Exercice 1 Soit l'EDP de la chaleur : $\partial_t u(x,t) - \mu\,\partial^2_{xx} u(x,t) = 0$, $\mu > 0$.

On considère le schéma explicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \mu\,\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{\delta x^2}$$

(1) $$u_j^{n+1} = u_j^n + \mu\,\delta t\,\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{\delta x^2} = \frac{\mu\delta t}{\delta x^2} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2\mu\delta t}{\delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\mu\delta t}{\delta x^2} u_{j+1}^n$$

$$= \lambda u_{j-1}^n + (1-2\lambda) u_j^n + \lambda u_{j+1}^n.$$

(2) Pour l'erreur de consistance, on utilise le fait que : (Diff. finies)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\delta t}\big(u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)\big) = \partial_t u(x_j,t_n) + O(\delta t) \\ \dfrac{1}{\delta x^2}\big(u(x_j-\delta x,t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_j+\delta x,t_n)\big) = \partial^2_{xx} u(x_j,t_n) + O(\delta x^2) \end{cases}$$

Donc on a :

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = u(x_j, t_n+\delta t) - u(x_j,t_n) - \frac{\mu\delta t}{\delta x^2}\big(u(x_j-\delta x,t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_j+\delta x, t_n)\big)$$

$$= \delta t\,\partial_t u(x_j,t_n) + O(\delta t^2) - \mu\,\delta t\,\partial^2_{xx} u(x_j,t_n) + O(\delta t\cdot\delta x^2)$$

Or $\delta t\,\partial_t u(x_j,t_n) = \mu\,\delta t\,\partial^2_{xx} u(x_j,t_n)$ donc il reste :

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = O(\delta t^2) + O(\delta t\cdot\delta x^2) = O(\delta t(\delta t + \delta x^2))$$

(3) Faisons de même pour le schéma de Crank-Nicolson, en utilisant cette fois-ci une différence finie centrée en $(x_j, t_n + \frac{\delta t}{2})$, plus précise :

$$\begin{cases} \delta t^{-1}\big[u(x_j,t_n+\delta t) - u(x_j,t_n)\big] = \partial_t u\left(x_j, t_n + \frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2) \\ \delta x^{-2}\big[u(x_j-\delta x,t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_j+\delta x,t_n)\big] = \partial^2_{xx} u(x_j,t_n) + O(\delta x^2) \\ \delta x^{-2}\big[u(x_j-\delta x,t_n-\delta t) - 2u(x_j,t_n+\delta t) + u(x_j+\delta x,t_n+\delta t)\big] = \partial^2_{xx} u(x_j,t_n+\delta t) + O(\delta x^2) \end{cases}$$

Or pour φ fonction $\mathcal{C}^2$, on a toujours, en développant $\varphi(t)$ et $\varphi(t+\delta t)$:

$$\frac{1}{2}\Big(\varphi(t)+\varphi(t+\delta t)\Big) = \varphi\left(t+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2)$$

Faisons la moyenne des deux dernière quantités dans le système ci-dessus :

$$\frac{1}{2}\Big\{\delta x^{-2}\big[u(x_j-\delta x,t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_j+\delta x,t_n)\big]$$
$$+ \delta x^{-2}\big[u(x_j-\delta x,t_n-\delta t) - 2u(x_j,t_n+\delta t) + u(x_j+\delta x,t_n+\delta t)\big]\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{\partial^2_{xx}u(x_j,t_n) + \partial^2_{xx}u(x_j,t_n+\delta t)\Big\} + O(\delta x^2)$$
$$= \partial^2_{xx}u\left(x_j,t_n+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2) + O(\delta x^2).$$

Ainsi l'erreur de consistance est :

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = u(x_j,t_n+\delta t) - u(x_j,t_n)$$
$$-\mu\frac{\delta t}{2}\Big\{\delta x^{-2}\big[u(x_j-\delta x,t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_j+\delta x,t_n)\big]$$
$$+ \delta x^{-2}\big[u(x_j-\delta x,t_n-\delta t) - 2u(x_j,t_n+\delta t) + u(x_j+\delta x,t_n+\delta t)\big]\Big\}$$
$$= \delta t\,\partial_t u\left(x_j,t_n+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^3) - \delta t\,\mu\,\partial_{xx}u\left(x_j,t_n+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^3) + O(\delta t\,\delta x^2)$$

Comme $\partial_t u = \mu\,\partial^2_{xx}u$, on a finalement :

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = O(\delta t^3) + O(\delta t\,\delta x^2) = O\big(\delta t(\delta t^2+\delta x^2)\big)$$

(4) Calculons le facteur d'amplification en prenant $u_j^0 = \exp(ikx_j)$.

Cherchons u_j^1 sous la forme $G(k)u_j^0$. On porte l'expression dans le schéma :

$$-r\,G(k)\exp(ik(j-1)\delta x) + (1+2r)\,G(k)\exp(ikj\delta x)$$
$$-r\,G(k)\exp(ik(j+1)\delta x) = r\exp(ik(j-1)\delta x) + (1-2r)\exp(ikj\delta x)$$
$$+ r\exp(ik(j-1)\delta x)$$

Simplifions par $\exp(ikj\delta x)$ et factorisons $G(k)$:

$$G(k)\Big\{-re^{-ik\delta x} + (1-2r) - re^{ik\delta x}\Big\} = re^{ik\delta x} + (1-2r) + re^{ik\delta x}.$$

On pose $\theta = k\delta x$: $G(k) = \dfrac{1-2r+2r\cos\theta}{1+2r-2r\cos\theta} = \dfrac{1-4r\sin^2(\theta/2)}{1+4r\sin^2(\theta/2)}$

Donc $G(k) \in \mathbb{R}$, et $G(k) \in [-1,1]$, donc le schéma est inconditionnellement stable.

