

---

## Approfondissement des outils mathématiques de gestion

---

### 1 Dérivées usuelles

#### Fonctions Affines

Une fonction affine est de la forme  $f(x) = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes. La dérivée d'une fonction affine est donnée par  $f'(x) = a$ .

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = 2$$

#### Fonctions Puissances

Les fonctions puissances sont de la forme  $f(x) = x^n$ , où  $n$  est un nombre réel. La dérivée d'une fonction puissance est donnée par  $f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$ .

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

#### Fonction Exponentielle

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

#### Fonction Logarithmique

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

### 2 Opérations sur les dérivées

#### Dérivée d'un produit

Soient  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions dérivables. La dérivée du produit  $u(x) \cdot v(x)$  est donnée par la règle du produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

#### Exemple

Considérons  $f(x) = x^2 * \exp(x)$ . La dérivée du produit  $f(x)$  est :

$$f'(x) = (x^2 * \exp(x))' = 2x * \exp(x) + x^2 * \exp(x) = \exp(x) * (x^2 + 2x) = \exp(x) * x * (x + 2)$$

#### Dérivée d'un quotient

Soient  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions dérivables, et supposons que  $v(x) \neq 0$ . La dérivée du quotient  $\frac{u(x)}{v(x)}$  est donnée par la règle du quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

### Exemple

Considérons  $f(x) = \frac{x^2}{4x+2}$ . La dérivée du quotient  $f(x)$  est :

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (4x + 2) - (x^2 \cdot 4)}{(4x + 2)^2}$$

### Dérivée de $e^{u(x)}$

Soit  $u(x)$  une fonction dérivable. La dérivée de  $e^{u(x)}$  est donnée par la règle suivante :

$$(e^u)' = u' * e^u$$

### Exemple

Considérons  $f(x) = e^{x^2-1}$ . La dérivée de  $f(x)$  est :

$$f'(x) = 2x * e^{x^2-1}$$

### Dérivée de $\ln(u(x))$

Soit  $u(x)$  une fonction dérivable et positive. La dérivée de  $\ln(u(x))$  est donnée par la règle suivante :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

### Exemple

Considérons  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ . La dérivée de  $f(x)$  est :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

### Dérivée de $\sqrt{u(x)}$

Soit  $u(x)$  une fonction dérivable et positive. La dérivée de  $\sqrt{u(x)}$  est donnée par la règle suivante :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

### Exemple

Considérons  $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$ . La dérivée de  $f(x)$  est :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 6}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6}}$$

**Exercice 1.** Calculer les dérivées suivantes :

$$f_1(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{3x^3 + x^2 + x}$$

$$f_2(x) = 7e^x + 5x^2 + 4x + 12$$

$$f_3(x) = (5x - 3)e^{2x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_5(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$$

$$f_6(x) = \frac{x}{x^2 + \sqrt{x}}$$

$$f_7(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 100}$$

### 3 Applications à l'économie

**Exercice 2.** Une entreprise fabrique un modèle de meuble en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.

Pour  $x$  meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier (exprimé en euros), noté  $C(x)$ , est donné par :  $C(x) = 2,25x^2 - 6x + 20$

Chaque meuble est vendu 299 euros.

L'entreprise est ouverte 5 jours par semaine.

1. Montrer que le bénéfice journalier correspondant à la production et la vente de  $x$  meubles est donné par  $B(x) = -2,25x^2 + 305x - 20$ .

2. Calculer  $B'(x)$  et donner le tableau de variations de  $B$  sur  $[0; 100]$ .

3. Combien de meubles faut-il produire et vendre pour réaliser un bénéfice journalier maximal ?

4. Déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise sur une période de quatre semaines.

**Exercice 3.** Un industriel est seul à fabriquer un produit spécifique et est assuré de vendre toute sa production. Le coût de production  $x$  unités en une semaine est de  $5x^2 + 5x + 100$  euros. Le prix de vente d'une unité est de 85 euros.

Déterminer la quantité de produit à fabriquer pour maximiser le bénéfice hebdomadaire sur ce produit et donner le bénéfice correspondant.

#### Coût marginal

Supposons que le coût total de production de  $n$  unités d'un produit soit donné par  $CT(n)$  où  $CT$  une fonction dérivable.

