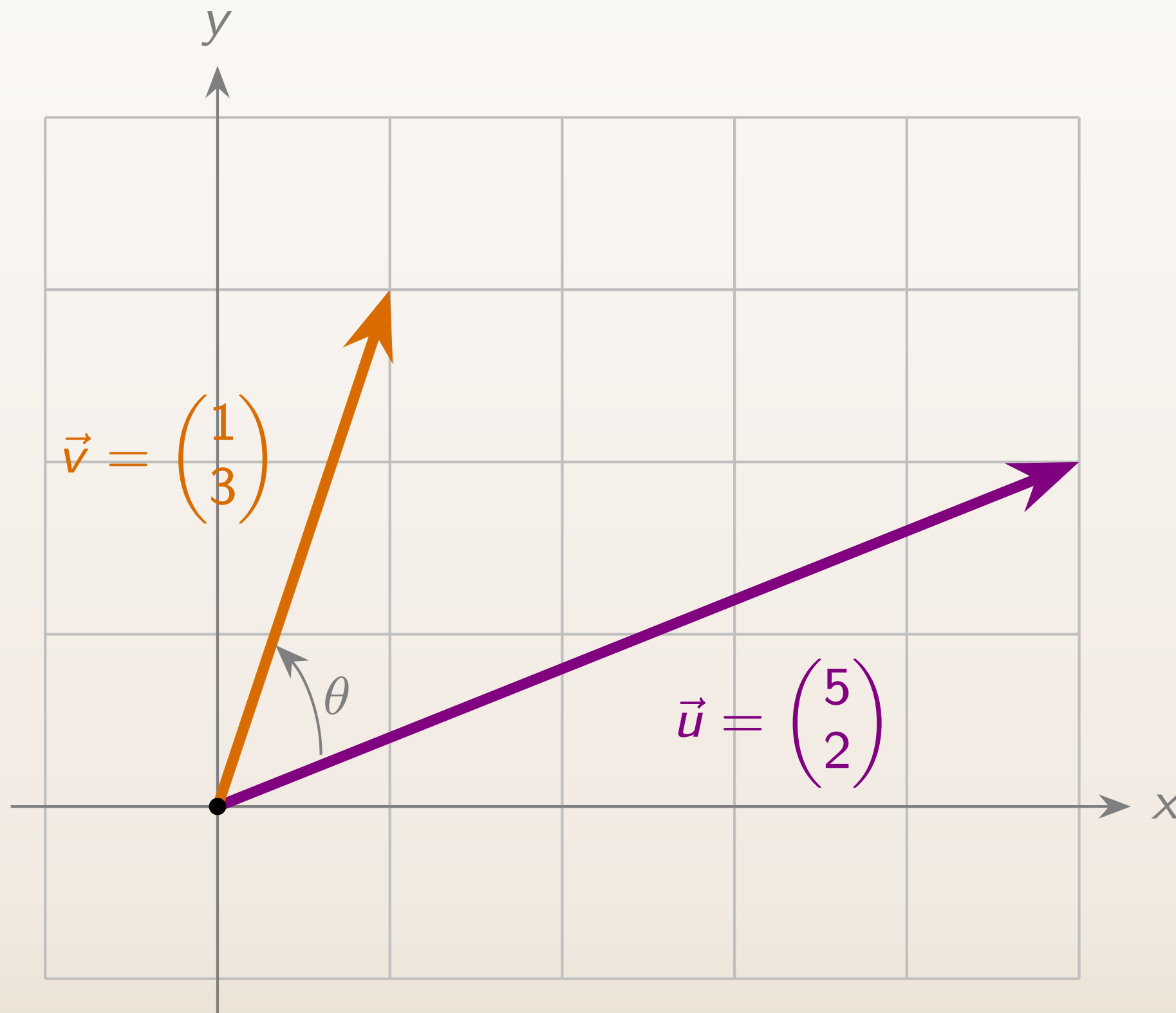
$$\implies \vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j}) \cdot (x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j})$$

$$\implies = x_u \cdot x_v \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_1 + y_u \cdot y_v \cdot \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_1 + x_u \cdot y_v \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_0 + x_v \cdot y_u \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_0$$

