Outils mathématiques 1 — Test 2 — Octobre 2025

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 16 min.

NOM :	**GROUPE :**	**NOTE :**	$/4$

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(3;\,1;\,3)$, $B(-1;\,2;\,4)$ et $C(1;\,1;\,2)$ formant le plan Π. On considère de plus la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t-4, \\ z = -t+4, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit de plus le point D de coordonnées $D(3;\,5;\,-4)$.

1. Déterminer une équation **cartésienne** du plan Π, ainsi que les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}^*$ unitaire et normal à Π. *(1 pt)*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi : -x-6y+2z+d=0$$

$$A \in \Pi \Rightarrow -3-6+6+d=0 \Rightarrow d = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi : -x-6y+2z+3=0}$$

0,75

$$\vec{n}^* = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ou encore } \vec{n}^* = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

0,25

2. Calculer le volume du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. *(0,5 pt)*

$$V = |m| \text{ avec } m = [\vec{AB}\,;\,\vec{AC}\,;\,\vec{AD}] = (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-3 \\ 5-1 \\ -4-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = -24-14 = -38$$

0,5

$$\Rightarrow \boxed{V = 38.}$$

3. En calculant les distances, déterminer si D est plus proche de Π ou de $\mathcal{D}$. *(1,5 pt)*

$$d_1 = d(D;\pi) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{AD}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{puisque } A\in\pi$$

$$= \frac{38}{\sqrt{41}} \simeq 5{,}93\,u_L \simeq d_1$$

0,25

$$d_2 = d(D;\mathcal{D}) = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{GD}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{avec } \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{GD} = \begin{pmatrix}3-1\\5+4\\-4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\9\\-8\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{GD} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\9\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\+14\\16\end{pmatrix}$$

1

$$\Rightarrow d_2 = \frac{\sqrt{453}}{\sqrt{6}} = 8{,}69\,u_L \simeq d_2$$

$\Rightarrow d_1 < d_2$ donc D est plus proche de π que de $\mathcal{D}$.

0,25

4. On considère le point F dont les coordonnées cylindriques sont $r = 3$, $\theta = 5\pi/6$ et $z = 2$. Déterminer, en donnant les angles en **degrés** arrondis à trois chiffres significatifs :

— les coordonnées cartésiennes de F, *(0,5 pt)*

$$x = r\cos\theta = 3\times\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 3\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = 2$$

$$\boxed{F\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,2\right)}$$

0,50

— puis les coordonnées sphériques de F. *(0,5 pt)*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{13} \qquad \left(= \sqrt{r_{cyl}^2+z^2}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 56{,}3°$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{6} = 150°$$

0,50

$$\Rightarrow \boxed{F\left(\sqrt{13}\,;\,56{,}3°\,;\,150°\right)}$$