

Exercice 1 (Burgers 🍔)

Considérons l'EDP de Burgers :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + u(x,t) \partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

(1) Les courbes caractéristiques vérifient :
$$\begin{cases} \dot{z}(t) = u(z(t), t) \\ z(0) = x_0 \end{cases}$$

donc $\frac{du}{dt}(z(t), t) = \partial_x u \cdot \dot{z} + \partial_t u = u \cdot \partial_x u + \partial_t u = 0$.

Donc $t \mapsto u(z(t), t)$ est constante le long des caractéristiques. Ainsi (1) donne :

$$\dot{z}(t) = u(z(t), t), \quad z(0) = u(x_0, 0) = f(x_0), \quad \text{donc } z(t) = f(x_0)t + x_0.$$

Les caractéristiques sont des droites, dont la pente dépend du profil initial.

(2) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est croissante. On sait que la solution de (1) est donnée par $u(x,t) = f(p(x,t))$ où $x_0 = p(x,t)$ est le pied de la caractéristique telle que $x_0 + f(x_0)t = x$. À t fixé, soit l'application

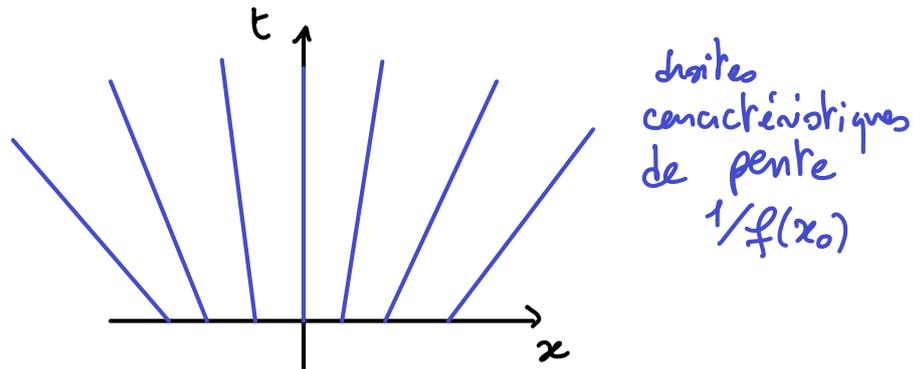
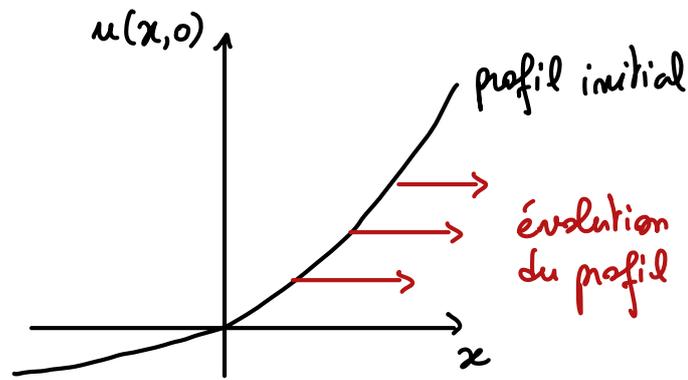
$$\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \mapsto x_0 + t f(x_0),$$

elle est continue et strictement croissante ($\forall t \geq 0, \varphi_t'(x_0) = 1 + t f'(x_0) \geq 1$).

Donc φ_t est bijective. De plus pour $x \geq A$, $\varphi_t(x) \geq x + t f(A)$ donc

$$\varphi_t(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty; \quad \text{de même pour } x \leq B, \quad \varphi_t(x) \leq x + t f(B), \quad \varphi_t(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$$

Ainsi φ_t est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $p(x,t) = \varphi_t^{-1}(x)$ est définie sur \mathbb{R} et $\forall t \geq 0$.



Le profil $u(x,t)$ a tendance à s'aplatir.

