

# Géométrie dans le plan

Notes du cours #1

## 1 Pourquoi des vecteurs ? L'exemple de la bille

(cf. diapositives 3-4 : « Que va-t-il se passer ? »)

**Idée de départ :** une bille se déplace avec une vitesse  $\vec{v}$ . Si on lui applique une force  $\vec{F}$ , comment sa trajectoire va-t-elle changer ?

**Cas où la bille est déjà en mouvement ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ )**

| Situation | Configuration                             | Effet prévisible                                                 |
|-----------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1         | $\vec{v}$ seul, pas de force              | Mouvement rectiligne uniforme (vitesse inchangée)                |
| 2         | $\vec{F}$ dans le même sens que $\vec{v}$ | La bille <b>accélère</b> , sans changer de direction             |
| 3         | $\vec{F}$ opposée à $\vec{v}$             | La bille <b>ralentit</b> (voire rebrousse chemin)                |
| 4         | $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{v}$     | La trajectoire <b>se courbe</b> , la vitesse change de direction |

**Cas où la bille est immobile au départ ( $\vec{v} = \vec{0}$ )**

Quand plusieurs forces sont appliquées, c'est leur **somme vectorielle** (la résultante) qui détermine le mouvement :

- **Situation 5 :** une seule force  $\vec{F} \rightarrow$  la bille part dans la direction de  $\vec{F}$ .
- **Situation 6 :**  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  dans le **même sens**  $\rightarrow$  les effets s'additionnent, la résultante est plus grande, dans la même direction.
- **Situation 7 :**  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  **opposées**  $\rightarrow$  elles se compensent partiellement ou totalement (équilibre si  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , la bille reste immobile).
- **Situation 8 :**  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  **perpendiculaires**  $\rightarrow$  la bille part selon la **diagonale** (résultante  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ), ni dans la direction de l'une ni dans celle de l'autre.

**Conclusion pédagogique :** un vecteur n'est pas qu'un nombre — il faut une **direction**, un **sens** et une **intensité (norme)** pour décrire une vitesse ou une force, et c'est exactement ce qui va être formalisé mathématiquement dans la suite du cours.

## 2 Définition d'un vecteur

(cf. diapositive 5 : « Vecteurs »)

Un vecteur  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  est caractérisé par trois éléments :

- une **norme** (positive), notée  $\|\vec{v}\|$  : c'est sa longueur / intensité ;
- une **direction** (un axe) ;
- un **sens** (de A vers B).

A est l'**origine** du représentant, B son **extrémité**.

## Colinéarité

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \exists k \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

*Avec du texte :*  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel non nul  $k$  tel que  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ .

- $k > 0$  :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont le même sens.
- $k < 0$  :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens opposés.

*Explications.* Dire que  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$  revient à dire que  $\vec{u}$  s'obtient en étirant ou en rétrécissant  $\vec{v}$  (et éventuellement en le retournant si  $k < 0$ ), sans jamais changer sa direction. Deux vecteurs colinéaires ont donc des représentants portés par des droites parallèles (ou confondues).

## Relation de Chasles

$$\forall C \in \pi, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

*Avec du texte :* quel que soit le point  $C$  choisi dans le plan, on a toujours  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ . Le symbole  $\forall$  se lit « pour tout » ou « quel que soit ».

Cas particuliers utiles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} &= \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

*Avec du texte :* le symbole  $\Rightarrow$  se lit « implique » ou « donc » : le fait que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$  entraîne que  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

*Explications.* Aller directement de  $A$  à  $B$  revient au même, en terme de déplacement, que d'aller d'abord de  $A$  à  $C$ , puis de  $C$  à  $B$  — le point intermédiaire  $C$  disparaît dans le bilan (mais attention, pas en termes de distance). Le cas  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  est un cas particulier : ne pas bouger, c'est un déplacement nul. Et  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$  traduit le fait qu'aller de  $A$  à  $B$  puis revenir de  $B$  à  $A$  ramène bien à son point de départ.

## Vecteur unitaire

$$\vec{u} \text{ est unitaire} \iff \|\vec{u}\| = 1$$

*Avec du texte :*  $\vec{u}$  est unitaire exactement dans le cas où sa norme vaut 1 (les deux affirmations sont équivalentes).

