Mathématiques pour économistes

L1 économie

Mickael Beaud

Maître de conférences des universités (MCU)
Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)
Centre d'Economie de l'Environnement de Montpellier (CEE-M)
(Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr)

January 6, 2025

Thème 4: Statique comparative

Statique comparative

- Dans les modèles économiques, il existe deux types de variables, les variables **endogènes** et les variables **exogènes**.
- Les variables **endogènes** sont calculées à l'intérieur du modèle, qui est conçu dans le but d'expliquer leur valeur.
- Les variables **exogènes** prennent une valeur qui est déterminé à l'extérieur du modèle.

Statique comparative

- Les solutions d'un modèle économique (i.e. à l'**équilibre du modèle**) sont les valeurs des variables **endogènes** qui dépendent typiquement des valeurs des variables **exogènes**.
- Une part importante de l'analyse économique consiste à déterminer l'impact d'un changement des variables **exogènes** sur l'**équilibre du modèle**, c'est à dire sur les valeurs d'équilibre des variables **endogènes**.

Statique comparative

- L'exercice consistant à comparer l'**équilibre** d'un modèle économique avant et après une modification des variables **exogènes** constitue ce que l'on appelle la **statique comparative**.
- Le **Thème 4** débute avec quatre modèles économiques simples qui illustrent l'exercice de **statique comparative**.

- On note Y la **valeur monétaire** de l'**offre agrégée de biens et services** dans l'économie, i.e. le **revenu national**.
- On parle de **revenu national** dans la mesure où Y représente le revenu tiré de la vente des biens et services produits par les entreprises, et que ce revenu est redistribué aux ménages (travailleurs et capitalistes).

- Dans le **modèle macroéconomique Keynésien** simple (on ignore la dépense publique et le commerce extérieur), la **demande agrégée de biens et services** dépend de deux éléments:
  - La **consommation agrégée de biens et services** des ménages, notée C.
  - La **demande de biens d'investissement** des entreprises, notée I.

- L'investissement I est supposé **exogène**, tandis que la consommation C est supposée **endogène**, déterminée par la **fonction de consommation**:

$$C = cY, \quad 0 < c < 1$$

où c est un paramètre représentant la **propension marginale à consommer**.

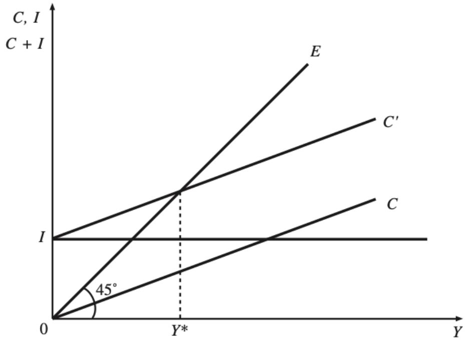
- La **condition d'équilibre** du modèle (Revenu = dépense) s'écrit

$$Y = C + I$$

- En substituant la **fonction de consommation** dans la **condition d'équilibre**, on obtient

$$Y^* = \frac{I}{1 - c}$$

- L'**équilibre** du modèle est illustré **Figure 1**.
- On a représenté la **fonction de consommation** $C = cY$ par la droite $(0C')$ et l'**investissement exogène** I par la droite horizontale passant par I.
- La **demande agrégée** $C + I = cY + I$ est représentée par la droite (IC').
- Le **revenu d'équilibre** Y^* correspond au point d'intersection entre la droite à 45° notée $(0E)$ et la droite (IC').
- En effet, en ce point d'intersection, on a $Y = C + I$, **le revenu égalise la dépense**.