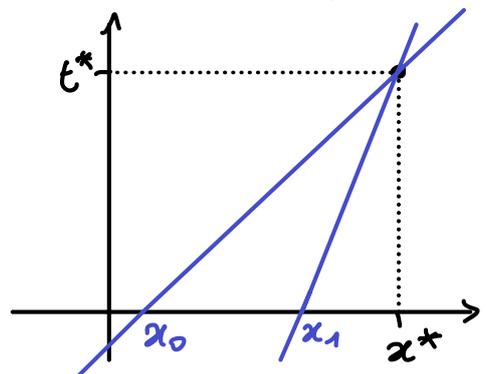
(3) $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) < 0$. Il existe donc $x_1 > x_0$ tq $f(x_1) < f(x_0)$.

La caractéristique $x = x_0 + t f(x_0)$ issue de x_0 et celle issue de x_1 :

$x = x_1 + t f(x_1)$ vont nécessairement se croiser à l'instant t^* :

$$x_0 + t^* f(x_0) = x_1 + t^* f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow t^* = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)} > 0$$

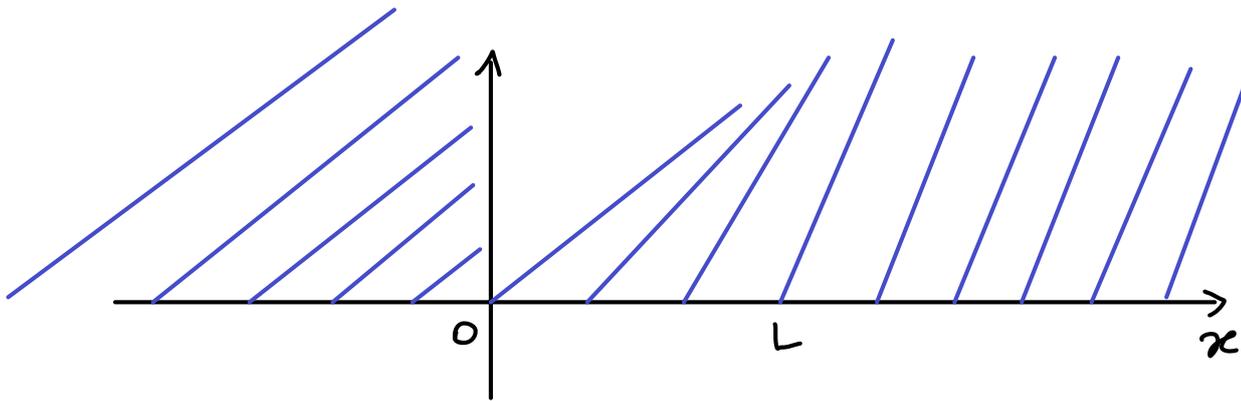
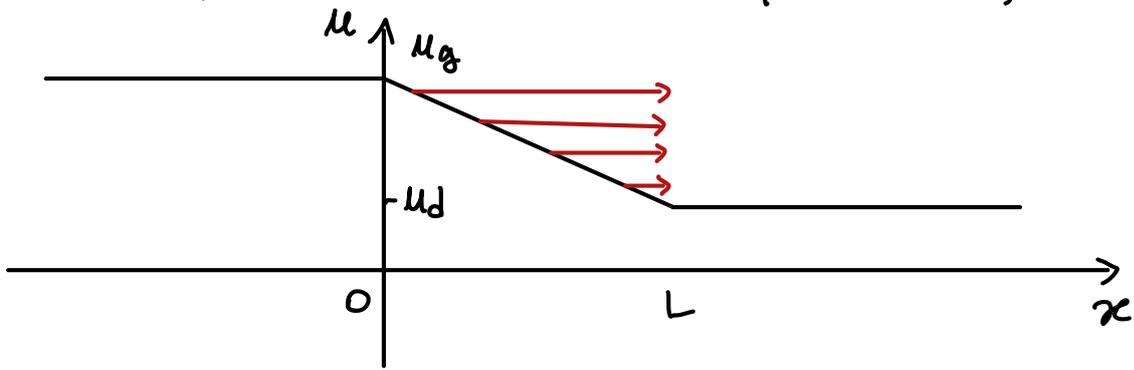