## Inégalité triangulaire

$$\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$$

*Explications.* Passer par  $C$  pour aller de  $A$  à  $B$  ne peut jamais raccourcir le trajet : le chemin direct (le segment  $[AB]$ ) est toujours le plus court. On retrouve ainsi, avec le vocabulaire des vecteurs, l'inégalité triangulaire bien connue en géométrie : dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure ou égale à la somme des deux autres. L'égalité a lieu exactement quand  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont **colinéaires** (et de même sens) : il n'y a alors plus de « détour »,  $C$  se trouve sur le segment  $[AB]$ .

### 3 Que peut-on écrire ? (opérations valides)

(cf. diapositives 6-7 : « Oui ou non ? »)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

| Expression                          | A-t-elle un sens ?                                                                           |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m \cdot \vec{u}$                   | Oui                                                                                          |
| $\vec{u} + \vec{v}$                 | Oui                                                                                          |
| $m + \vec{u}$                       | Non (on n'additionne pas un scalaire et un vecteur)                                          |
| $\frac{\vec{u}}{m}$                 | Oui, si $m \neq 0$ $\frac{1}{m} \cdot \vec{u}$                                               |
| $\vec{u} - \vec{v}$                 | Oui                                                                                          |
| $\vec{u}^2$                         | Oui (c'est le carré scalaire, voir §6)                                                       |
| $m \cdot (\vec{u} + \vec{v})$       | Oui $m \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$                                                      |
| $(m + p) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ | Oui (distributivité) $m \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v} + p \cdot \vec{u} + p \cdot \vec{v}$ |
| $\ \vec{u}\  + m$                   | Oui (norme = nombre réel, addition de deux réels)                                            |
| $\vec{u} \times \vec{v}$            | Non (aucun produit de ce type n'a été défini entre deux vecteurs à ce stade)                 |
| $\vec{u}/\vec{v}$                   | Non                                                                                          |

**Règle générale à retenir :** on ne peut additionner que des objets de même nature (vecteur + vecteur, ou réel + réel). Un scalaire multiplie un vecteur mais ne s'additionne jamais directement à lui.

#### Remarques :

- Pour  $\vec{u} \times \vec{v}$ , le symbole «  $\times$  » ne désigne pas ici un produit particulier : il représente simplement un éventuel « produit » entre deux vecteurs, dont on n'a donné aucune définition pour le moment. L'expression n'a donc pas de sens pour l'instant.
- La division d'un vecteur par un autre n'a pas de sens, contrairement à la division par un scalaire.

### 4 Coordonnées d'un vecteur dans une base

(cf. diapositive 8 : « Coordonnées » et diapositive 9 : « Base et vecteurs de base »)

#### Base et décomposition

Si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont **non colinéaires**, ils forment une **base** du plan  $\pi$  :

$$\forall \vec{u} \in \pi, \exists ! x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

*Avec du texte :* pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan, il existe un unique réel  $x$  et un unique réel  $y$  tels que  $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$ . On lit  $\forall$  « pour tout »,  $\exists !$  « il existe un unique », et  $\in$  « appartient à » (ou « dans »).

On note alors :

$$\vec{u} = (x ; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Attention** : les coordonnées  $(x ; y)$  dépendent entièrement de la base choisie — le même vecteur  $\vec{u}$  aura des coordonnées différentes dans une autre base.

La condition «  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  non colinéaires » est essentielle : si les deux vecteurs de base étaient colinéaires, ils ne définiraient qu'une seule direction, et il serait impossible d'atteindre tous les

vecteurs du plan en les combinant, on ne pourrait se situer que sur une droite. Dès qu'ils ont deux directions distinctes, en revanche, on peut toujours « décomposer » n'importe quel vecteur  $\vec{u}$  en une contribution le long de  $\vec{i}$  et une autre le long de  $\vec{j}$  avec des valeurs de  $x$  et  $y$  uniques.

## Types de bases

| Type de base      | Condition                                                  |
|-------------------|------------------------------------------------------------|
| Base (quelconque) | $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires                     |
| Base orthogonale  | $\vec{i} \perp \vec{j}$                                    |
| Base normée       | $\ \vec{i}\  = \ \vec{j}\ $ (pas forcément = 1)            |
| Base orthonormée  | $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\ \vec{i}\  = \ \vec{j}\  = 1$ |

C'est la base **orthonormée** qui sera utilisée dans la suite du cours (la plus « pratique » car les axes sont perpendiculaires et gradués à l'identique).