$$\implies = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$$

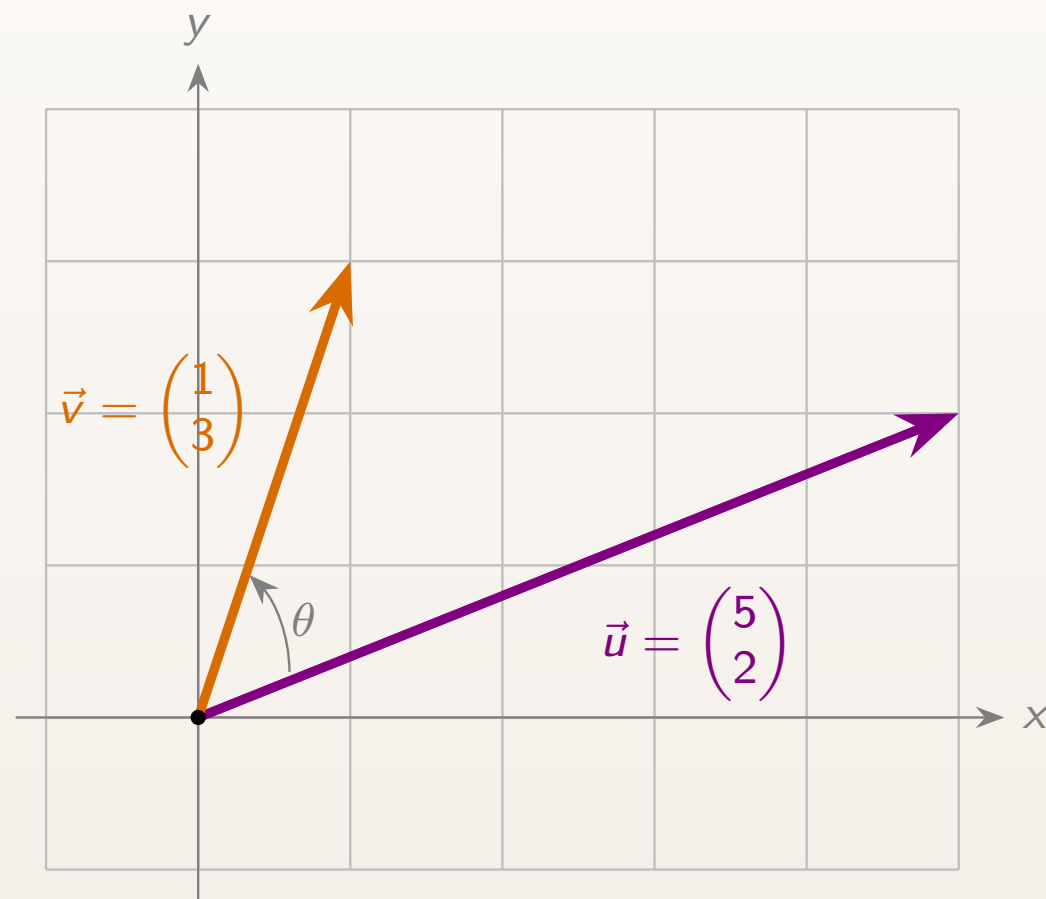
## Application possible

- Calculons **au signe près** et avec **trois chiffres significatifs** la valeur de l'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :



# Application numérique

- Calculons **au signe près** et avec **trois chiffres significatifs** la valeur de l'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :



$$s = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \iff \cos \theta = \frac{s}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$s = \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 11$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

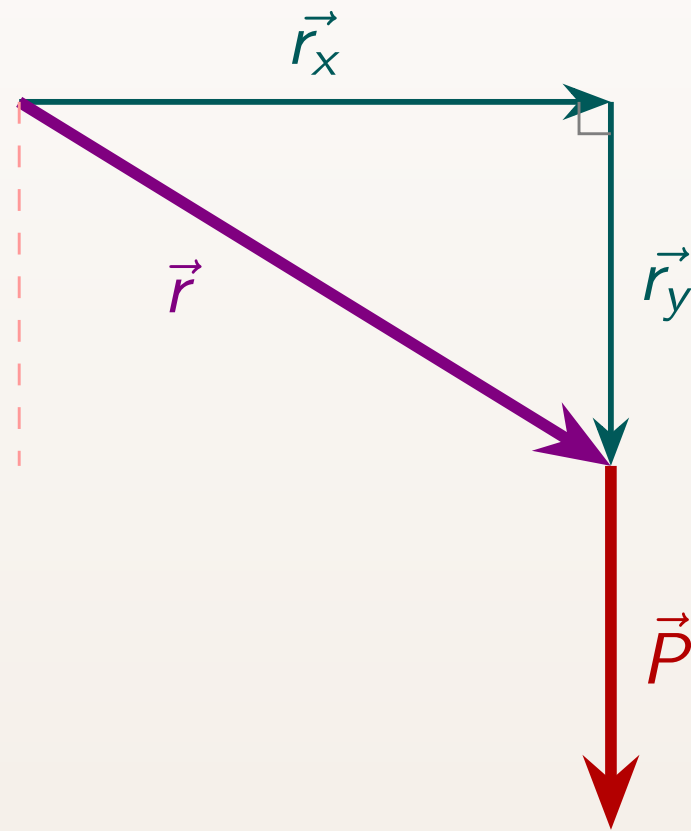
$$\cos \theta = \frac{11}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{29}} \simeq 0,646$$