C, I
C + I
E
C'
C
I
45°
0
Y*
Y

- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment le revenu national évolue lorsque l'investissement varie**?
- Pour ce faire, on dispose de la **fonction implicite**

$$f\left(Y^{*}, I\right) = Y^{*}\left[1-c\right] - I = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$Y^{*} = \frac{I}{1-c}$$

- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

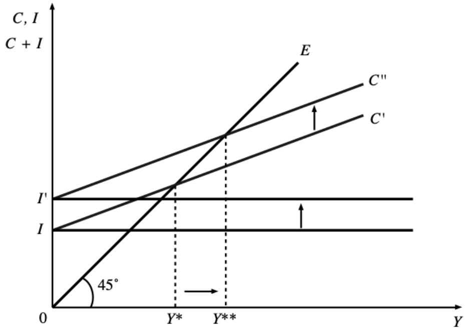
$$\frac{dY^*}{dI} = -\frac{f_I}{f_{Y^*}} = \frac{1}{1-c} > 1$$

- Si l'investissement augmente d'un montant $dI > 0$, alors le **revenu national** augmente d'un montant $\frac{1}{1-c}dI$.
- Le terme $\frac{1}{1-c}$ est le **multiplicateur Keynésien**: le **revenu national** n'augmente pas simplement de dI, mais d'un montant **supérieur** à dI ($\frac{1}{1-c}dI > dI$ car $0 < c < 1$).
- On observe également que cet **effet multiplicateur** est d'autant plus fort que la **propension marginale à consommer** est forte.

- L'exercice de **statique comparative** est illustré **Figure 2**.
- L'**investissement** passe de I à I'. La droite (IC') se déplace parallèlement à elle-même vers le haut et devient $(I'C'')$.
- Le **nouveau point d'équilibre** Y^{**}, où **le revenu égalise la dépense**, est obtenu à l'intersection entre la droite $(0E)$ et la droite $(I'C'')$.

Introduction à la statique comparative

Figure 2



- La quantité demandée d'un bien est donnée par la **fonction de demande linéaire**

$$D\left(p\right) = a - bp + cy, \quad a, b, c > 0$$

où p est le **prix unitaire** du bien et y est le **revenu agrégé** des consommateurs.

- La quantité offerte du bien est donné par la **fonction d'offre linéaire**

$$S\left(p\right) = \alpha + \beta p, \quad \alpha, \beta > 0; \alpha < a + cy$$

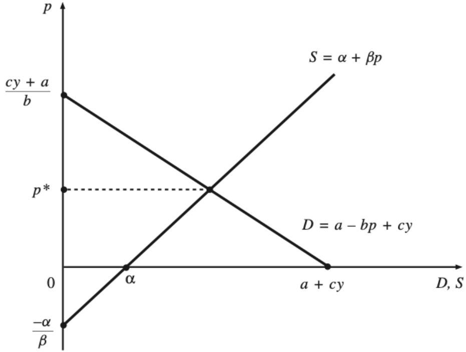
- L'**équilibre** sur le marché du bien est réalisé lorsque l'**offre égalise la demande**:

$$S\left(p^*\right) = D\left(p^*\right) \Leftrightarrow \alpha + \beta p^* = a - bp^* + cy$$

- Le **prix d'équilibre** est donc

$$p^* = \frac{a - \alpha + cy}{b + \beta}$$

- La solution est illustrée **Figure 3**.


p
$S = \alpha + \beta p$
$\frac{cy + a}{b}$
p^*
$D = a - bp + cy$
0
α
$a + cy$
D, S
$\frac{-\alpha}{\beta}$

- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment le prix d'équilibre du marché est affecté lorsque le revenu des consommateurs varie**?
- On dispose de la **fonction implicite**

$$f\left(p^{*}, y\right) = a - \alpha - [b + \beta]\, p^{*} + cy = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$p^{*} = \frac{a - \alpha}{b + \beta} + \frac{c}{b + \beta} y$$

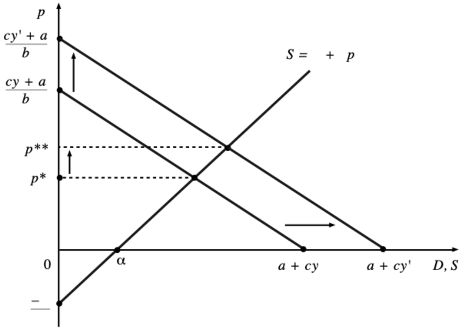
- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

$$\frac{dp^{*}}{dy} = -\frac{f_y}{f_{p^{*}}} = \frac{c}{b + \beta} > 0$$

- Une **hausse du revenu** des consommateurs dy conduit à une **hausse du prix d'équilibre** du marché d'un montant $\frac{c}{b+\beta}dy$.
- La **hausse du prix d'équilibre** est
    - d'autant plus **forte** que c (l'impact marginal du revenu sur la demande) est **fort**.
    - d'autant plus **faible** que b et β (pentes en valeur absolue de D et S en fonction du prix) sont **fortes**.