**Remarque :** La base orthogonale est utilisée dès lors que les deux axes ont des dimensions différentes, mais ce ne sera pas le cas en géométrie du plan.

## 5 Repère et position d'un point

(cf. diapositive 10 : « Comment décrire la position du point  $M$  ? » et diapositive 11 : « Repère : points et vecteurs »)

### Repère

Un **repère**  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  = une **base**  $(\vec{i}, \vec{j})$  + une **origine**  $O$ .

Grâce à un repère, on peut associer une position (un point) à des coordonnées.

### Coordonnées d'un point

Les coordonnées du point  $M$  sont **celles du vecteur**  $\overrightarrow{OM}$  :

$$M(x; y) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Avec du texte : dire que  $M$  a pour coordonnées  $(x; y)$  équivaut à dire que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  dans le repère considéré.

**Remarque :** du fait de la dépendance à  $O$ , on n'écrit pas d'égalité entre  $M$  et  $(x; y)$ .

### Calcul du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées de $A$ et $B$

En utilisant Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

D'où, si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

## 6 Le produit scalaire

(cf. diapositive 12 : « Produit scalaire »)

## Définition géométrique

Le produit scalaire associe à deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  un **nombre réel**  $s$  (et non un vecteur!) :

$$s = \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

En notant  $H$  le projeté orthogonal de l'extrémité de  $\vec{v}$  sur la droite portant  $\vec{u}$ ,  $L_u = \|\vec{u}\|$  et  $L_v = \overline{OH}$  (longueur algébrique de la projection) :

$$s = L_u \times L_v$$

ce qui donne, avec  $\theta = (\vec{u}; \vec{v})$  l'angle entre les deux vecteurs :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta}$$

- Si  $\theta$  est **aigu** :  $\cos \theta > 0 \Rightarrow s > 0$
- Si  $\theta$  est **obtus** :  $\cos \theta < 0 \Rightarrow s < 0$

## Remarques :

- Le produit scalaire est un produit de deux longueurs. La première est définie par la norme de l'un des deux vecteurs, la seconde par la projection du second vecteur sur le premier. Cette seconde longueur est une valeur algébrique, qui est négative si les deux segments projetés sont disjoints.
- Dans l'exemple de la bille du §1 : le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  est positif quand la force pousse dans le sens du mouvement (situation 2), négatif quand elle s'y oppose (situation 3). Il est nul dans la situation 4 où les vecteurs sont orthogonaux : la valeur algébrique de la vitesse ne varie pas, c'est la trajectoire de la bille qui change.

## Commutativité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

En effet  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ , donc inverser les rôles de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (donc le signe de l'angle) ne change pas le résultat.

## Carré scalaire et norme

(cf. diapositive 13 : « Remarques sur le produit scalaire »)

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Dans une base **orthonormée**, si  $\vec{u} = (x; y)$  :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \quad \implies \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Coordonnées d'un vecteur via le produit scalaire

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i} \qquad y = \vec{u} \cdot \vec{j}$$

étant donné que les normes de vecteurs de base sont égales à 1.

## Test d'orthogonalité

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

Avec du texte :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si et seulement si  $\vec{u}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$  (symboles  $\iff$  : « si et seulement si », et  $\perp$  : « perpendiculaire à »).

*Explications.* C'est une conséquence directe de la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$  : comme  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, leurs normes ne s'annulent pas, donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  implique que  $\cos \theta = 0$ , c'est-à-dire que  $\theta = \pm 90^\circ$ .

**Propriété importante :** Le produit scalaire permet de tester l'orthogonalité de deux vecteurs.

## Formule avec les coordonnées (base orthonormée)

Si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$  :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v}$$

C'est simplement la **somme des produits des composantes**.

*Explications.* Cette formule découle de la décomposition dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et du fait que le produit scalaire se « distribue » sur une somme (comme une multiplication ordinaire) : en écrivant  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j}$  et  $\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j}$ , on obtient

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_u y_v (\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_u x_v (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_u y_v (\vec{j} \cdot \vec{j}).$$

Or, dans une base **orthonormée**,  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$  (vecteurs unitaires) et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$  (vecteurs orthogonaux) : il ne reste donc que les deux termes  $x_u x_v + y_u y_v$ .