Exercice 2

Soit $\mu > 0$, On considère l'EDP et la cond. initiale pour $x \in \Omega =]0,2\pi[$:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \mu \partial^2_{xx} u(x,t) = 0 & \text{(EDP)} \\ u(x,0) = f(x) & \text{(CI)} \\ u(2\pi,t) = u(0,t) & \text{(CB)} \end{cases}$$

Supposons que $f \in L^2(0,2\pi)$ et que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ où

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

(1) Cherchons $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$, en développant en série de Fourier la fonction périodique $x \longmapsto u(x,t)$ à chaque instant t :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \\ \partial_x u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)\, in\, e^{inx} \quad \text{(sous réserve de convergence)} \\ \partial^2_{xx} u(x,t) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) n^2 e^{inx} \end{cases}$$

Or puisque $\partial_t u = \mu \partial^2_{xx} u$ on doit avoir :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu n^2 c_n(t) e^{inx}$$

or $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,2\pi)$:

- $\forall n \neq m$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ et $\|e_n\| = 1$ (suite orthonormale)
- Suite totale : $\mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{Z})$ dense dans $L^2(0,2\pi)$

donc on peut identifier terme à terme : $\dot{c}_n(t) = -\mu n^2 c_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Donc $c_n(t) = e^{-\mu n^2 t} c_n(0)$. Grâce à la donnée initiale :

$$u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(0) e^{inx} = f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx},$$

donc en identifiant les coefficients de Fourier : $c_n(0) = \hat{f}(n)$.

Donc $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$

(2) Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-\mu n^2 t} \longrightarrow 0 \quad \forall n \neq 0$ donc si on admet qu'on peut passer à la limite dans la série :

$$u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

La température converge vers une température moyenne égale à la moyenne de la température initiale (diffusion thermique). On peut justifier rigoureusement le passage à la limite comme suit, en commençant par montrer que $|\hat{f}(n)|$ est bornée : $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$, ainsi

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(n)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^2} = M < +\infty \text{ car } f \in L^2(0,2\pi) \text{ par hypothèse.}
\end{aligned}$$

Ensuite on majore :

$$u(x,t) - \hat{f}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |u(x,t) - \hat{f}(0)| &\leq \sum_{|n|\geq 1} M e^{-\mu n^2 t} \\
&\leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu n^2 t} \\
&\leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu n t} \\
&\leq \frac{2M e^{-\mu t}}{1 - e^{\mu t}}
\end{aligned}$$

Pour t suffisamment grand $\left(t > \frac{\ln 2}{\mu} \right)$: $\frac{1}{1-e^{-\mu t}} \leq 2$, donc :

$|u(x,t) - \hat{f}(0)| \leq 4M e^{-\mu t}$ donc $u(x,t) \xrightarrow[t\infty]{} \hat{f}(0)$ (CV uniforme par % à x).

(3) Montrons que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t}$ converge normalement sur $(x,t) \in [0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$, $\forall \tau > 0$. On peut majorer uniformément le terme général de la série :

$$|\hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}| \leq |\hat{f}(n)| e^{-\mu n^2 \tau} \leq M e^{-\mu |n| \tau}$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\mu|n|\tau}$ est géométrique convergente. On a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx} \|_\infty < \infty$$

la série converge donc normalement sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$, et comme $\tau > 0$ arbitraire, elle converge $\forall t > 0$, $\forall x \in [0, 2\pi]$.

Rq : on n'a pas de CV normale sur $[0,2\pi] \times [0,+\infty[$! Pour $t=0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ converge dans $L^2(0,2\pi)$ seulement vers $u(x,0) = f(x)$.

En tout cas, pour $t>0$, la cv est tellement bonne que la série obtenue $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx} = u(x,t)$ donne une fonction $\mathcal{C}^\infty$! Cela se montre en étudiant la convergence normale des séries dérivées sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$, avec $\tau > 0$ fixé. Prenons $u \in \mathcal{C}^1$, et prouvons que $\partial_x u \in \mathcal{C}^0$ (m̂ chose pour $\partial_t u$).

On considère donc la série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} in \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$ et on montre qu'elle CV normalement sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$. Le terme général est borné par :

$$|n| M e^{-\mu n^2 \tau} \leq \frac{C}{n^2} \quad \text{par croissance comparée,}$$

donc la série CV normalement donc on peut bien dériver terme à terme :

$$\partial_x u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$$

et la convergence normale $\Rightarrow$ uniforme, donc $\partial_x u \in \mathcal{C}^0([0,2\pi] \times [\tau, +\infty[)$

$\forall \tau > 0$, donc $\partial_x u \in \mathcal{C}^0([0,2\pi] \times]0,+\infty[)$. On traite de même toutes les dérivées, dont les séries convergent normalement grâce à l'exponentielle, donc $u \in \mathcal{C}^\infty([0,2\pi] \times]0,+\infty[)$. Même si $f \in L^2(0,2\pi)$ discontinue, dès que $t>0$, $u(x,t) \in \mathcal{C}^\infty$! C'est l'effet régularisant de la chaleur.

Pour celles et ceux arrivés jusqu'ici, je vous souhaite beaucoup de courage pour vos examens, et le meilleur pour la suite ! :)