- L'exercice de **statique comparative** est illustré **Figure 4**.
- La hausse du revenu des consommateurs, qui passe de y à y', déplace la demande parallèlement à elle-même vers le haut ou la droite.
- On observe ainsi que le nouvel équilibre du marché (après la hausse du revenu des consommateurs) est atteint avec un prix p^{**} plus élevé qu'initialement ($p^{**} > p^{*}$).

Figure 4



- Une entreprise en situation de **monopole** sur le marché d'un bien fait face à la **fonction de demande** (inverse) **linéaire**

$$p\left(q\right)=a-bq,\quad a,b>0$$

- Sa **fonction de coût total** est

$$C\left(q\right)=cq^2,\quad c>0$$

- Supposons que l'Etat décide d'imposer une **taxe à l'unité** $t > 0$ sur la vente du bien.
- La **fonction de profit du monopole** est

$$\pi(q, t) = [p(q) - t]\, q - C(q) = [a - t]\, q - [b + c]\, q^2$$

- Pour une **solution intérieure** (i.e. $q^* > 0$), la **condition du premier ordre** nécessaire à la **maximisation du profit** est

$$\pi_q(q^*, t) = a - t - 2[b + c]\, q^* = 0$$

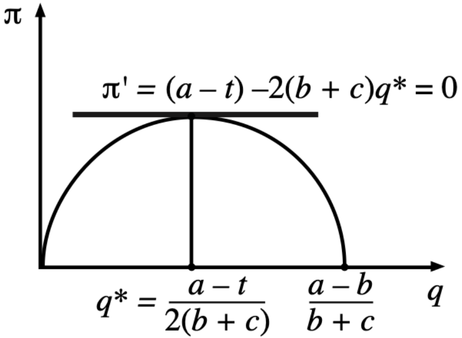
- La **solution** est donc

$$q^* = \frac{a - t}{2[b + c]}$$

- La **maximisation du profit du monopole** est illustrée **Figure 5**.
- Noter que la **solution en coin** $q^* = 0$ est écartée si et seulement si $t < a$.
- En effet, nous avons vu **Section 2.3** que si q^* est une **solution en coin à gauche**, alors on doit avoir $\pi_q(0, t) \leq 0$, soit $t \geq a$.
- On peut aussi l'observer dans l'équation de la solution $q^* = \frac{a-t}{2[b+c]}$, où $q^* > 0$ si et seulement si $t < a$.

- De plus, il s'agit d'un **unique maximum global** car la **fonction de profit** est **strictement concave** ($\pi_{qq}(q,t) = -2[b+c] < 0$).
- En effet, la **fonction de demande linéaire** et la **fonction de coût total strictement convexe** ($C''(q) = 2c > 0$) conduisent à une **fonction de profit strictement concave.**

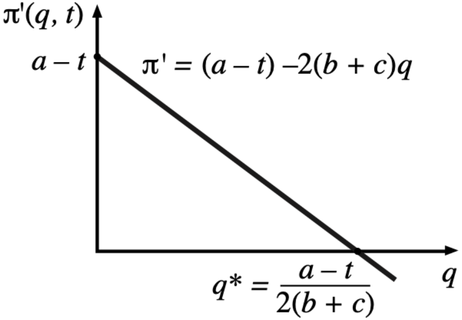
Figure 5



- La **Figure 6** illustre la **fonction de profit marginal** $\pi_q(q,t)$.
- Elle est **linéaire** et **strictement décroissante** (la **fonction de profit** est **strictement concave**).
- Elle coupe l'axe des abscisse au point solution q^* où la **condition du premier ordre** est vérifiée $\pi_q(q^*,t)=0$.