u est constante sur chacune des 2 caractéristiques mais comme

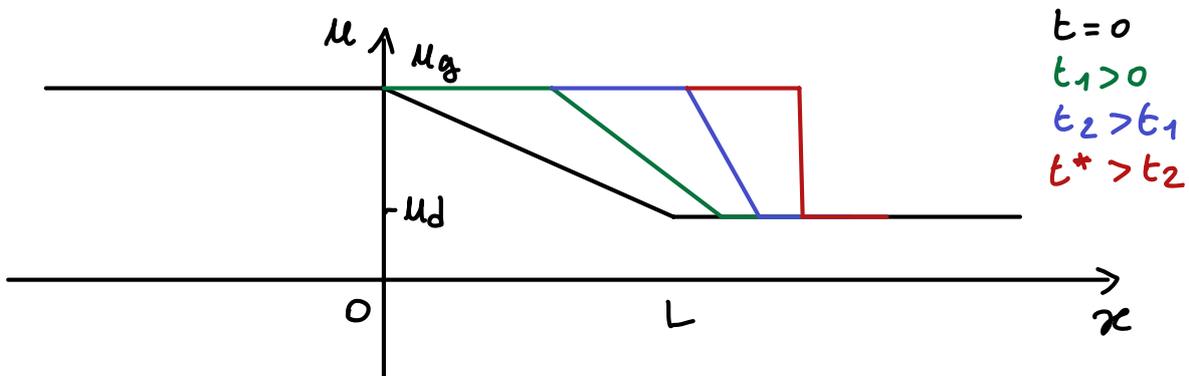
$$u(x_0 + f(x_0)t, t) = f(x_0) \text{ et } u(x_1 + f(x_1)t, t) = f(x_1) \neq f(x_0),$$

les 2 valeurs rentrent en conflit à $t = t^*$, on ne peut définir $u(x^*, t^*)$ qui ne peut prendre 2 valeurs différentes.

(4) Tracons le profil initial et les caractéristiques $x = x_0 + f(x_0)t$



Les caractéristiques vont nécessairement se croiser : le profil de la solution devient de plus en plus raide :



L'instant t^* correspond au croisement de la caractéristique issue de $x_0 = 0$:

$x = f(0)t = u_g t$, avec la caractéristique issue de $x_0 = L$:

$x = L + u_d t$, donc $t^* = \frac{L}{u_g - u_d}$. À cet instant, le sommet de l'onde rattrape le bas de l'onde et le profil devient vertical : une discontinuité apparaît. À partir de cet instant la méthode des caractéristiques devient inopérante, une onde de choc apparaît et se propage.

Exercice 2 (Transport numérique)

Soit $c > 0$, on considère $\partial_t u(x,t) + c \partial_x u(x,t) = 0$, et le schéma explicite suivant: $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta x} = 0$, où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$,

avec $\delta t, \delta x$ respectivement pas de temps et d'espace. Pour $j, n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = n \delta t$, et $x_j = j \delta x$. On a donc créé une grille de points ("maillage") dans le plan (x, t) .

(1) On a:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta x} = 0$$

$$\Leftrightarrow u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{c \delta t}{\delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$\Leftrightarrow u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c \delta t}{\delta x}\right) u_j^n - \frac{c \delta t}{\delta x} u_{j+1}^n$$

$$\Leftrightarrow u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^n - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^n \quad \text{avec } \rho = \frac{\delta x}{\delta t}.$$

(2) L'erreur de consistance s'obtient en injectant la solution exacte de l'EDP dans le schéma numérique:

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_{n+1}) - \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u(x_j, t_n) + \frac{c}{\rho} u(x_{j+1}, t_n).$$

