DEHA8201M Ex. 3 16.03.2025

1- Par le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f$$
$$= 4 - \operatorname{rg}(f) = 2.$$

2- F est tel que $F \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^4$

et donc $\dim F + \dim \operatorname{Ker} f = 4$

soit $\dim F = 2$.

3- a- Comme la famille contient 2 vecteurs, qui est la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$, elle est une base de F si elle

(i) contient des éléments de $\operatorname{Ker} f$

(ii) est libre

(i) Puisque $f \circ f = 0$ on a, pour $i = 1, 2$

$$f(f(u_i)) = f \circ f(u_i) = 0 \quad \text{Donc } f(u_i) \in \operatorname{Ker} f$$

(ii) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si $\lambda_1 f(u_1) + \lambda f(u_2) = 0$

on $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = 0$ Donc

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \operatorname{Ker} f$

Or comme $(u_1, u_2) \in F$ on a $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in F$

Donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in F \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

Finalement $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$.

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$.

Comme (u_1, u_2) est libre, ceci implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

b. $\mathcal{B}$ est obtenu en concatenant une base de F (u_1, u_2) et de $\operatorname{Ker} f$ $(f(u_1), f(u_2))$.
Comme F et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplementaires on a bien une base de $\mathbb{R}^4$.

c. On a :

$$f(u_1) = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 1 \times f(u_1) + 0 \times f(u_2)$$
$$f(u_2) = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 0 \times f(u_1) + 1 \times f(u_2)$$
$$f(f(u_i)) = 0 = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 0 \times f(u_1) + 0 \times f(u_2)$$

pour $i = 1, 2$.

En reportant ces coefficients on trouve

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$