DE HA8201H – Ex1 & 2 Maths.

Ex 1 Soit $\Phi : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$p \longmapsto p(0)$$

Φ est linéaire :

Pour $(p,q) \in \mathcal{P}_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Phi(p+\lambda q) = (p+\lambda q)(0) = p(0)+\lambda q(0)$$
$$= \Phi(p) + \lambda \Phi(q)$$

Φ est surjective :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ λ est l'image de la fonction constante $\bar{\lambda}$.

Donc $\operatorname{Ker}\Phi = F$ est un ss ev de $\mathcal{P}_2$

or $\dim \operatorname{Ker}\Phi = \underset{\dim \mathcal{P}_2}{\underset{\shortparallel}{3}} - \dim \operatorname{Im}\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\Phi} = 2.$

Ex. 2

1. $F = \operatorname{Vect}(u)$ est un ss-ev de $\mathbb{R}^n$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow x_1 + \ldots + x_n$$

alors φ est linéaire : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x + \lambda y) = (x_1 + \lambda y_1) + \ldots + (x_n + \lambda y_n)$$
$$= x_1 + \ldots + x_n + \lambda(y_1 + \ldots + y_n)$$
$$= \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

En particulier $\operatorname{Ker}\varphi = G$ est un ss-ev de $\mathbb{R}^n$.
On garde la notation φ pour la suite.

2. On mq $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = \mathbb{R}^n$.

1. Supposons $x \in F \cap G$ alors
$x \in F$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $x = (\lambda, \dots, \lambda)$
et $\varphi(x) = n\lambda$. De plus $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ Donc $n\lambda = 0$
Donc $\lambda = 0$. Donc $x = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$x = \underbrace{\frac{\varphi(x)}{n} u}_{=e} + \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{n} u \right)}_{=e}$$

. Par definition $\frac{\varphi(x)}{n} \in \mathbb{R}$ donc $e = \frac{\varphi(x)}{n} u \in \operatorname{Vect}(u)$
. On a :

$$\varphi(\tilde{e}) = \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{n} u \right)$$
$$= \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{n} \varphi(u)$$

Or $\varphi(u) = n$
Donc $\varphi(\tilde{e}) = 0$ Donc $\tilde{e} \in \operatorname{Ker}\varphi = G$.

3. Par definition $\{u\}$ est une famille generatrice de F. Comme $u \neq 0$ cette famille est libre, C'est donc une base de F.
Donc $\dim F = 1$