$$\iff \theta \simeq \arccos(0,646) \simeq 0,869 \text{ rad}$$

$$\iff \theta \simeq \frac{0,869}{\pi} \times 180^\circ \simeq 49,8^\circ$$

# Exemple en physique

- Travail du poids

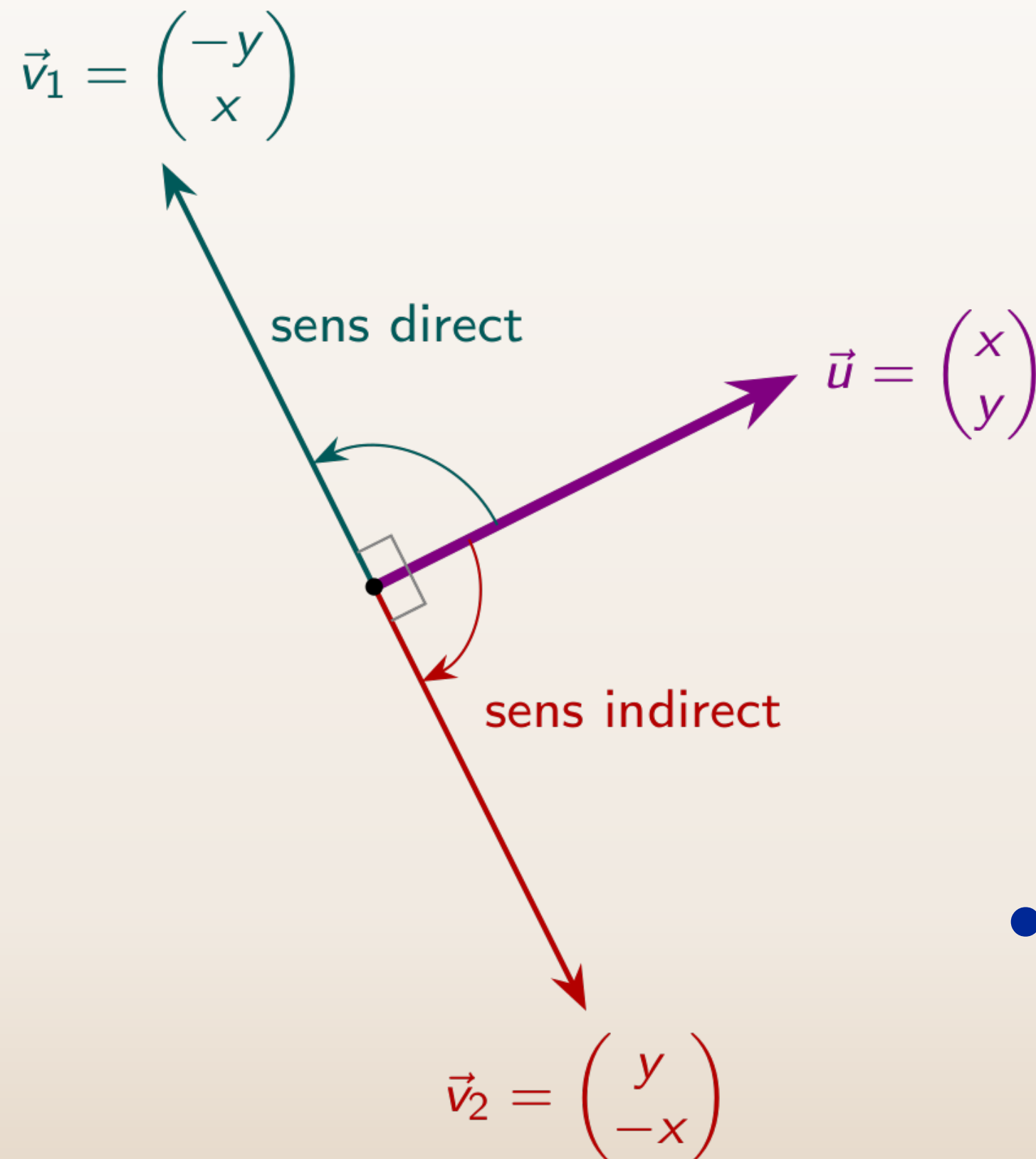


$$W = \vec{P} \cdot \vec{r}$$

## Question utile pour la suite

Soit dans le plan  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Quelles coordonnées  $x'$  et  $y'$  donner à  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  pour que  $\vec{u} \perp \vec{v}$  ?



