Exercice 1 (Trapèze implicite)

(1) On considère le schéma de Crank-Nicolson suivant :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left\{f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})\right\}$$

avec $t_n = nh$, $h>0$, $n \in \mathbb{N}$. Mettons-le sous forme d'un schéma multipas :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\left\{f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})\right\}$$

et pour étudier sa stabilité cela revient à étudier les racines de $\rho(z) = z-1$.

L'unique racine est 1, elle est simple, donc le schéma est stable.

Rq : On peut aussi prendre $f \equiv 0$ et regarder $y_{n+1} - y_n = 0$, on trouve que la suite $(y_n)_n$ est constante $= y_0$ donc elle est bornée de surcroît.

(2) L'erreur de consistance est :

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y(t_0) - h\left\{\frac{f(t_0,y_0) + f(t_0+h, y(t_0+h))}{2}\right\}$$

$$\underset{y'=f}{=} y(t_0+h) - y(t_0) - h\left\{\frac{y'(t_0) + y'(t_0+h)}{2}\right\}$$

Par développement de Taylor :

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &= y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + O(h^3) \\ &\quad - y(t_0) - \frac{h}{2} y'(t_0) - \frac{h}{2}\left\{y'(t_0) + h y''(t_0) + O(h^2)\right\} \\ &= O(h^3).\end{aligned}$$

(3) D'après un théorème de cours, un schéma stable et consistant converge.

De plus, comme l'erreur de consistance est $O(h^3)$, le schéma est d'ordre 2 :

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^2) \quad \text{quand } h \to 0,\ T>0 \text{ fixé.}$$

Exercice 2 (Milne)

Soit $t_n = nh$, $h>0$, $n\in\mathbb{N}$. On considère l'éq. $y'(t) = f(t, y(t))$, et on pose $f_k = f(t_k, y_k)$. Le schéma de Milne est :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{2h}{6}\left(f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1}\right).$$

(1) On suit l'indication : $y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt$. Calculons cette intégrale avec la quadrature de Simpson :

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq (b-a)\left\{\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f(a+b) + \frac{1}{6} f(b)\right\}$$

(notons qu'elle est exacte sur $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$). On a donc :

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) \simeq 2h\left\{\frac{1}{6} y'(t_{n-1}) + \frac{4}{6} y'(t_n) + \frac{1}{6} y'(t_{n+1})\right\}$$

$$\simeq \frac{2h}{6}\left\{f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + 4 f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right\}$$

d'où le schéma, avec les mêmes coefficients.

(2) Pour calculer y_{n+1}, on remarque que $y_{n+1} = g(y_{n+1})$, avec g définie :

$$g : y \longmapsto y_{n-1} + \frac{2h}{6}\left\{f(t_{n-1}+2h, y) + 4 f(t_{n-1}+h, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})\right\}.$$

Vérifions qu'elle est contractante (à y_{n-1}, y_n fixés) :

$$g(y) - g(z) = \frac{2h}{6}\left\{f(t_{n-1}+2h, y) - f(t_{n-1}+2h, z)\right\}$$

$$\Rightarrow |g(y) - g(z)| \leq \frac{2h}{6} L|y-z| \quad \text{car } f(t,\cdot) \text{ est } L\text{-lipschitzienne,}$$

$$\leq \frac{hL}{3}|y-z|$$

Donc pour $h < \frac{3}{L}$, g est contractante. On peut calculer y_{n+1} par la méthode des approximations successives, comme la limite de la suite $\left(g\circ g^{k-1}(y_n)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$, c.à.d $g(y_n)$, $g\circ g(y_n)$, $g\circ g\circ g(y_n)$ ...

(3) Le schéma de Milne est un schéma multipas, on étudie les racines du polynôme caractéristique $\rho(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$.

Les racines sont 1 et -1, simples, et de module ≤ 1, donc le schéma est stable.

(4) Effectuons un développement de Taylor autour de t_m :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(h) &= y(t_m+h) - y(t_m-h) - \frac{2h}{6}\Big\{ f(t_m+h, y(t_m+h)) + 4 f(t_m, y(t_m)) \\
&\qquad + f(t_m-h, y(t_m-h)) \Big\} \\
&\underset{y'=f}{=} y(t_m+h) - y(t_m-h) - \frac{2h}{6}\Big\{ y'(t_m+h) + 4y'(t_m) + y(t_m-h) \Big\} \\
&= y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(t_m) + O(h^5) \\
&\quad - \left(y(t_m) - h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) - \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(t_m) + O(h^5) \right) \\
&\quad - \frac{h}{3}\left(y'(t_m) + h y''(t_m) + \frac{h^2}{2} y'''(t_m) + \frac{h^3}{6} y^{(4)}(t_m) \right) + O(h^5) \\
&\quad - \frac{4h}{3} y'(t_m) \\
&\quad - \frac{h}{3}\left(y'(t_m) - h y''(t_m) + \frac{h^2}{2} y'''(t_m) - \frac{h^3}{6} y^{(4)}(t_m) \right) + O(h^5) \\
&= O(h^5)
\end{aligned}$$

(5) D'après le théorème de cours, le schéma multipas est stable et consistant donc convergent. De plus, comme l'erreur de consistance est $O(h^5)$, le schéma est d'ordre 4 : $\max_{0<t_m\leq T} |y(t_m) - y_m| = O(h^4)$ quand $h \to 0$, $T>0$ fixé.