



Session : contrôle continu

Date : 11/03/2025

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Parcours : MG, CUPGE

UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)

Durée de l'épreuve : 1h15

Documents autorisés : néant

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (5 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

On considère le schéma des trapèzes explicites.

$$y_{n+1} = y_n + h \left\{ \frac{f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))}{2} \right\}$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et lipschitzienne par rapport à la variable y de rapport L .

1. Donner la définition de l'erreur de consistance du schéma.
2. Montrer que l'erreur de consistance du schéma est $\mathcal{O}(h^3)$.
3. On fixe $T > 0$. On désigne par $y(t)$ la solution exacte de l'équation différentielle (1). Est-ce que le schéma est convergent ? Préciser l'ordre de grandeur de $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$ en fonction de h . Justifiez soigneusement vos réponses à l'aide de la théorie des schémas à un pas.

Exercice 2 (5 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ où la fonction f est Lipschitzienne par rapport à la variable y . On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On note $f_k = f(t_k, y_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le schéma de Adams-Moulton est donné par

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right).$$

C'est un schéma multipas qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n et y_{n-1} .

1. Précisez si le schéma est *explicite* ou *implicite*.
2. Montrer que le schéma est stable.
3. Montrer que le schéma est consistant.
4. Montrer que l'erreur de consistance est $\mathcal{O}(h^4)$.
5. Est-ce que le schéma est convergent ? Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez vos réponses.