
Contrôle continu - 9 avril 2025

Durée : 1h30 (2h pour les tiers-temps)

Calculatrice, téléphone et documents interdits. Les réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

- (2 points) Énoncer le théorème de Rolle et en donner une illustration graphique.
- (2 points) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a))(x - a).$$

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction g , en déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Exercice 2 : Changement de base (9 points)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x, y, z)) = (-2x, 3x + y + 3z, 3x + 3y + z).$$

- (1 point) Donner la matrice A de f dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3$.
- (1 point) On considère la famille $B' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (2 points) Calculer les images par f des vecteurs u_1 , u_2 et u_3 et les exprimer en fonction de u_1 , u_2 et u_3 . En déduire la matrice A' de f dans la base B' . Il n'est pas nécessaire à ce stade de calculer la matrice de passage.
- (2 points) Écrire la matrice de passage P de la base B à la base B' .
- (1 point) Calculer P^{-1} .
- (2 points) Pour n un entier non nul, calculer A^n en fonction de n .

Exercice 3 : Endomorphisme (7 points)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que f^n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ obtenu en composant n fois f avec lui-même : $f \circ f \circ \dots \circ f$. Supposons qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f(v) \neq 0, \quad f^2(v) \neq 0, \quad f^3(v) = 0.$$

- (1 point) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Notons $w = \lambda_1 v + \lambda_2 f(v) + \lambda_3 f^2(v)$. Exprimer $f(w)$ et $f^2(w)$ en fonction de $f(v)$ et $f^2(v)$.
- (2 points) En déduire que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (2 points) Donner la matrice de f dans cette base.
- (2 points) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$.