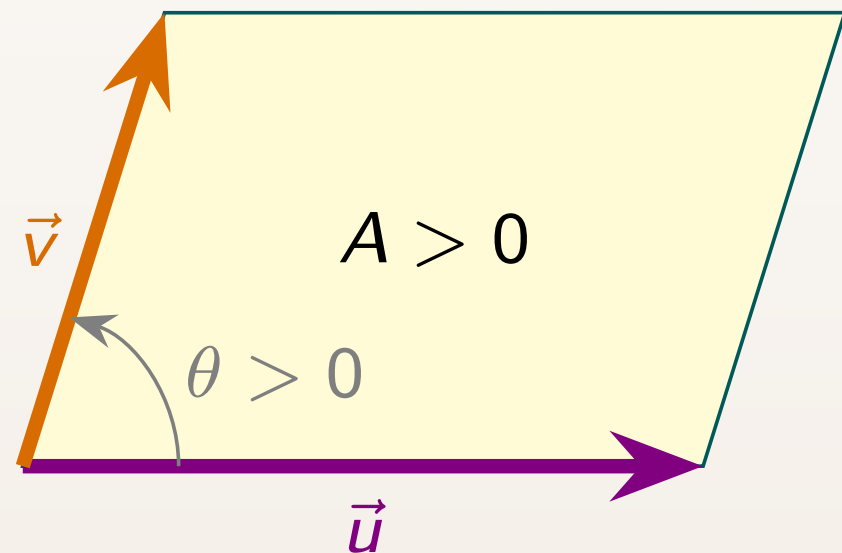
- Il suffit que  $xx' + yy' = 0$
- ➡ Rotation d'un quart de tour

- Pour le retenir : « Permutation-opposition »

# Déterminant (2D)

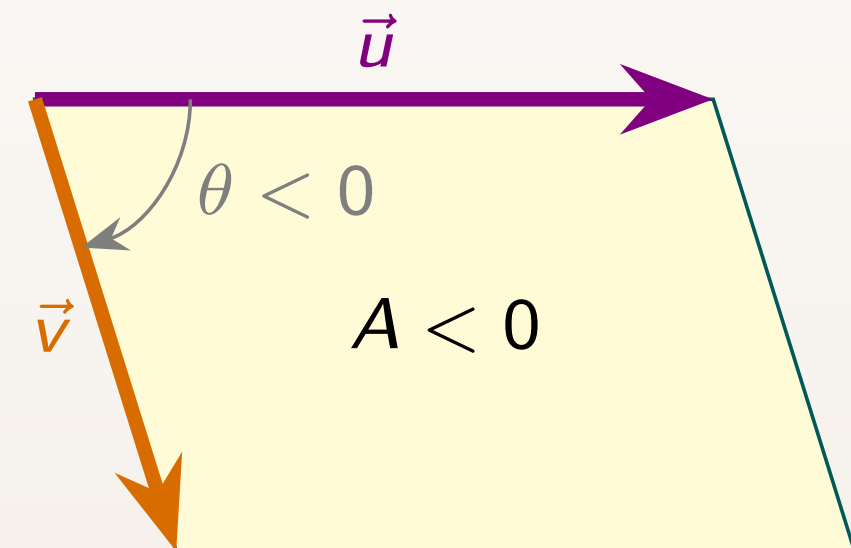


- Donne l'aire **orientée** du parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

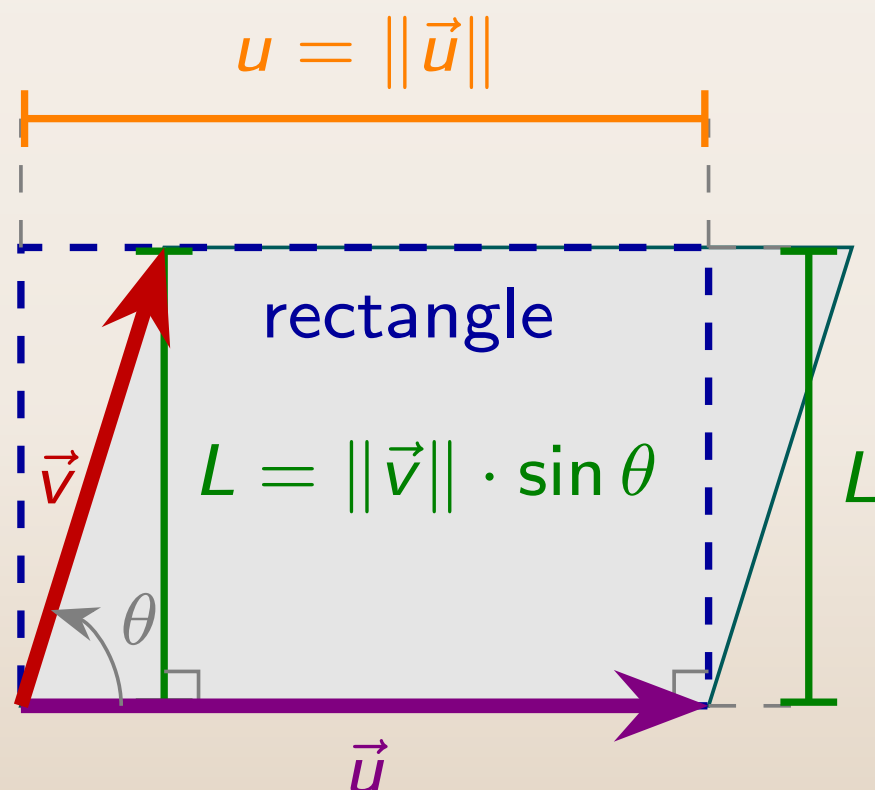


$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  en sens **direct**

$$\theta = (\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$$



$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  en sens **indirect** ou **inverse**



