

Calculabilité avancée

Université de Montpellier

Petit test

17 février 2026

Durée 1h30 ou plus à voir

Aucun document n'est autorisé

Justifiez vos réponses avec grand soin!

Exercice 1 questions fondamentales

1. a) Rappelez la définition d'un ensemble A -calculable.
b) Rappelez la définition d'un ensemble A -énumérable.
2. Montrez que si $A \prec_m B$ alors $A <_T B$. Montrez que la réciproque est fausse.
3. Énoncez une version du théorème SNM relativisé. On ne demande pas la preuve mais un énoncé précis utilisant les notations $[a|b]^A$ et $\langle x, y \rangle$. L'énoncé pour S_1^1 est suffisant.

On note F un transformateur de programmes, f son code (entier), et A un oracle.

4. Énoncez une version du théorème du point fixe relativisé (mêmes notations que ci-dessus).
5. Peut-on obtenir le code d'un point fixe relativisé récursivement en fonction de f , ou récursivement en fonction de f avec oracle A ? Justifiez

Exercice 2 degrés

1. Quel est le plus petit degré Turing?
2. Quelle est la cardinalité de l'ensemble des degrés Turing? Faire une preuve.

Soit b le programme avec oracle qui prend x et n en entrée et rend 1 si x est dans l'oracle, diverge sinon. Soit A un oracle quelconque.

3. Montrez que $S_1^1 \langle b, x \rangle \in A'$ si et seulement si $x \in A$
4. Montrez que $A \leq_T A'$. Expliquez pourquoi cette inégalité est en fait stricte.

Supposons maintenant que A et B sont des ensembles tels que $A <_T B$. Pour traiter la suite, on pourra s'inspirer des questions qui précèdent.

5. Montrez que A' est B -énumérable.
6. Montrez que tout ensemble B -énumérable est B' -calculable et en déduire que $A' <_T B'$.

Exercice 3 lemme de Shoenfield

Ce lemme exprime qu'un ensemble A est calculable à la limite si et seulement si il est $0'$ -calculable.

1. Énoncez la définition de "calculable à la limite".
2. Montrez le sens "si il est $0'$ -calculable, alors ...".
3. Montrez le sens réciproque.
4. Soit A un ensemble calculable à la limite. Donnez une formule Σ_2^0 ou Π_2^0 pour définir A .
5. Montrez que si A est un ensemble calculable à la limite, alors $\overline{A}$ aussi. En déduire que A est dans Δ_2^0 .
6. Énoncez la relativisation du lemme de Shoenfield à un oracle quelconque R .
7. Si on dispose du programme permettant de R' -calculer A . Peut-on calculer le programme pour la R -calculabilité à la limite? Peut-on R -calculer ce programme? Justifiez
8. Même question pour la réciproque du lemme.