Par développement de Taylor:

$$\bullet u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \delta t \partial_t u(x_j, t_n) + O(\delta t^2)$$

$$\bullet u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + O(\delta x^2)$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_n) + \delta t \partial_t u(x_j, t_n) + O(\delta t^2)$$

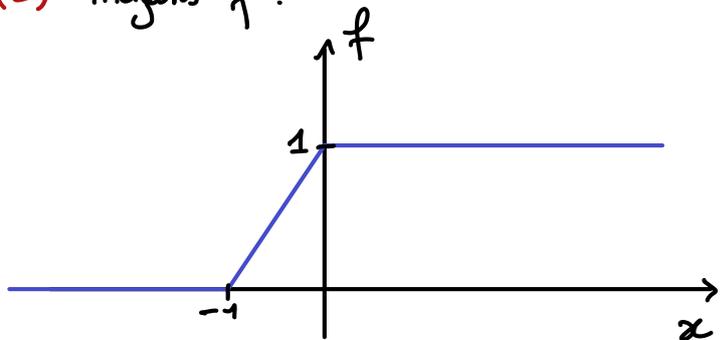
$$- \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u(x_j, t_n) + \frac{c}{\rho} \left\{ u(x_j, t_n) + \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + O(\delta x^2) \right\}$$

$$= \delta t \partial_t u(x_j, t_n) - \frac{c}{\rho} \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + O(\delta t^2) + \frac{c}{\rho} O(\delta x^2)$$

$$= \delta t (\partial_t u(x_j, t_n) + c \partial_x u(x_j, t_n)) + O(\delta t^2) + \frac{c}{\rho} O(\delta x^2)$$

$$= O(\delta t^2) + \frac{c \delta t}{\delta x} O(\delta x^2) = O(\delta t^2) + O(\delta t \delta x)$$

(3) Traçons f :



Soit $j \geq 0$, $x_j = j\delta x \geq 0$. Le schéma

$$\text{s'écrit : } u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^n - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^n.$$

$$\text{Donc } u_j^1 = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^0 - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^0.$$

Comme $x_j \geq 0$, $u_j^0 = f(x_j) = 1$, donc $u_j^1 = 1 \quad \forall j \geq 0$. De même :

$$u_j^2 = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^1 - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^1, \text{ et comme } u_j^1 = 1 \quad \forall j, \text{ on a } u_j^2 = 0 \quad \forall j.$$

Par récurrence immédiate on a $u_j^m = 1 \quad \forall j \geq 0$.

D'autre part, on sait que la solution exacte est une onde $u(x,t) = f(x-ct)$

et $f(x-ct) = 0$ si $x-ct \leq -1$. Donc $u(x,t) = 0$ si $x-ct \leq -1$, et

$u(x_j, t_m) = 0$ si $x_j - ct_m \leq -1$. Or $u_j^m = 1 \quad \forall j \geq 0$, donc le schéma

ne peut pas converger vers la bonne solution et ce $\forall \delta t > 0, \forall \delta x > 0$ car

pour $x_j \geq 0$ et t_m assez grand : $u(x_j, t_m) = 0$ et $u_j^m = 1$.

Rq : le schéma ne toujours chercher l'information vers la droite :

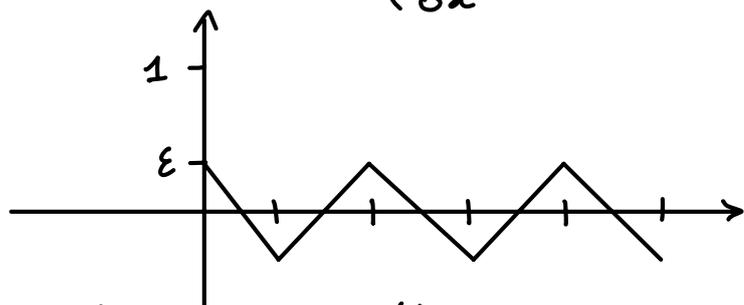
$$u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^n - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^n$$

alors que l'onde se propage depuis la gauche vers la droite. Le schéma

est donc mal conçu car ne respecte pas la physique du problème.