Le coût de production d'une unité supplémentaire est approché par le coût marginal  $Cm(n) = CT'(n)$ .

**Exemple 1.** Prenons  $CT(n) = 6n^3 - 150n^2 + 8000n$

$$\text{On a } Cm(n) = CT'(n) = 18n^2 - 300n + 8000$$

$$\text{Le coût total de production de 5 unités est } CT(5) = 6 * 5^3 - 150 * 5 + 8000 * 5 = 37\,000 \text{ euros}$$

$$\text{Le coût de production (réel) de la 6ème unité est } CT(6) - CT(5) = 6\,896 \text{ euros}$$

$$\text{Ce coût est approché par } Cm(6) = CT'(6) = 18 * 6^2 - 300 * 6 + 8000 = 6\,848 \text{ euros}$$

#### Coût moyen

Soit  $CT(n)$  le coût total de production de  $n > 0$  objets, le coût moyen de production d'une unité est donné par :  $CM(n) = \frac{CT(n)}{n}$

**Exemple 2.** Dans l'exemple précédent on a  $CM(n) = \frac{6n^3 - 150n^2 + 8000n}{n} = 6n^2 - 150n + 8000$

$CM(6) = 6 * 6^2 - 150 * 6 + 8000 = 7\,316$  euros. Le coût moyen de production d'une unité est de 7316 euros lorsque la production est de 6 unités.

#### Optimum technique et économique

##### Optimum technique

En économie, l'optimum technique est défini comme la quantité à produire afin de minimiser le coût moyen de production. Lorsqu'il existe (ce qui est le cas dans la plupart des cas pratiques), il vérifie  $Cm(n) = CM(n)$ . Graphiquement, le coût moyen est minimum lorsque les courbes représentatives des coûts moyen et marginal se coupent.

**Exemple 3.** Dans l'exemple précédent on a  $Cm(n) = 18n^2 - 300n + 8000$  et  $CM(n) = 6n^2 - 150n + 8000$

La première méthode est de trouver le minimum du coût moyen :

$Cm(n)$  est un polynôme de degré deux et il atteint son minimum en  $n = \frac{150}{12} = 12,5$  (Cf cours de lycée, sommet d'une parabole en  $x = \frac{-b}{2a}$ ).

La deuxième méthode est de résoudre  $Cm(n) = CM(n)$

$$18n^2 - 300n + 8000 = 6n^2 - 150n + 8000$$

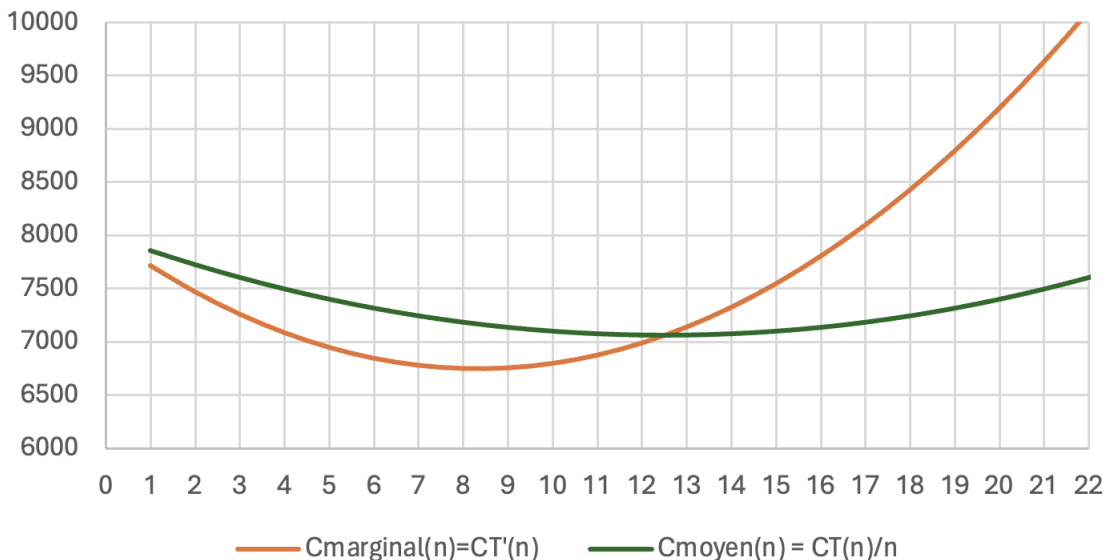
$$12n^2 - 150n = 0$$

$$n(12n - 150) = 0 \rightarrow 2 \text{ SOLUTIONS}$$

Solution 1 :  $n = 0$  on considère produire au minimum 1 unité donc on élimine cette solution

Solution 2 :  $12n - 150 = 0$  c'est-à-dire  $n = \frac{150}{12} = 12,5$

On retrouve bien le résultat trouvé par la première méthode.



