Exercice 1

Soit $c \in \mathbb{R}$, on considère l'EDP d'advection :

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0 \qquad (1)$$

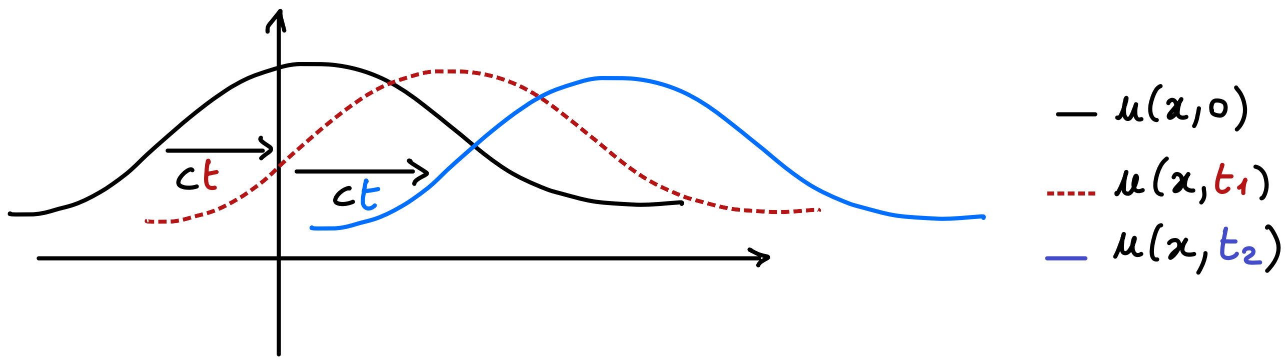
où $u : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$.

Montrons d'abord que $u(x,t) = f(x-ct)$ est solution de (1). Pour ce faire, on pose $u(x,t) := f(x-ct)$. Alors :

* $\partial_t u(x,t) = \partial_t f(x-ct) = -cf'(x-ct)$
* $\partial_x u(x,t) = \partial_x f(x-ct) = f'(x-ct)$

Donc $\partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = -cf'(x-ct) + cf'(x-ct) = 0$.

Ici, la donnée initiale est $u_{|t=0} = u(x,0) = f(x)$.
La solution $u(x,t) = f(x-ct)$ se déduit de $u_{|t=0}$ par simple translation de ct :



La translation s'effectue vers la droite (resp. la gauche) si $c>0$ (resp. $c<0$).
Si $c=0$, $\partial_t u(x,t) = 0$, donc $u(x,t) = f(x)$. On a donc trouvé une solution de type onde progressive ($c \neq 0$) et une solution stationnaire ($c=0$).
Dans (1), c est homogène à $\dfrac{[L]}{[T]}$, i.e. une vitesse.

Exercice 2

Posons $u(x,t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}$. Alors :

* $\partial_t u(x,t) = \frac{-x}{t^2} f'\left(\frac{x}{t}\right)$,
* $\partial_x u(x,t) = \frac{1}{t} f'\left(\frac{x}{t}\right)$.

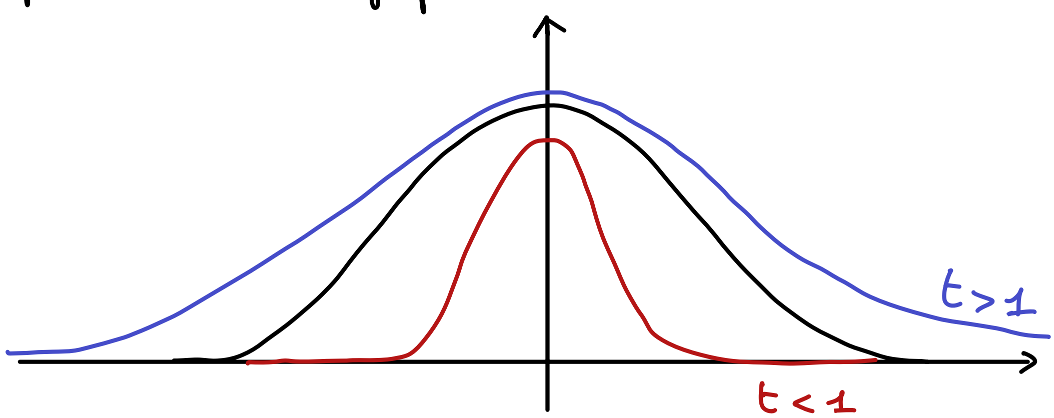
Ainsi :

$$\partial_t u(x,t) + \frac{x}{t}\partial_x u(x,t) = \left(\frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t^2}\right) f'\left(\frac{x}{t}\right) = 0.$$

Donc $u(x,t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$ est une solution de l'EDP. On remarque que $u(x,1) = f(x)$, et plus généralement que pour $\lambda = \frac{1}{t}$, on a $u(x,t) = f(\lambda x)$.