(4) Soit $f(x) = \varepsilon \cos\left(\frac{\pi x}{\delta x}\right)$, on a $u_j^0 = f(x_j) = f(j\delta x) = \varepsilon \cos(j\pi)$

$$= \varepsilon (-1)^j$$



"dents de scie"

Le schéma donne $u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^n - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^n$.

$$\text{Pour } n=0 : u_j^1 = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) \varepsilon (-1)^j - \frac{c}{\rho} \varepsilon (-1)^{j+1} = \varepsilon \left(1 + \frac{2c}{\rho}\right) (-1)^j$$

Par $n=1$: $U_j^2 = (1 + \frac{c}{\rho}) U_j^1 - \frac{c}{\rho} U_{j+1}^1 = (1 + \frac{2c}{\rho}) \varepsilon (1 + \frac{2c}{\rho}) (-1)^j$
 $= \varepsilon (1 + \frac{2c}{\rho})^2 (-1)^j$.

Par récurrence on a $U_j^m = \varepsilon (1 + \frac{2c}{\rho})^m (-1)^j$, avec

$$\|U^m\|_\infty = \max_j |u_j^m| = \varepsilon \left[1 + \frac{2c}{\rho}\right]^m$$

avec $\varepsilon > 0, c > 0, \rho > 0$ donc $(1 + \frac{2c}{\rho}) > 1$. Ainsi $\|U^m\|_\infty \rightarrow +\infty$, tandis

que la solution exacte $u(x,t) = f(x-ct)$ vérifie $\|u(\cdot, t)\|_\infty = \|f\|_\infty = \varepsilon$.

Ainsi le schéma produit des solutions numériques non bornées alors que la solution exacte est bornée \Rightarrow schéma instable.

Exercice 3 (Lax-Friedrichs)

On considère le schéma : $\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_j^n)}{\delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{2\delta x} = 0$.

(1) $U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{c\delta t}{\delta x} \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2}\right)$
 $= \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) U_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) U_{j+1}^n$ avec $\rho = \delta x / \delta t$.

Notons que le schéma va bien chercher l'information à gauche ($j-1$) et à droite ($j+1$).

(2) $\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_{n+1}) - \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) u(x_{j-1}, t_n) - \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) u(x_{j+1}, t_n)$.

Par développements de Taylor :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\delta t, \delta x) &= u(x_j, t_n) + \delta t \partial_t u(x_j, t_n) + O(\delta t^2) \\ &- \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) \left[u(x_j, t_n) - \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(x_j, t_n) + O(\delta x^3) \right] \\ &- \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) \left[u(x_j, t_n) + \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(x_j, t_n) + O(\delta x^3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta t \partial_t u(x_j, t_m) + \frac{c \delta x}{\rho} \partial_x u(x_j, t_m) - \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(x_j, t_m) + \frac{c}{2\rho} O(\delta x^3) + O(\delta t^2) \\
&= \delta t (\partial_t u(x_j, t_m) + c \partial_x u(x_j, t_m)) + O(\delta t^2) + O(\delta x^2) + O(\delta t \delta x^2) + O(\delta x^3) \\
\frac{c}{\rho} &= \frac{c \delta t}{\delta x}
\end{aligned}$$

$$= O(\delta t^2) + O(\delta x^2) \text{ car } \begin{cases} O(\delta x^3) \ll O(\delta x^2) \\ O(\delta t \delta x^2) \ll O(\delta x^2) \end{cases}$$

On a donc une erreur de consistance d'ordre 2 comme pour le schéma précédent.

