Le problème « d'Archimède » dont l'énoncé figure en **annexe 1** est proposé à une classe. La réponse d'un élève se trouve en **annexe 2**.

1. Quelles sont les connaissances nécessaires à la résolution de ce problème ?

2. A quel niveau de classe peut-on proposer ce problème ?

3. Analyser la production de l'élève au regard des compétences « Raisonner » et « Calculer » .

4. Exposer une correction de ce problème telle qu'elle pourrait être présentée devant une classe.

5. Proposer un exercice de niveau collège sur le thème des probabilités permettant de mobiliser la compétence « Chercher». Motiver le choix de cet exercice.

Annexe 1 : Problème des arches paraboliques

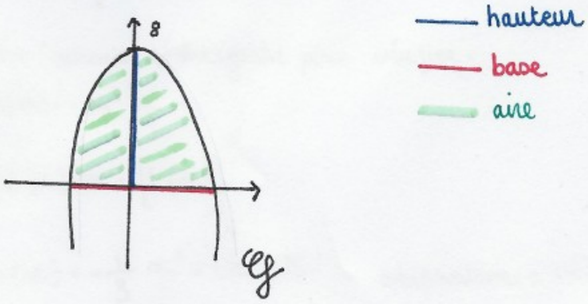
Archimède affirmait que l'aire de la surface sous une arche parabolique est égale aux deux tiers de la base multipliée par la hauteur de l'arche.

Qu'en pensez-vous ?

Annexe 2 :

- Afin de representer le problème d'Archimède, nous prenons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est semblable à une arche parabolique.

$f(x) = -x^2 + 8$



- On calcule Δ afin de trouver ces racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= -4 \times (-1) \times 8$

$= 32$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{32}}{-2} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{32}}{-2} = -2\sqrt{2}$

- La base est donc $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- Selon archimède : aire $= \dfrac{2}{3}$ base $\times$ hauteur

donc $\dfrac{2}{3}$ base $\times$ hauteur $= \dfrac{2}{3} 4\sqrt{2} \times 8 = \dfrac{64\sqrt{2}}{3}$

- On calcul l'intégrale pour vérifier l'affirmation d'Archimède

$f(x) = -x^2 + 8$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$

$F(x) = -\dfrac{1}{3} x^3 + 8x + k$ vérification : $F'(x) = -\dfrac{3}{3} x^2 + 8 = -x^2 + 8 = f(x)$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = F(2\sqrt{2}) - F(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2})^3 + 8(2\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{3}(-2\sqrt{2})^3 + 8(-2\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}$$

Conclusion: nous rettombons bien sur le même résultat, donc Archimede avait raison : l'aire de la surface d'une arche parabolique est égale au deux tiers de la base fois la hauteur.