Statistiques Mathématiques, Feuille 3

Statistique Exhaustive minimale

19) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ *iid*. Supposer que la densité de chacun des X_i est donnée par

$$f(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)}{\sigma}\right\} \qquad \text{si } m < x$$

où $0 < \sigma$ et $m \in \mathbb{R}$. Déterminer une statistique exhaustive pour (m, σ).

20) Même question si les X_i proviennent d'une loi $\Gamma(\alpha, \beta)$.

21) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta,, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ *iid*. Supposer que la densité de chacun des X_i est donnée par

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\log \alpha} \frac{1}{x} \mathbb{I}\left\{\theta < x < \alpha\theta\right\}$$

où $\alpha > 1$ est connu et $\theta > 0$ est le paramètre inconnu. Déterminer une statistique exhaustive minimale pour θ.

22) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ *iid* de loi $U[0, \theta]$. On a vu en cours que la statistique $X_{(n)}$ est exhaustive. Montrer qu'elle est de plus minimale complète.

23) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ *iid* de loi $U[\theta, \theta + 1]$. Montrer que la statistique $(X_{(1)}, X_{(n)})$ est exhaustive minimale, mais n'est pas complète.

24) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ *iid* de loi $U[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$. On a vu au cours que la statistique $(X_{(1)}, X_{(n)})$ est exhaustive minimale. Montrer cependant qu'elle n'est pas complète.

Borne de Cramer-Rao et estimateur Efficace

25) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\dots,X_n$ *iid* de loi de Poisson $P(\theta)$ avec $\Theta = \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

est SB pour θ. En cours, on a trouvé la BCR et montré que $\overline{X}$ est efficace et SBVM. Montrer que S^2 n'est pas SBVM

26) Dans le contexte de l'exercice 20) où β est connu, déterminer la borne de Cramer-Rao pour α. Idem pour β quand α connu.

Estimation SBVM

27) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\dots,X_n$ *iid* de loi Ber(θ) avec $\Theta =]0, 1[$. Déterminer un estimateur SBVM pour $g(\theta) = \theta(1-\theta)$.

28) Dans le même contexte, montrer qu'il n'existe pas d'estimateur SB de $1/\theta$. (idée : considérer ce que deviennent $\mathbb{E}_\theta(\varphi)$ et $g(\theta)$ quand $\theta \to 0$).

29) Pour généraliser l'exercice 27), supposer que $X_1,\dots,X_n$ *iid* de loi $B[k, \theta]$. Déterminer un estimateur SBVM de $g(\theta) = \mathbb{P}_\theta[X = 1] = k\theta(1-\theta)^{k-1}$.

30) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\dots,X_n$ *iid* de loi $U[0, \theta]$. Déterminer l'estimateur SBVM pour θ.

31) Dans le même contexte que celui de l'exercice 30), considérer (le très mauvais mais SB) l'estimateur de θ donné par $\phi = 2X_1$. Calculer $\mathbb{E}_\theta[\phi \mid \psi]$ où ψ est la statistique exhaustive minimale complète. Retrouver le résultat de l'exercice 30).

32) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\dots,X_n$ *iid* de loi $N(\theta, 1)$. Déterminer l'estimateur SBVM de θ^2.