(3) Pour étudier la stabilité, on prend $f(x) = e^{ikx}$, donc $f(x_j) = e^{ik_j \delta x}$, et lorsque la fréquence vaut $k = \frac{\pi}{\delta x}$, $f(x_j) = e^{i j \pi} = (e^{i\pi})^j = (-1)^j$: la fonction est en "dent de scie" (cf. exo 2). Montrons par récurrence sur n que :

$$u_j^n = G_1(k)^n u_{j_0}^n \quad (\text{Hyp}^n)$$

Par construction c'est vrai pour $n=0$. Supposons (Hyp^n) vraie. Alors :

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) u_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) u_{j+1}^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) G_1(k)^n u_{j-1}^0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) G_1(k)^n u_{j+1}^0$$

On sait que $u_j^0 = e^{ik_j \delta x}$ donc

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= G_1(k)^n \left(\left(1 + \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik(j-1)\delta x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik(j+1)\delta x} \right) \\
&= G_1(k)^n \underbrace{\left(\left(1 + \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik\delta x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik\delta x} \right)}_{G_1(k)} \underbrace{e^{ik_j \delta x}}_{u_j^0}
\end{aligned}$$

On reconnaît $u_j^{n+1} = G_1(k)^{n+1} u_j^0$. Donc on a bien (Hyp^{n+1}) .

Étudions le module de $G_1(k)$:

$$G_1(k) = \left(1 + \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik\delta x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik\delta x} = \cos(k\delta x) - \frac{c}{\rho} i \sin(k\delta x)$$

$$\text{Donc } |G_1(k)|^2 = \cos^2(k\delta x) + \frac{c^2}{\rho^2} \sin^2(k\delta x) = 1 + \left(\frac{c^2}{\rho^2} - 1\right) \sin^2(k\delta x).$$

Ainsi, si $|c/\rho| > 1$ (resp. $|c/\rho| \leq 1$) alors $|G_1(k)| > 1$ (resp. $|G_1(k)| \leq 1$).

(4) Lorsque $|\frac{c}{\rho}| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq c/\rho \leq 1$

$$\text{alors } |u_j^n| = |G(k)|^n |u_j^0| \leq |u_j^0|$$

$$\Leftrightarrow \max_j |u_j^n| \leq \max_j |u_j^0| \Leftrightarrow \|u^n\|_{L^\infty} \leq \|u^0\|_{L^\infty}.$$

Les valeurs calculées par le schéma restent bornées par la donnée initiale. Ainsi le schéma de LF est stable. Comme il est consistant d'ordre 2, le schéma est convergent et d'ordre $2-1=1$. Ce schéma est intéressant car applicable $\forall \text{sgn}(c)$.

Rq: On peut montrer $\|u^n\|_{L^\infty} \leq \|u^0\|_{L^\infty}$ par une donnée initiale quelconque et pas seulement par une donnée initiale oscillante type e^{ikx} .

En effet, si $\frac{c}{\rho} \in [-1, 1]$, $(\frac{1}{2} \pm \frac{c}{2\rho}) \in \mathbb{R}_+$ et leur somme vaut 1.

Ainsi u_j^{n+1} est une combinaison convexe des valeurs u_{j-1}^n et u_{j+1}^n , donc

$$\|u^{n+1}\|_{L^\infty} \leq \|u^n\|_{L^\infty} \leq \dots \leq \|u^0\|_{L^\infty}.$$

On a même mieux:
$$\begin{cases} \max_j u_j^{n+1} \leq \max_j u_j^n \\ \min_j u_j^{n+1} \geq \min_j u_j^n \end{cases} \quad \text{le schéma est monotone.}$$

Exercice 4 (Lax-Wendroff)

On considère le schéma explicite:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} - \frac{1}{2} c^2 \delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\delta x^2} = 0$$

Qu'on réécrit:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\delta t}{2\delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2 \delta t^2}{2\delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

On pose $\nu = \frac{c\delta t}{\delta x}$. On a alors:

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_{j-1}^n \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} \right) + u_j^n (1 - r^2) + u_{j+1}^n \left(-\frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + r^2) u_{j-1}^n + (1 - r^2) u_j^n + \frac{1}{2} (r^2 - 1) u_{j+1}^n
 \end{aligned}$$

