Statistiques Mathématiques, Feuille 5

Tests UPP

43) Soit X_1, X_2, X_3 et X_4 des *v.a.iid* de loi $U(\theta_1, \theta_2)$. Montrer que le test le UPP de niveau α = 0.25 de $\mathcal{H}_0 : (\theta_1 = 0, \theta_2 = 1)$ contre $\mathcal{H}_1 : (\theta_1 = -1/2, \theta_2 = 1/2)$ est donné par

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{(4)} < 1/2 \\ 1/5 & \text{si } x_{(4)} \geq 1/2 \end{cases}$$

Montrer que la puissance de ce test est 1.

44) (Difficile) Soit X_1 une *v.a.* de loi $C(\theta, 1)$. On veut tester $\mathcal{H}_0 : \theta = -1$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta = 1$. Montrer que, selon la valeur de α, la région d'acceptation du test UPP est de la forme $[a, b]$, $[0, \infty)$ ou $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$.

45) Dans le contexte des exercices 37), 39) et 40), déterminer le test UPP (s'il existe) de niveau $\alpha \in\ ]0, 1[$ de $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$.

46) Dans le contexte de l'exercice 43), Montrer que ϕ est UPP pour $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta_1 = -\theta_2$ avec $\theta_2 \in]0, 1/2]$. Ici, le mieux est de calculer directement la puissance du test pour chaque point de $\mathcal{H}_1$.

47) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des *v.a.iid* de densité $f(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1}$ si $0 < x < 1$. Déterminer le test UPP de $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta > 1$.

48) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des *v.a.iid* $\sim N(\theta, \sigma^2)$ où σ^2 est connue. Déterminer le test UPP de seuil α pour $\mathcal{H}_0 : \theta \geq 1$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta < 1$. Calculer la fonction de puissance de ce test si $n = 16$ et $\sigma =$ 2.

49) Soit X une *v.a.* de densité donnée par

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (2\theta - 1)x + (1 - \theta) & \text{si } x \in [0,1] \\ (1 - 2\theta)x + (3\theta - 1) & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (\text{pour } \theta \in [0, 1]).$$

a) Déterminer le test UPP de niveau $\alpha \in\ ]0, 1[$ de $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta = 1/2$.
b) Trouver le test UPP de $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \in\ ]0, 1[$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$.

50) Soit $X_1, \dots, X_n$ des *v.a.iid* de fonction de répartition donnée par $F_\theta(x) = 1 - (1 + x)^{-\theta}$ pour $\theta > 0$ et $x > 0$.

a) Déterminer le test UPP de $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$. Montrer que $\log(1 + X_i) \sim E(\theta)$. En déduire la fonction de puissance du test UPP.

b) Dans le cas où $n = 1$, déterminer le test UPP de $\mathcal{H}_0 : X \sim E(\theta)$ contre $\mathcal{H}_1 : X \sim F_{\theta-1}(x)$, où θ est fixé.