Graphiquement les courbes se coupent en  $n = 12,5$ , ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé par le calcul.

### Optimum économique

L'optimum économique est défini comme le niveau d'activité qui maximise le résultat total. Lorsqu'il existe, il vérifie  $Cm(n) = CA'(n)$  avec  $CA(n)$  la fonction du chiffre d'affaires. Graphiquement, la recette est maximum lorsque les courbes représentatives de la recette marginale (du chiffre d'affaire marginal) et du coût marginal se coupent.

**Exemple 4.** Supposons que le prix de vente unitaire soit égal à 7 550 €.

Le chiffre d'affaires total est  $CA(n) = 7550n$

Le chiffre d'affaires marginal est égal à  $CA'(n) = 7550$

La première méthode est de trouver le maximum du résultat total :

$$R(n) = 7550n - (6n^3 - 150n^2 + 8000n) = -6n^3 + 150n^2 - 450n$$

Pour trouver le maximum d'un polynôme de degré 3 il faut passer par le calcul de la dérivée.

$$R'(n) = -18n^2 + 300n - 450$$

$\Delta = 57600$ , il existe deux solutions à  $R'(n)=0$  et ces solutions sont  $n_1 \approx 1,66$  et  $n_2 = 15$

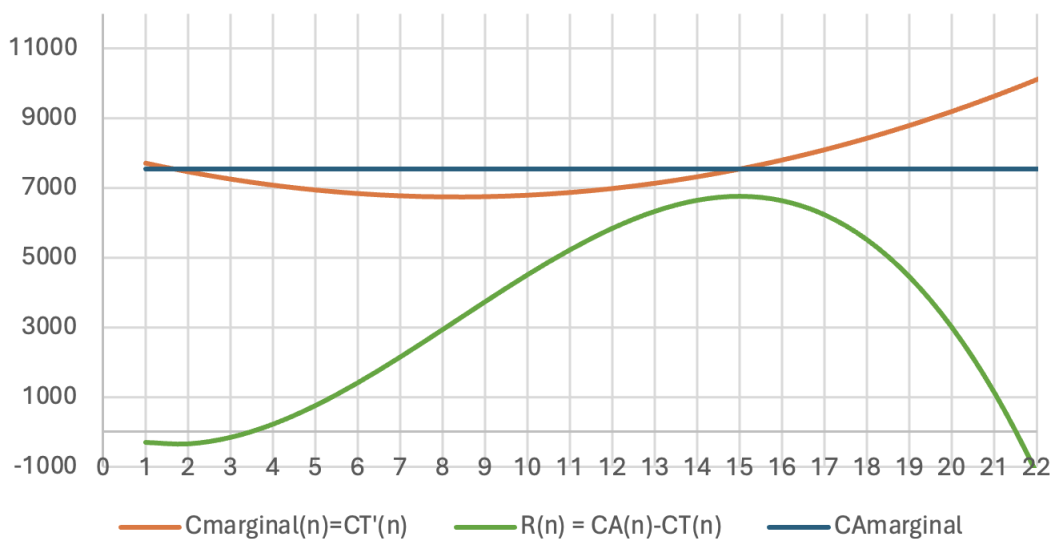
$n$	$-\infty$	$n_1 \approx 1.66$	$n_2 = 15$	$+\infty$		
$R'(n)$		-	0	+	0	-
$n$	$-\infty$	$n_1 \approx 1.66$	$n_2 = 15$	$+\infty$		
$R(n)$			-361	6750		

La deuxième méthode est de résoudre  $CM(n) = CA'(n)$

$$18n^2 - 300n + 8000 = 7550$$

$$18n^2 - 300n + 450 = 0$$

$\Delta = 57600$ , il existe deux solutions à  $R'(n)=0$  et ces solutions sont  $n_1 \approx 1,66$  et  $n_2 = 15$



Graphiquement, les courbes se coupent en  $n = 15$  ce qui correspond bien au point où la recette est maximum et aux résultats trouvés par le calcul.

