
Contrôle continu -19 février 2025

Durée : 1h30 (2h pour les tiers-temps)

Calculatrice, téléphone et documents interdits. Les réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Question de cours (5 points)

1. (3 points) Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Démontrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré au plus 2. Soit f l'application définie sur $\mathcal{P}_2$ par $f(p) = p'$, où p' désigne la dérivée de p .
 - (a) (1 point) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_2)$.
 - (b) (1 point) Donner une famille génératrice de l'image de f .

Exercice 2 : (9 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (3, 0, 5), v_1 = (2, -5, 0) \text{ et } v_2 = (0, 3, 2).$$

Soient $F = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2y - 3z = 0\}$.

1. (1 point) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. (1 point) Vérifier que u_1, u_2 et u_3 appartiennent à G . En déduire que $F \subset G$.
3. (2 points) Montrer que v_1 et v_2 forment une base de G .
4. (3 points) Montrer que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont linéairement dépendants, puis que u_1 et u_2 engendrent F .
5. (2 points) Déterminer la dimension de F . En déduire que $F = G$.

Exercice 3 : (7 points)

On pose E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions dérivables et de dérivées continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient F et G deux sous-ensembles de E définis par $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$. On admet que G est un sous-espace vectoriel de E .

1. (2 points) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. (1 point) Déterminer une base de G .
3. (2 points) Déterminer $F \cap G$.
4. (2 points) Montrer que $E = F \oplus G$.