Introduction à la statique comparative

Figure 6



- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment la quantité offerte par le monopole est affectée lorsque la taxe varie**?
- On dispose de la **fonction implicite**

$$f\left(q^*, t\right) = a - t - 2\left[b + c\right] q^* = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$q^* = \frac{a - t}{2\left[b + c\right]}$$

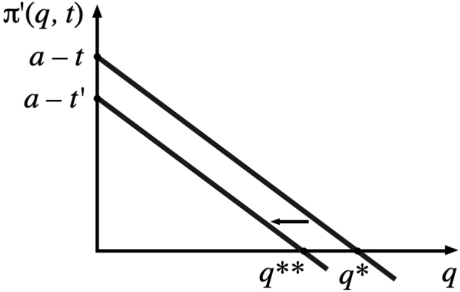
- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

$$\frac{dq^*}{dt} = -\frac{f_t}{f_q} = -\frac{1}{2\left[b + c\right]} < 0$$

- Une **hausse de la taxe** $dt > 0$ induit une **baisse de la production** d'un montant $\frac{1}{2[b+c]}dt$.
- Cette **baisse** est d'autant plus **faible** que b et c sont **forts** (i.e. si les courbes de demande et de coût marginal sont très pentues).

- Le résultat de **statique comparative** est illustré **Figure 7**, en terme de la **fonction de profit marginal**.
- La taxe augmente de t à t', la **fonction de profit marginal** se déplace parallèlement à elle-même vers le bas.
- Comme sur la **Figure 6**, elle coupe l'axe des abscisse au nouveau point solution $q^{**} < q^{*}$, où la **condition du premier ordre** est vérifiée $\pi_q\left(q^{**}, t'\right) = 0$.

Figure 7



- On suppose qu'un planificateur peut contrôler, au niveau **macroéconomique**, l'allocation des ressources (i.e. le **revenu national**) entre **consommation** et **investissement**.
- Pour simplifier, on considère une économie à **deux périodes** d'existence.
- Le planificateur cherche à **maximiser la fonction d'utilité** (représentant le **bien-être de l'ensemble des consommateurs** sur les deux périodes)

$$u\left(C_1, C_2\right) = \ln C_1 + \beta \ln C_2, \quad 0 < \beta < 1$$

où C_t représente la **consommation agrégée** à la date $t = 1, 2$, et β représente le **facteur d'actualisation**.

- Il existe un niveau de **revenu national** donné (i.e. **exogène**), noté Y_1^0, en période 1, qui est alloué entre **consommation** et **investissement**:

$$Y_1^0 = C_1 + I$$

- L'**investissement** réalisé en première période génère un niveau de **revenu national** en seconde période (qui est entièrement consommé car il n'y a pas de période 3) donné par

$$C_2 = I^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

qui est une fonction **croissante** et **strictement concave** de l'**investissement** de première période.

- En substituant $C_1 = Y_1^0 - I$ et $C_2 = I^\alpha$ dans la **fonction objectif** du planificateur, le problème se résume au choix de I (l'**investissement** de première période):

$$
\begin{aligned}
v(I) &= u\left(Y_1^0 - I, I^\alpha\right) = \ln\left(Y_1^0 - I\right) + \beta \ln\left(I^\alpha\right) \\
&= \ln\left(Y_1^0 - I\right) + \alpha\beta \ln(I)
\end{aligned}
$$