Ainsi il suffit d'effectuer la transformation affine $(x,y) \mapsto (\lambda x, y)$, $\lambda := \frac{1}{t}$ au graphe $x \mapsto u(x,t=1)$ pour obtenir le graphe de $x \mapsto u(x,t)$.

Cela revient à "changer d'échelle sur l'axe des x". Quand $t>1$, on zoome (on "aplatit/détend" le graphe). Quand $t<1$, c'est l'inverse (on le "concentre").



Rq : Une telle application affine s'appelle une affinité de base (O_y) et de rapport $\frac{1}{t}$ (⚠ Ce n'est pas pareil qu'une homothétie).

Exercice 3 (Méthode des caractéristiques)

On introduit les courbes $t \mapsto \xi(t)$, solutions de $\dot{\xi}(t) = c$. Ce sont les courbes définies comme $\xi(t) = ct + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Le terme

$$\partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = \partial_t u(x,t) + \dot{\xi}(t)\,\partial_x u(x,t),$$

évalué en $(\xi(t),t)$ est alors égal à $\frac{du}{dt}(\xi(t),t)$. L'EDP se réécrit alors $\frac{du}{dt}(\xi(t),t) + r\,u(\xi(t),t) = 0$, nous permettant ainsi de nous ramener à une EDO : $v'(t) + r v(t) = 0$, avec $v(t) := u(\xi(t),t)$, dont la solution est $v(t) = v(0)\,e^{-rt}$, avec $v(0) = u(\xi(0),0) = f(x_0)$.

Donc $u(\xi(t),t) = f(x_0)\,e^{-rt}$, et donc $u(x_0+ct,t) = f(x_0)\,e^{-rt}$.

En posant $x := x_0 + ct$, on a $u(x,t) = f(x-ct)\,e^{-rt}$.

On a ainsi la combinaison du terme de transport $\partial_t u + c\partial_x u$ et du terme de réaction $\partial_t u = -ru$. On a donc une onde progressive qui se déplace à vitesse c et qui est amortie (resp. amplifiée) exponentiellement quand $r>0$ (resp. $r<0$).

Exercice 4

(1) Considérons l'EDP
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = xt, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$$

Utilisons la méthode des caractéristiques : ce sont donc les courbes solutions de $\dot{\xi}(t) = c$, i.e. les droites $\xi(t) = x_0 + ct$, où $\partial_t u + c\partial_x u = \frac{du}{dt}(\xi(t),t)$.

L'EDP se réécrit alors, en posant $v(t) = u(\xi(t),t)$, comme l'EDO :
$$v'(t) = \frac{du}{dt}(x_0+ct,t) = xt = (x_0+ct)t.$$

On intègre v' et on obtient : $v(t) = x_0\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} + v(0)$

avec $v(0) = u(\xi(0),0) = u(x_0,0) = f(x_0)$. Donc :
$$v(t) = x_0\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} + f(x_0)$$
$$\Rightarrow u(x_0+ct,t) = x_0\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} + f(x_0)$$
$$\Rightarrow u(x,t) = (x-ct)\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} + f(x-ct).$$

Rq : l'EDP est linéaire, u s'écrit donc comme somme de la sol. géné. de l'éq. homogène $f(x-ct)$ et de $(x-ct)\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}$, sol. part. de l'EDP avec 2nd membre.

(2) On fait de même : on pose donc $v(t) = u(x_0+ct, t)$ qui vérifie l'EDO

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = v^2(t), \\ v(0) = f(x_0). \end{cases}$$

Par séparation des variables : $\dfrac{-v'(t)}{v^2(t)} = -1 \iff \dfrac{1}{v(t)} = -t + \dfrac{1}{v(0)} = -t + \dfrac{1}{f(x_0)}$

(en ayant évidemment $f(x_0) \neq 0$, sinon la solution de $v' = v^2$, $v(0) = 0$ est la solution triviale $v \equiv 0$).

Donc $v(t) = \left(\dfrac{1}{f(x_0)} - t\right)^{-1} = \dfrac{f(x_0)}{1 - tf(x_0)}$, ce qui donne :

$$u(x_0+ct, t) = \frac{f(x_0)}{1-tf(x_0)} \quad \text{donc} \quad u(x,t) = \frac{f(x-ct)}{1-tf(x-ct)}$$

bien définie tant que $t \neq \dfrac{1}{f(x-ct)}$. Si on suppose que $0 < f(x) \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $u(x,t)$ est définie sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{1}{M}[$ au moins.