**Exercice 4.** Soit  $CT(x) = 0,5x^3 - 5x^2 + 40x + 98$  le coût total de production d'une entreprise.

1. Calculer le coût moyen CM
2. Calculer sa dérivée  $CM'$
3. Montrer que la dérivée est égale à  $CM'(x) = \frac{(x-7)(x^2+2x+14)}{x^2}$
4. Faire le tableau de signe de  $CM'$  et en déduire le tableau de variations de CM
5. En déduire l'optimum technique

**Exercice 5.** Une entreprise fabrique un composant électronique sophistiqué pour l'industrie aéronautique. La capacité de production maximale est de 80 composants par semaine. Dans tout ce qui suit, les coûts considérés le seront donc par semaine. Le coût total de production, en euros, de  $x$  composants est donné par la fonction :  $CT(x) = 0,5x^3 - 49x^2 + 2000x$  (pour  $x$  dans  $[0;80]$ ). On suppose que le chiffre d'affaire pour  $x$  composants produits et vendus est donné par  $CA(x) = 2000x - 15x^2$ .

- 1 Déterminer l'optimum technique et économique.

### Elasticité

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x$  et telle que  $f(x) \neq 0$ . On appelle élasticité de  $f$  en  $x$  le nombre :

$$\varepsilon_{f(x)} = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

On utilise que si  $x$  augmente de  $\varepsilon\%$ , avec  $\varepsilon$  petit,  $f(x)$  augmente approximativement de  $(\varepsilon_{f(x)} * \varepsilon)\%$ .

**Exemple 5.** Supposons que la demande d'un produit sur le marché soit donnée par  $f(x) = 100 - 4x$  où  $x$  est le prix de vente. On a  $f'(x) = -4$ , pour tout  $x$  et donc  $\varepsilon_f(x) = \frac{-4x}{100-4x}$

Si le prix de vente initial est de  $x = 20$  euros et augmente de 0,5%, la demande (baissera) sera de  $\frac{-4*20}{100-4*20} * \frac{1}{2} = \frac{-4}{2} = -2\%$ .

**Exercice 6.** Supposons que, pour un certain produit, le nombre d'exemplaires vendus (dépend du prix  $p$ ) est la fonction  $f(p) = 20000\sqrt{100 - p}$

2 Calculer l'élasticité  $\varepsilon_f(x)$  en fonction de  $p$ .

3 Si le prix du produit est initialement fixé à 50 euros, quelle serait, en pourcentage, la diminution des ventes si le prix était augmenté de 2% ?

$$f'(p) = 20000 * \frac{-1}{2\sqrt{100-p}} = \frac{-10000}{\sqrt{100-p}}$$

$$\varepsilon_f(p) =$$

Pour un prix de 50 euros et une augmentation de 2% on a une demande qui va fluctuer de  $-0,5*50*2 \frac{1}{100} = -0,05\%$ .

La fonction  $f$  correspondant à la demande n'est pas toujours connue cependant un historique des prix et de la demande l'est plus souvent. Dans ce cas nous avons :

$$\varepsilon = \frac{\frac{D_1 - D_0}{D_0}}{\frac{P_1 - P_0}{P_0}} \text{ avec } D_0 : \text{ demande au prix } P_0$$

$P_0$  prix à la période 0

$D_1$  demande au prix  $P_1$

$P_1$  prix à la période 1

En général, le coefficient d'élasticité est négatif, car une augmentation des prix entraîne en principe une baisse de la demande (il existe des exceptions comme pour les produits de luxe).

**Exemple 6.** Un produit se vend à 600 unités au prix de 100 €. Plus tard dans, le prix de ce produit passe à 120 €, on ne vend que 500 unités.

$$\varepsilon = \frac{\frac{500-600}{600}}{\frac{120-100}{100}} = -0,83$$

Le coefficient d'élasticité de - 0,83 signifie qu'une augmentation du prix de 10 % entraîne une baisse de la demande de 8,3 %.