(2) Prenons la solution exacte $u(x_j, t_n)$ dans le schéma:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= u(x_j, t_{n+1}) - \frac{1}{2} (1 + r^2) u(x_{j-1}, t_n) - (1 - r^2) u(x_j, t_n) + \frac{1}{2} (r^2 - 1) u(x_{j+1}, t_n) \\
 &= u(x_j, t_n) + \delta t \partial_t u(x_j, t_n) + \frac{\delta t^2}{2} \partial_t^2 u(x_j, t_n) + O(\delta t^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} (1 + r^2) \left[u(x_j, t_n) - \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(x_j, t_n) - \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(x_j, t_n) + O(\delta x^4) \right] \\
 & - (1 - r^2) u(x_j, t_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \left[u(x_j, t_n) - \delta x \partial_x u(x_j, t_n) + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u(x_j, t_n) - \frac{\delta x^3}{6} \partial_x^3 u(x_j, t_n) + O(\delta x^4) \right] \\
 & = \delta t \partial_t u(x_j, t_n) + \frac{\delta t^2}{2} \partial_t^2 u(x_j, t_n) + r \delta x \partial_x u(x_j, t_n) \\
 & \quad - \frac{r^2 \delta x^2}{2} \partial_x^2 u(x_j, t_n) + O(\delta t^3) + \frac{r \delta x^3}{6} \partial_x^3 u(x_j, t_n) + (|r| + r^2) O(\delta x^4)
 \end{aligned}$$

Comme u est solution de $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ alors $\delta t (\partial_t u + c \partial_x u) = 0$

et $c \delta t = r \delta x$ par définition de r donc $\delta t \partial_t u + r \delta x \partial_x u = 0$.

De plus,

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_t^2 u + c \partial_{xt}^2 u = 0 \quad (*) \\ \partial_{tx}^2 u + c \partial_x^2 u = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\partial_{tx}^2 u = \partial_{xt}^2 u = -c \partial_x^2 u$, en prenant ξ_a dans $(*)$ on obtient

l'équation des ondes: $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$.

$$\text{Donc } \delta t^2 \partial_t^2 u - c^2 \delta t^2 \partial_x^2 u = \delta t^2 \partial_t^2 u - r^2 \delta x^2 \partial_x^2 u = 0.$$

Il reste donc $\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^3) + \frac{r}{6} \delta x^3 \partial_x^3 u + (r^2 + |r|) O(\delta x^4)$, il

faut tenir compte de $r = c \delta t \delta x^{-1}$ donc $r \delta x^3 = c \delta t \delta x^2$. Or

$$r \delta x^4 = c \delta t \delta x^3 \ll \delta t \delta x^2 \quad \text{et} \quad r^2 \delta x^4 = c^2 \delta t^2 \delta x^2 \ll \delta t \delta x^2.$$

Donc $\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^3) + O(\delta t \delta x^2)$.

(3) Calculons comment le schéma amplifie le signal $f(x)$ au cours du temps.

Montrons par récurrence que $(Hyp^n) \begin{cases} u_j^n = G(k)^n u_j^0 \\ G(k) = 1 - r^2 + \frac{1}{2}(r^2 - r) e^{ik\delta x} + \frac{1}{2}(r^2 + r) e^{-ik\delta x} \end{cases}$

L'initialisation est immédiate. Supposons (Hyp^n) vraie. Alors:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(r^2 - r) G(k)^n u_{j+1}^0 + (1 - r^2) G(k)^n u_j^0 + \frac{1}{2}(r^2 + r) G(k)^n u_{j-1}^0 \\ &= G(k)^n \left\{ \frac{r^2 - r}{2} e^{ik\delta x} u_j^0 + (1 - r^2) u_j^0 + \frac{r^2 + r}{2} e^{-ik\delta x} u_j^0 \right\} \\ &= G(k)^n \{ G(k) \} u_j^0 = G(k)^{n+1} u_j^0. \end{aligned}$$

