DE HA 8201 14.03.2025

Ex. 2

1. On a $p : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

De plus, pour $(M^{(a)}, M^{(b)}) \in M_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

on a

$$p(M^{(a)} + \lambda M^{(b)}) = \frac{1}{2}\left(M^{(a)} + \lambda M^{(b)} + (M^{(a)} + \lambda M^{(b)})^t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(M^{(a)} + \lambda M^{(b)} + M^{(a)t} + \lambda M^{(b)t}\right)$$

linéarité de la transposée

$$= \frac{1}{2}\left(M^{(a)} + M^{(a)t}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(M^{(b)} + M^{(b)t}\right)$$

$$= p(M^{(a)}) + \lambda p(M^{(b)})$$

Donc p est linéaire.

2. Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) les éléments de la base $\mathcal{B}_0$

On a $p(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 + 0 \times e_4$

$p(e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times e_1 + \frac{1}{2} \times e_2 + \frac{1}{2} \times e_3 + 0 \times e_4$

$p(e_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = p(e_2)$

$p(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4 = 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 + 1 \times e_4$

On a donc en reportant les coefficients calculés ci-dessus :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ker p ?

$A \in \operatorname{Ker} p$ si et seulement si $\dfrac{A + A^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En ecrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on trouve

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit $a = d = 0$

$\frac{b+c}{2} = 0$ ou $b=-c$

On trouve donc

$$\operatorname{Ker} p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Une base de Ker p est donc $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) =: B_K$

Im p ?

On a,

$$\operatorname{Im} p = \{ p(A), \ A \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i p(e_i), \ (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \langle p(e_1), p(e_2), p(e_3), p(e_4) \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

on remarque que l'on obtient une famille libre en enlevant la matrice redondante car les termes diagonaux et extra-diagonaux sont alternati-vement nuls et non nuls.

On a donc comme base de $\mathrm{Im}\, p$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =: \mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$$

4. On remarque que, pour $\tilde{e}$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$ de l'image, on a $p(\tilde{e}) = \tilde{e}$.
Notons $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ les éléments de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$ et $\tilde{e}_4$ la matrice qui forme la base de $\mathrm{Ker}\, p$. Comme la famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ contient 4 matrices, ce sera une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si elle est libre

Supposons donc $\lambda_1 \tilde{e}_1 + \lambda_2 \tilde{e}_2 + \lambda_3 \tilde{e}_3 + \lambda_4 \tilde{e}_4 = 0$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{K}^4$.

On a donc

$$\lambda_1 p(\tilde{e}_1) + \lambda_2 p(\tilde{e}_2) + \lambda_3 p(\tilde{e}_3) + \lambda_4 p(\tilde{e}_4) = 0$$

soit $\lambda_1 \tilde{e}_1 + \lambda_2 \tilde{e}_2 + \lambda_3 \tilde{e}_3 = 0$

Comme $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est libre on a donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ceci implique $\lambda_4 \tilde{e}_4 = 0$ et donc $\lambda_4 = 0$.

Finalement $\mathcal{B} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Elle satisfait

$$p(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_1 = \tilde{e}_1 + 0 \times \tilde{e}_2 + 0 \times \tilde{e}_3 + 0 \times \tilde{e}_4$$

$$p(\tilde{e}_2) = \tilde{e}_2 = 0 \times \tilde{e}_1 + 1 \times \tilde{e}_2 + 0 \times \tilde{e}_3 + 0 \times \tilde{e}_4$$

$p(\tilde{e}_2) = \tilde{e}_2 = 0 \times \tilde{e}_1 + 1 \times \tilde{e}_2 + 0 \times \tilde{e}_3 + 0 \times \tilde{e}_4$

$p(\tilde{e}_3) = \tilde{e}_3 = 0 \times \tilde{e}_1 + 0 \times \tilde{e}_2 + 1 \times \tilde{e}_3 + 0 \times \tilde{e}_4$

$p(\tilde{e}_4) = 0 = 0 \times \tilde{e}_1 + 0 \times \tilde{e}_2 + 0 \times \tilde{e}_3 + 0 \times \tilde{e}_4$

En reportant ces coefficients on trouve que la matrice de p dans B est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ comme demandé.

5. Grâce à la formule de changement de base on a donc le resultat voulu avec P la matrice de changement de base de la base B_0 à B

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$