Statistiques Mathématiques Feuille 8

Comportement asymptotique des EMM et EVM

67) (suite de l'exercice 58) Soient $X_1, ..., X_n$, des *v.a.i.i.d.* de densité $f(x, a) = ak^a / x^{a+1}$ pour $x \geq k$, avec $k > 0$ et $a > 0$ comme dans l'exercice 58. Si k est supposé connu, trouver le comportement asymptotique de l'estimateur EMM $\tilde{a}_n$ de a et déterminer un IC de niveau asymptotique $1 - \alpha$. Trouver la borne de Cramér-Rao pour a. Comparer la variance asymptotique de $\tilde{a}_n$ à cette borne.

68) (suite de l'exercice 60) Soit $X_1,..., X_n$, des *v.a.i.i.d.* dont la densité est donnée par

$$f(x;\, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \text{ si } x > 0, \text{ où } \theta > 0.$$

a) Donner un IC de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour θ basé sur l'EVM $\hat{\theta}_n$

b) Un échantillon de taille $n = 20$ a donné $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 40$. Calculer l'IC de niveau asymptotique 0.95.

69) (suite de l'exercice 62) Soit $X_1,..., X_n$, des *v.a.i.i.d.* dont la densité est donnée par

$$f(x;\, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\lambda} x^{\lambda - 1} \exp\{-\lambda x / \alpha\} \text{ si } x > 0 \text{ et où } \lambda,\, \alpha > 0.$$

Trouver le comportement asymptotique conjoint des EVM de λ et α.. En déduire la loi asymptotique de

$$\tfrac{n\lambda}{\alpha^2} (\hat{\alpha}_n - \alpha)^2 + \tfrac{n}{2\lambda} (\hat{\lambda}_n - \lambda)^2 .$$

70) (suite de l'exercice 64) Soit $X_1,..., X_n$, des *v.a.i.i.d.* dont la densité est donnée par

$$f(x;\, \lambda,\, \theta) = \begin{cases} (1 - \theta) / 2 & \text{si } x \in]-1,\, 0] \\ (1 + \theta) / 2 & \text{si } x \in]0,\, 1] \end{cases} .$$

Déterminer le comportement asymptotique de l'EVM $\hat{\theta}_n$ de θ et en déduire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $(1 - \alpha)$.

La trilogie de tests

71) Soit $X_1,..., X_n$, des *v.a.i.i.d.* $\sim B(m,\, \theta_v)$, donner les statistiques des tests de Wald, RVM et de Rao pour $H_0 :\, \theta_v = \theta_0$ contre $H_1 :\, \theta_v \neq \theta_0$.

72) (Application de l'exercice 71) L'étude de 320 familles ayant exactement 5 enfants a donné les résultats de la table suivante :

Nombre de filles	0	1	2	3	4	5
Nombre de familles	18	56	110	88	40	8

Au niveau $\alpha = 0.05$, peut-on dire que ces nombres sont compatibles avec l'hypothèse voulant que la naissance d'un garçon et celle d'une fille soient des événements équiprobables?

73) (suite des exercices 58 et 67) Soient $X_1,....,X_n$, des *v.a.i.i.d.* de densité $f(x, a) = ak^a / x^{a+1}$ pour $x \geq k$, une constante connue et positive et où $a > 0$ est inconnu. Déterminer les tests de Wald, de Rao et RVM de l'hypothèse nulle H_0: $a = 1$ (contre H_1: $a \neq 1$.)

74) Soit $X_1,...,X_n$, des *v.a.i.i.d.* de densité $E(\theta)$. Déterminer le test RVM pour $H_0: \theta = \theta_0$ contre $H_1\ \theta \neq \theta_0$.

75) Soit $X_1,...,X_n$, des vecteurs aléatoires *i.i.d.* de loi $N_2(\mu, \Sigma)$ où Σ est définie positive.

a) Si Σ est connue, déterminer le test RVM pour $H_0: \mu = \mu_0$ contre $H_1: \mu \neq \mu_0$.

b) Si μ est connue, déterminer le test RVM pour $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ contre $H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$.