Outils mathématiques 1 — Test 3 — Novembre 2025

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 16 min.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{\cancel{4}\,6} = -64$. *(1 pt)*

$$(re^{i\theta})^6 = 64e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^6 = 64 \\ 6\theta = \pi \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{64} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \ \left[\frac{2\pi}{6}\right] \end{cases}$$

$z_1 = 2e^{i\pi/6}$

$z_2 = 2e^{i3\pi/6}$ $(= 2i)$

$z_3 = 2e^{i5\pi/6}$

$z_4 = 2e^{i7\pi/6} = 2e^{-i5\pi/6}$

$z_5 = 2e^{i9\pi/6} = 2e^{-i3\pi/6}$ $(= -2i)$

$z_6 = 2e^{i11\pi/6} = 2e^{-i\pi/6}$

2. Exprimer $z = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle, et déterminer la valeur exacte de $\cos(7\pi/12)$. *(1 pt)*

$$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{1-\sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}{2\,e^{-i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3. On considère le système d'équations ci-dessous :

$$(S)\begin{cases} 3x + my &= n \\ x - 3z &= 3 \\ y + mz &= 1 \end{cases}$$

(a) Donner M la matrice associée au système (S), et déterminer les conditions pour lesquelles le système admet une solution unique. *(1 pt)*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$\det(M) \neq 0 \iff (S)$ admet une solution unique

$$\det(M) = 3\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & m \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & m \end{vmatrix}$$

$$= 9 - m^2$$

$$\det(M) \neq 0 \iff \begin{cases} m \neq -3 \\ \text{et} \\ m \neq 3 \end{cases}$$

(b) Inverser la matrice M pour $m = 7$. *(1 pt)*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = -40$

$$\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} 3 & -49 & -21 \\ -7 & 21 & 9 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -64$. *(1 pt)*

$$(re^{i\theta})^4 = 64e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^4 = 64 \\ 4\theta = \pi \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \ [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$$

$$z_3 = 2\sqrt{2}\, e^{i5\pi/4} = 2\sqrt{2}\, e^{-i3\pi/4}$$

$$z_4 = 2\sqrt{2}\, e^{i7\pi/4} = 2e^{-i\pi/4}$$

2. Exprimer $z = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle, et déterminer la valeur exacte de $\cos(7\pi/12)$. *(1 pt)*

$$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{1-\sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{-i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3. On considère le système d'équations ci-dessous :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x + my & = & n \\ x - 3z & = & 3 \\ y + mz & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) Donner M la matrice associée au système (S), et déterminer les conditions pour lesquelles le système admet une solution unique. *(1 pt)*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$\det(M) \neq 0 \iff (S)$ admet une solution unique

$$\det(M) = 3\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & m \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & m \end{vmatrix}$$

$$= 9 - m^2$$

$$\det(M) \neq 0 \iff \left\{\begin{array}{l} m \neq -3 \\ \text{et} \\ m \neq 3 \end{array}\right.$$

(b) Inverser la matrice M pour $m = 7$. *(1 pt)*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = -40$$

$$\text{com}(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$${}^t\text{com}(M) = \begin{pmatrix} 3 & -49 & -21 \\ -7 & 21 & 9 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-40}\begin{pmatrix} 3 & -49 & -21 \\ -7 & 21 & 9 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

3. On considère le système d'équations ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} 3x + my &= n \\ x - 3z &= 3 \\ y + mz &= 1 \end{cases}$$

(a) Donner M la matrice associée au système (S), et déterminer les conditions pour lesquelles le système admet une solution unique. *(1 pt)*

(b) Inverser la matrice M pour $m = 7$. *(1 pt)*