(3) On introduit les courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \xi^2(t) \\ \xi(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

⚠ Ce ne sont plus des droites !

On a que $\xi(t) \equiv 0$ si $x_0 = 0$, et $\xi(t) = \dfrac{1}{1/x_0 - t} = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ (convient aussi si $x_0 = 0$.)

Alors $v(t) = u(\xi(t), t)$ vérifie l'EDO

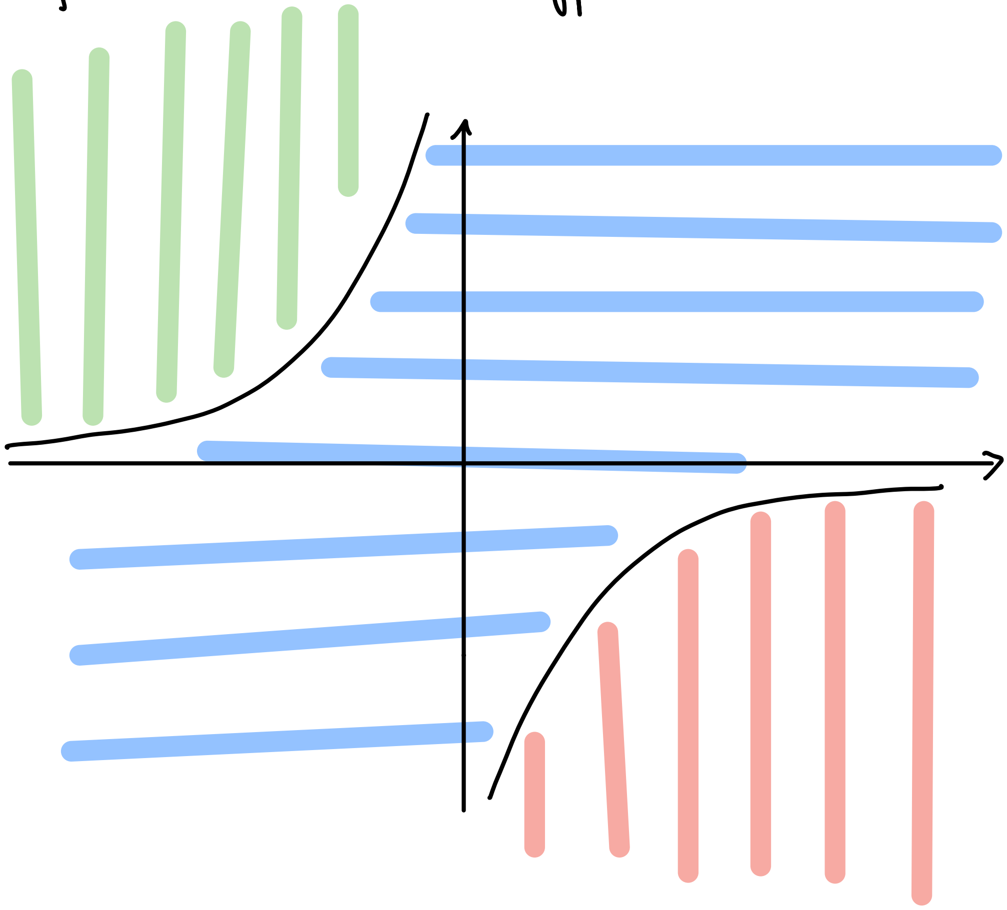
$$\begin{cases} v'(t) = 0 \\ v(0) = u(x_0, 0) = f(x_0) \end{cases}, \quad \text{donc } v(t) = \text{cste} = f(x_0).$$

Ainsi $u\left(\dfrac{x_0}{1-x_0 t}, t\right) = f(x_0)$. Donc pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, il faut trouver $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{x_0}{1-x_0 t} = x \iff x_0(1+xt) = x$

$$\iff x_0 = \frac{x}{1+xt} \quad \text{qui existe si } xt \neq -1$$

On a donc $u(x,t) = f\left(\dfrac{x}{1+xt}\right)$, définie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,t) \mid xt \neq -1\}$.

Ainsi u est définie en dehors de l'hyperbole $xt = -1$:



À noter qu'on veut pouvoir définir $u(x, t=0)$ donc il faut choisir le domaine entre les deux hyperboles (domaine) :

$$\Omega_0 = \left\{x>0 \mid t > -\frac{1}{x}\right\} \cup \left\{x<0 \mid t < -\frac{1}{x}\right\} \cup \{x=0\}.$$