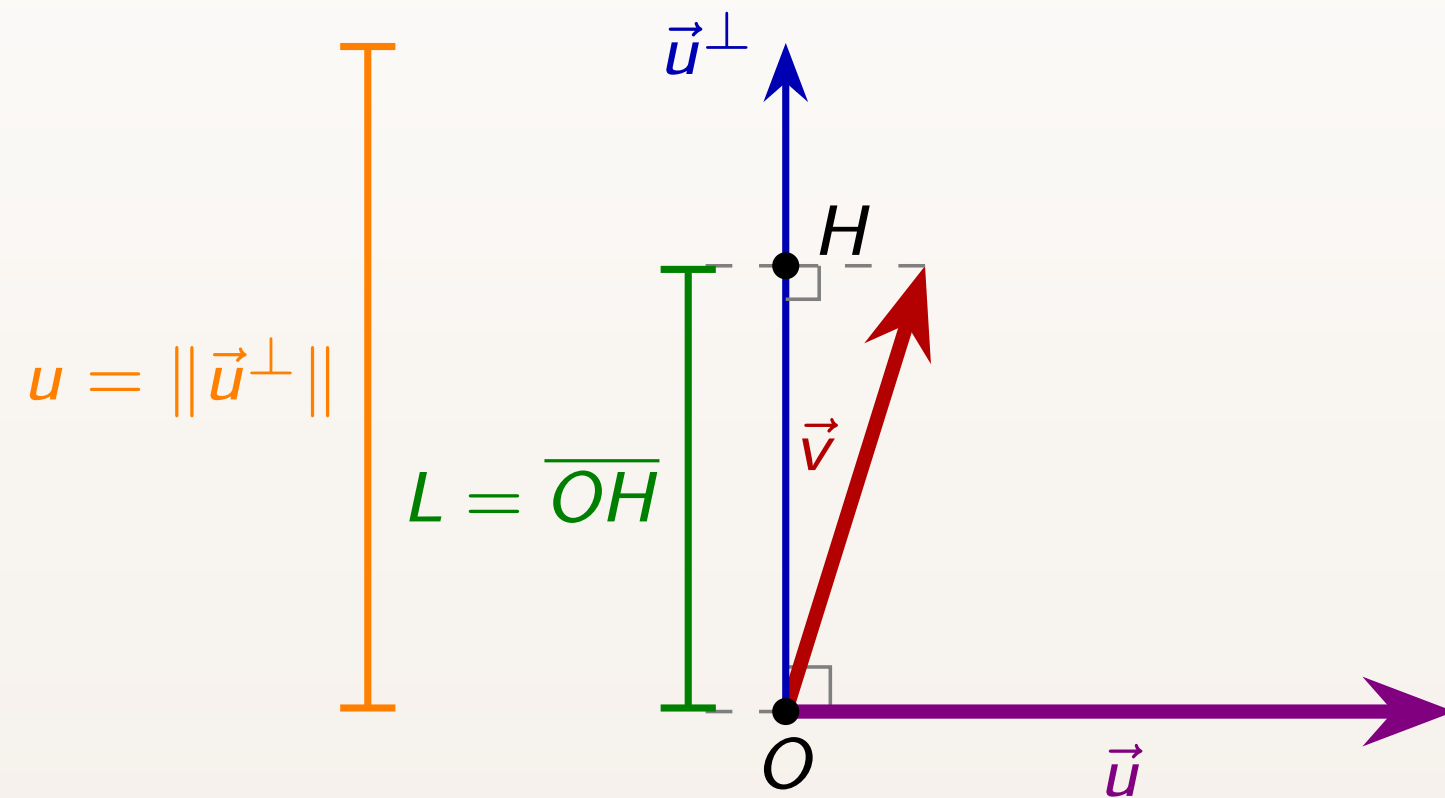
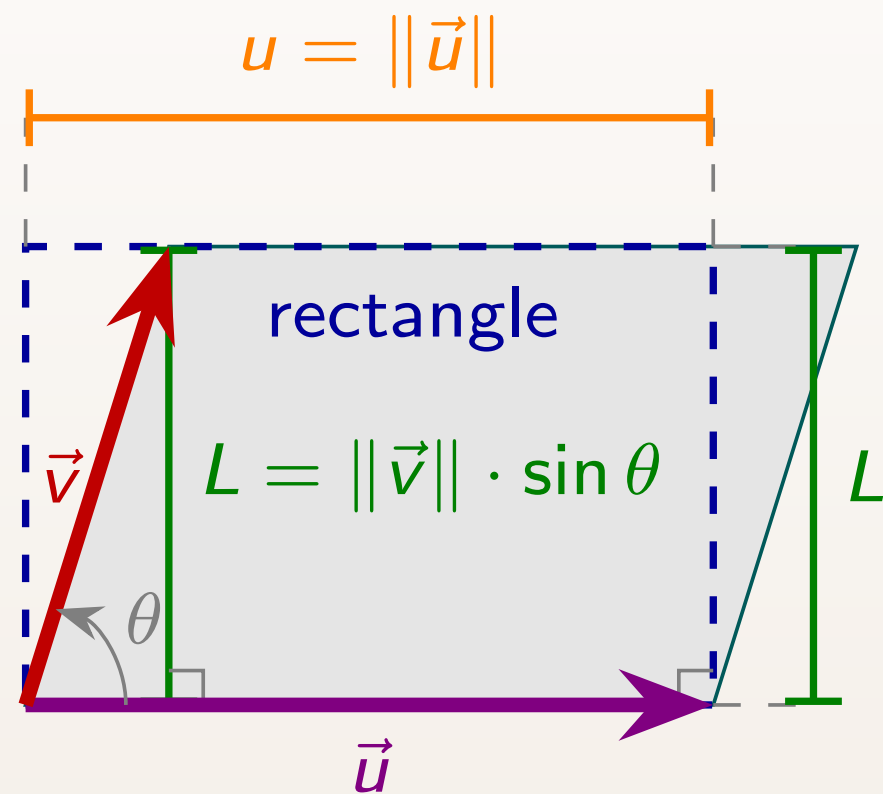
- Rectangle de même aire :

