DE – MA 8201. Ex 3

1. Pour $n = 0$

$$e_2 = 0 \neq a + 3e_1 - e_0 = a.$$

Donc $e \notin E_{a,b}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$f_{n+2} = \pi = b \sin(\pi) + 3\pi - \pi$$
$$= b \sin(u_{n+1}) + 3u_{n+1} - 2u_n$$

Donc $f \in E_{a,b}$.

3. Si $a \neq 0$ d'après 1 e qui est le 0 de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas un élément de $E_{a,b}$ donc $E_{a,b}$ n'est pas un ss-ev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors

$f \in E_{0,b}$ mais $g = \frac{f}{2} \notin E_{0,b}$

En effet, pour $n = 0$

$$g_2 = \frac{\pi}{2} \neq b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{2}$$
$$\neq b \sin(u_{n+1}) + 3u_{n+1} - 2u_n$$

Donc $E_{0,b}$ n'est pas un ss ev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Soit $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Alors

Φ est linéaire.

Pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Phi\left((u_n+\lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(u_{n+2}+\lambda v_{n+2} - 3\left(u_{n+1}+\lambda v_{n+1}\right) + 2\left(u_n+\lambda v_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \left(u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda\left(v_{n+2}-3v_{n+1}+2v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + \lambda\,\Phi\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

Donc $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est un ss-ev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Or $\mathrm{Ker}\,\Phi = E_{0,0}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$

•) $3\cdot e^-_{n+1} - 2e^-_n = 3-2 = 1$
$= e^-_{n+2}$

•) $3\cdot e^+_{n+1} - 2e^+_n = 3\cdot 2\cdot 2^n - 2\cdot 2^n$
$= 4\cdot 2^n = 2^{n+2} = e^+_{n+2}$

Donc $e^+ \in E_{0,0}$ et $e^- \in E_{0,0}$.

6.

a- En soustrayant 2 fois la 1ière eqn à la 2ième et 1 fois la 2ième eqn à la 1ière on trouve de manière équivalente

$\lambda = u_1 - u_0 \qquad \mu = 2u_0 - u_1$

b- On montre la propriété par récurrence.

[illegible] propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = \lambda + \mu = \lambda . 2^0 + \mu . 1$
  $= \lambda e_0^+ + \mu e_0^-$
- $u_1 = 2\lambda + \mu = \lambda . 2^1 + \mu . 1$
  $= \lambda e_1^+ + \mu e_1^-$

. Soit $n \in \mathbb{N}$

. Supposons que $u_k = \lambda e_k^+ + \mu e_k^-$ pour $k \in n+1$ alors

$$u_{n+2} = 3 u_{n+1} - 2 u_n$$

hypothèse de récurrence

$$= 3(\lambda e_{n+1}^+ + \mu e_{n+1}^-) - 2(\lambda e_n^+ + \mu e_n^-)$$

$$= \lambda(3 e_{n+1}^+ - 2 e_n^+) + \mu(3 e_{n+1}^- - 2 e_n^-)$$

cf. "5."

$$= \lambda e_{n+2}^+ + \mu e_{n+2}^-$$

Comme $u_n = \lambda e_n^+ + \mu e_n^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ il vient $u = \lambda e^+ + \mu e^-$

c- D'après 6.b $\{e^+, e^-\}$ est une famille génératrice de $E_{0,0}$. De plus, d'après 6.a, si $\lambda e_+ + \mu e^- = 0$ alors en particulier (pour $n = 0, 1$) $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda + \mu = 0$ dont la seule solution en (λ, μ) est $\lambda = \mu = 0$. Donc $\{e_+, e_-\}$ est libre

Finalement $\{e_+, e_-\}$ est une base de $E_{0,0}$.