Statistiques Mathématiques, Feuille 4

Estimation SBVM

33) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\ldots, X_n$ *iid* où les X_i ont pour fonction de répartition

$$G(x;\, \theta) = 1 - (1+x)^{-\theta} \text{ pour } x > 0 \text{ avec } \theta > 0.$$

a) Déterminer un estimateur SBVM de θ.
b) Même question pour $g(\theta) = 1/\theta$.

34) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\ldots, X_n$ *iid* où les X_i ont pour fonction de densité

$$f(x;\, \theta) = \frac{(k+1)x^k}{\theta^{k+1}} \quad \text{si } 0 < x < \theta \quad (\text{ on suppose } k \text{ connu}).$$

a) Déterminer une statistique exhaustive minimale complète pour θ (on l'appellera T).
b) Soit $Y = \alpha T + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer α et β de sorte que $\mathbb{E}(Y) = \theta$.
c) Cet estimateur est-il à VM ?

35) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\ldots, X_n$ *iid* où les X_i ont pour fonction de densité

$$f(x;\, \theta) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{2} & \text{si } x \in]-1,0[\\ \frac{1+\theta}{2} & \text{si } x \in [0,1[\end{cases} \quad \text{où } \theta \in]-1, 1[.$$

Montrer que la statistique $N = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left\{0 \le X_i < 1\right\}$ est exhaustive et complète. En déduire l'estimateur SBVM pour θ.

36) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique où $\mathbb{P}_\theta$ est la loi de Poisson $P(\theta)$ avec $\Theta = \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il n'existe pas d'estimateur SB pour $g(\theta) = 1/\theta$.

Tests UPP

37) Soit $X_1,\ldots, X_n$ des *v.a.iid* de loi $N(0, \theta)$. Déterminer le test UPP de niveau $\alpha\in\ ]0, 1\ [$ de $\mathcal{H}_0$: $\theta= \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0$.

38) Soit $X_1,\ldots, X_n$ des *v.a.iid* de loi $N(\theta, \sigma^2 = 49)$. Déterminer la valeur de n nécessaire pour que le test UPP de niveau $\alpha = 0.05$ de $\mathcal{H}_0$: $\theta = 10$ contre $\mathcal{H}_1$: $\theta = 5$ ait une puissance de 0.95. Si maintenant $n = 25$, pour quelle alternative $\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$ avec $\theta_1 < \theta_0$, le test UPP donne-t-il une puissance de 0.75 ?

39) Soit $X_1,\ldots, X_n$ des *v.a.iid* de loi $P(\theta)$. Déterminer le test UPP de niveau $\alpha\in\ ]0, 1\ [$ de $\mathcal{H}_0$: $\theta= \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0$. Application numérique : si $\alpha = 0.05$, $\theta_0 = 0.2$ et $\theta_1 = 0.6$ avec 12 $x_i = 0$, 6 $x_i = 1$, 1 $x_i = 2$ et un autre = 3, que peut-on conclure?

40) Soit $X_1,\ldots, X_n$ des *v.a.iid* de loi $E(\theta)$. Déterminer le test UPP de niveau $\alpha\in\ ]0, 1\ [$ de $\mathcal{H}_0$: $\theta = \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$ avec $\theta_1 < \theta_0$. Déterminer la puissance du test en utilisant le fait que dans ce cas, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta)$ et que la loi $\chi^2_{2n} = \Gamma(n, 1/2)$.

41) La durée de vie de composantes électroniques est de loi $E(\theta)$. On veut tester les hypothèses $\mathcal{H}_0$: la durée de vie de ces composantes est de 1000h contre $\mathcal{H}_1$: elle est de 4000h. Pour ce faire, on observe le fonctionnement de 10 de ces composantes mais pour écourter l'expérience, on décide d'arrêter l'observation après 2000h. On observe donc les *v.a.* Y_i où $Y_i = 0$ si la i–ème composante fonctionne encore après 2000h et 1 sinon. Si on utilise uniquement les valeurs Y_i montrer que le test UPP de niveau $\alpha = 0.05$ est donné par

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma y_i < 7 \\ 0 & \text{si } \Sigma y_i > 7 \\ 0.1325 & \text{si } \Sigma y_i = 7 \end{cases}$$

42) Soit $X_1,\ldots, X_n$ des *v.a.iid* de loi $U(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$. Montrer que le test UPP de niveau α de $\mathcal{H}_0$: $\theta = 0$ contre $\mathcal{H}_1$: $\theta = 1/2$ est donné par

$$\phi = \begin{cases} 2\alpha & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{si } \alpha \le 1/2$$

$$= \begin{cases} 2\alpha - 1 & \text{si } x \in [-1/2,0] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{si } \alpha > 1/2$$