- $A = L \times u$
- $L < 0$  si  $\theta < 0$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

- Anti-commutativité** :  $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$

# Le déterminant (2D) avec les coordonnées



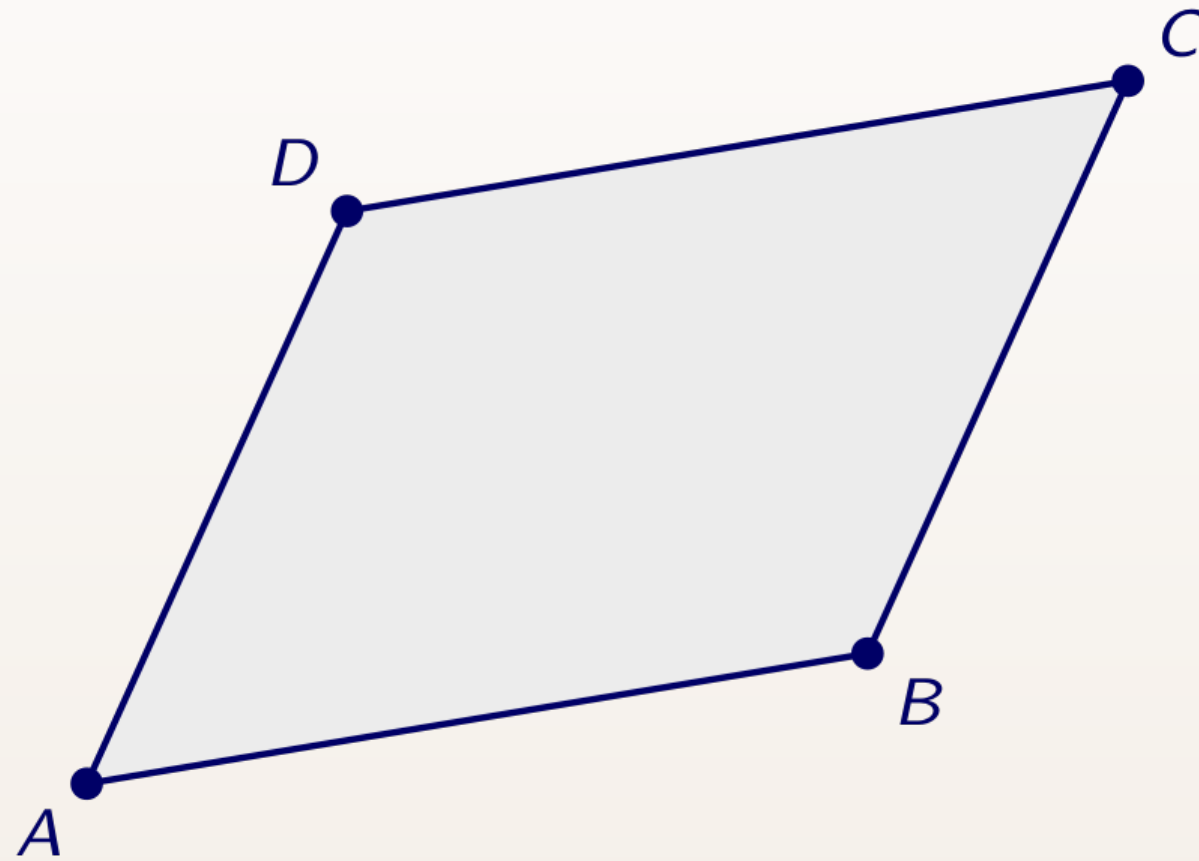
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = L \times u = \vec{u}^\perp \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u}^\perp = \begin{pmatrix} -\vec{y}_u \\ \vec{x}_u \end{pmatrix} \implies \det(\vec{u}, \vec{v}) = x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

