
Devoir encadré - 14 février 2025

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Fonctions polynomiales

Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré au plus 2. Montrer que $F = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_2$ et donner sa dimension.

Exercice 2 : Somme directe

Soit $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \text{vect}(u)$ puis $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

1. Montrer que G et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.
3. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 3 : Suites

Dans cet exercice on se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'ensemble $E_{a,b}$ défini par :

$$E_{a,b} = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.q. } u_{n+2} = a + b \sin(u_{n+1}) + 3u_{n+1} - 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à coefficients réels.

On note $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $e_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_n = \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le but de l'exercice est de savoir si $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et si oui, à en donner une base.

1. On suppose $a \neq 0$. Montrer que $e \notin E_{a,b}$.
2. On suppose $a = 0$. Montrer que $f \in E_{0,b}$.
3. Montrer que si $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors $a = b = 0$.
4. Montrer que $E_{0,0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans la suite, on se concentre sur l'espace $E_{0,0}$. On note $e^+ = (e_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $e_n^+ = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $e^- = (e_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $e_n^- = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que $e^+ \in E_{0,0}$ et $e^- \in E_{0,0}$.
6. On se donne $u \in E_{0,0}$.
 - (a) Montrer qu'il existe une unique paire $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telle que :

$$\lambda + \mu = u_0, \quad 2\lambda + \mu = u_1.$$

- (b) En déduire par récurrence que $u_n = \lambda e_n^+ + \mu e_n^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $u = \lambda e^+ + \mu e^-$.
- (c) Que pouvez-vous dire de la famille $\{e^+, e^-\}$ pour l'espace $E_{0,0}$.

7. On se donne $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

(a) Montrer l'implication

$$\lambda e^+ + \mu e^- = e \implies \lambda = \mu = 0.$$

Indication : On pourra réutiliser le système en λ, μ étudié auparavant pour une valeur bien choisie de u_0 et u_1 .

(b) Que pouvez-vous dire de la famille $\{e^+, e^-\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^N$.

8. Que représente la famille $\{e^+, e^-\}$ pour l'espace $E_{0,0}$?