On a donc que $|G(k)| = \left| 1 - r^2 + \frac{1}{2}(r^2 - r) e^{ik\delta x} + \frac{1}{2}(r^2 + r) e^{-ik\delta x} \right|$

$$\text{et } G(k) = 1 - r^2 + r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x)$$

$$|G(k)|^2 = (1 - r^2 + r^2 \cos(k\delta x))^2 + r^2 \sin^2(k\delta x) \leftarrow \text{assez délicat à majouer...}$$

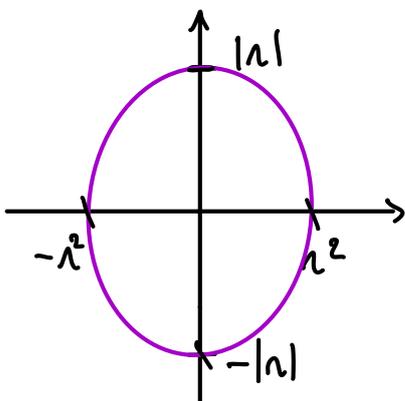
Utilisons un peu de géométrie: on considère le plan complexe

$$G(k) = (1 - r^2) + r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x).$$

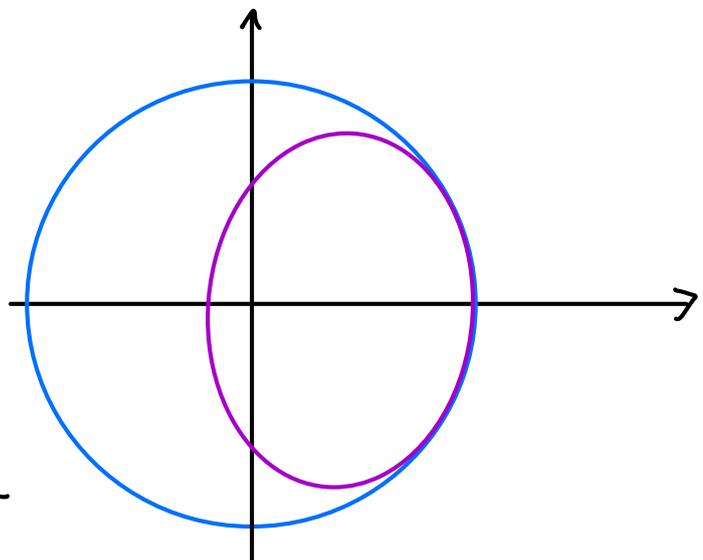
L'ensemble $\{ r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x) \mid k \in \mathbb{R} \}$ décrit une ellipse dont les

axes de symétrie sont (I), donc $\{ (1 - r^2) + r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x) \mid k \in \mathbb{R} \}$

décrit (II) obtenue par translation de $((1 - r^2), 0)$



(I)



(II)

Pour que l'ellipse maame soit contenue

dans le disque unité, il suffit que

$$|r| \leq 1 \text{ et } 1 - 2r^2 \geq -1.$$

Ces conditions sont satisfaites si $-1 \leq \lambda \leq 1$, c'est une condition suffisante de stabilité du schéma de Lax-Wendroff.

(4) On remarque que u_j^{n+1} est une moyenne pondérée de u_{j-1}^n , u_j^n et u_{j+1}^n affectés des coefficients $\frac{1-\lambda^2}{2}$, $1-\lambda^2$, $\frac{1+\lambda^2}{2}$. Les 3 coefficients somme bien à 1, normal car le schéma doit être exact pour les solutions constantes, mais lorsque $|\lambda| < 1$, $\frac{1-\lambda^2}{2}$ ou $\frac{1+\lambda^2}{2}$ est négatif, donc impossible de garantir que $\min_j (u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max_j (u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$ impossible donc de garantir que $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$.

Remarques: * Le schéma est stable pour $|\frac{c\delta t}{\delta x}| < 1$ et consistant d'ordre 3.

Il est donc convergent et c'est un schéma d'ordre 2 en temps et en espace. Mais il n'est pas monotone.

* Très complexe de produire des schémas précis et monotones.