## Application possible

Calculer l'aire  $A$  du parallélogramme ci-dessous.



On donne :  $A(1 ; 3)$ ,  $B(4 ; 7)$ ,  $D(2 ; 5)$

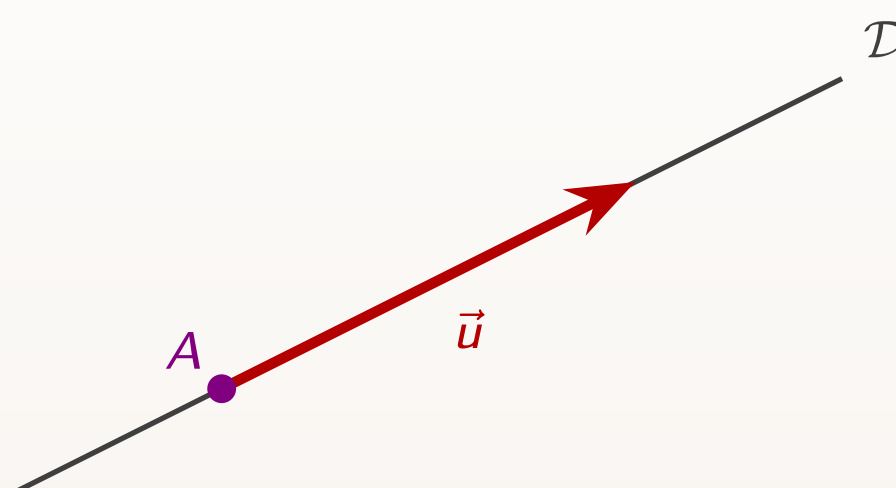
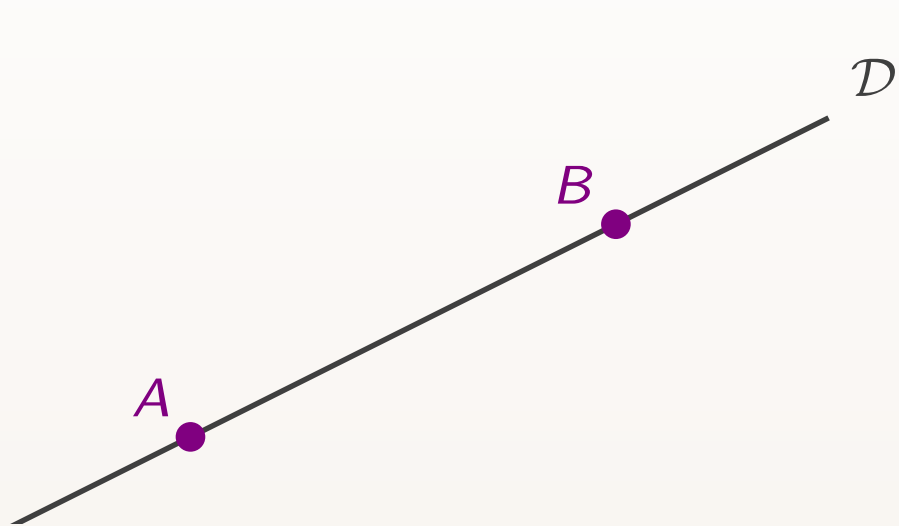
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 7 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

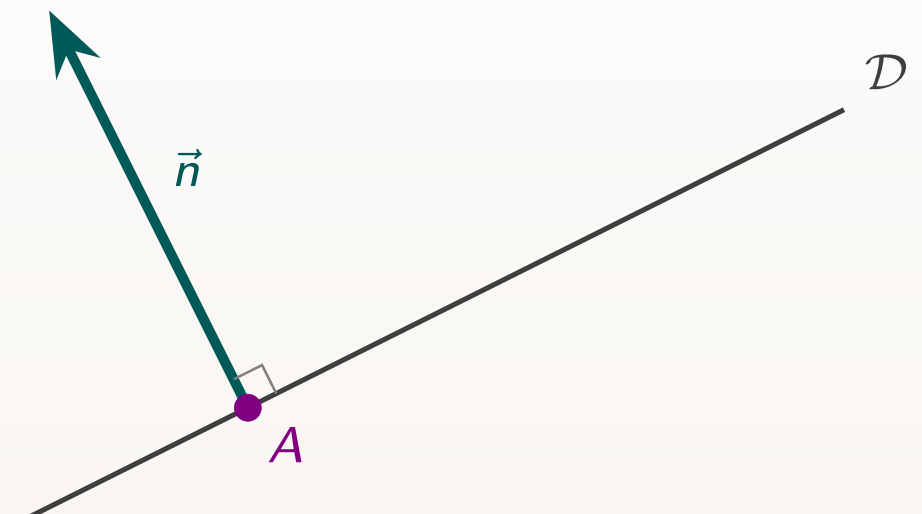
$$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A = \left| \det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) \right| = 2 \, u_A \text{ (unités d'aire)}$$

# Droites du plan et équation réduite



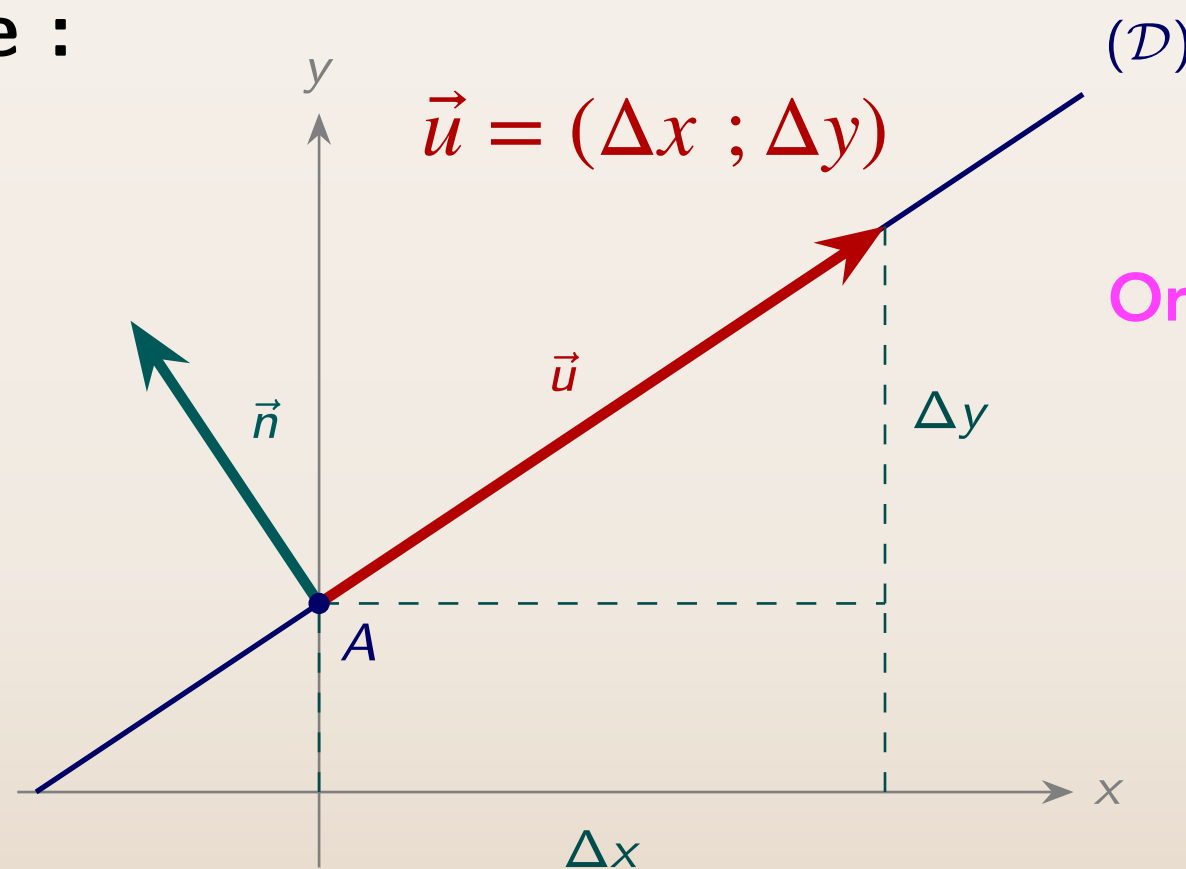
$\vec{u}$  est un vecteur **directeur**  
 Tout  $\vec{v} \parallel \vec{u}$  est aussi directeur



$\vec{n}$  est un vecteur **normal**  
 Tout  $\vec{v} \parallel \vec{n}$  est aussi normal

Équation réduite :

$$y = mx + p$$



$A(0; p)$   
 Ordonnée à l'origine

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{Coefficient directeur}$$

$$\Delta x = 1 \implies$$

$$\vec{u} = (1; m)$$