- La **condition nécessaire du premier ordre** est

$$
v'(I^*) = \frac{-1}{Y_1^0 - I^*} + \frac{\alpha\beta}{I^*} = 0
$$

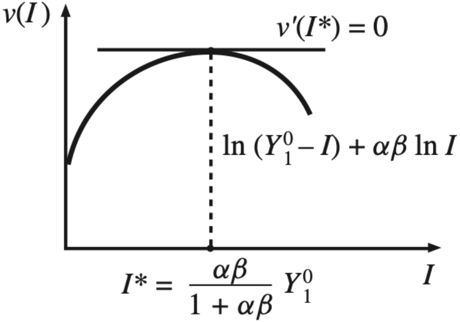
- Ce qui implique

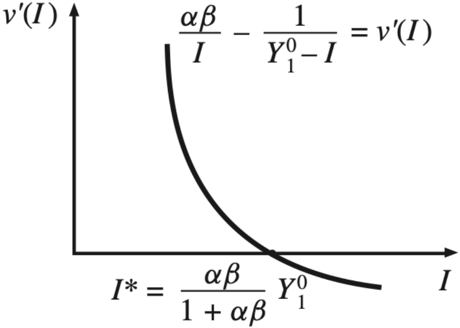
$$
I^* = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} Y_1^0
$$

- La solution est donc d'allouer le **revenu national** (disponible en première période) en proportion $\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$ pour l'**investissement** et en proportion $1-\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}=\frac{1}{1+\alpha\beta}$ pour la **consommation** de première période.
- Le choix de l'**allocation optimale** du **revenu national** en première période entre **consommation** et **investissement** est illustré **Figure 8** et **Figure 9**.

- Sur la **Figure 8,** on observe que la **fonction d'utilité** du **planificateur** est **strictement concave**.
  - La solution donnée par les **conditions du premier ordre** est donc un **unique maximum global**.
- Sur la **Figure 9**, on observe que la **fonction d'utilité marginale** $v'(I)$ est **strictement décroissante**.
  - L'**optimum** est atteint lorsqu'elle rencontre l'axe des abscisses où la **condition du premier ordre** est vérifiée, i.e. $v'(I^*) = 0$.

Figure 8


$v(I)$
$v'(I^*) = 0$
$\ln(Y_1^0 - I) + \alpha\beta \ln I$
I
$I^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} Y_1^0$


$v'(I)$
$\frac{\alpha\beta}{I} - \frac{1}{Y_1^0 - I} = v'(I)$
$I^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} Y_1^0$
I

- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment l'allocation optimale entre consommation et investissement est affectée lorsque le revenu national disponible en première période varie**?
- On dispose de la **fonction implicite**

$$f\left(I^*, Y_1^0\right) = \alpha\beta Y_1^0 - [1+\alpha\beta]\, I^* = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$I^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} Y_1^0$$

- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

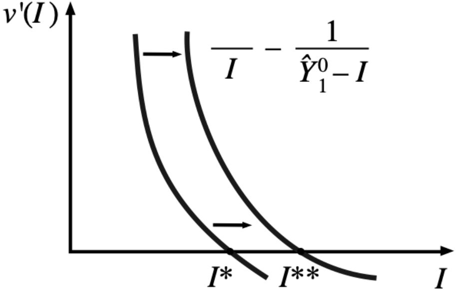
$$\frac{dI^*}{dY_1^0} = -\frac{f_{Y_1^0}}{f_{I^*}} = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} > 0$$

- Une **hausse du revenu national disponible en première période** $dY_1^0 > 0$ induit une **hausse de l'investissement** d'un montant $\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} dY_1^0$ (et une hausse de la consommation de première période $dC_1^* = dY_1^0 - dI^* = \frac{1}{1+\alpha\beta} dY_1^0$).
  - Cette **hausse** est d'autant plus forte que α et β sont **forts** (i.e. si l'investissement est très productif et le facteur d'actualisation élevé) car $\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$ est croissant avec α et β.

- Le résultat de **statique comparative** est illustré **Figure 10**, en terme de la **fonction d'utilité marginale**.
- Le **revenu national disponible en première période** augmente de Y_1^0 à $\widehat{Y}_1^0$, la **fonction d'utilité marginale** se déplace parallèlement à elle-même vers le haut ou la droite.
- Comme sur la **Figure 9**, elle coupe l'axe des abscisse au nouveau point solution $I^{**} > I^*$, où la **condition du premier ordre** est vérifiée $v'\left(I^{**}, \widehat{Y}_1^0\right) = 0$.

Introduction à la statique comparative

Figure 10



- Au regard de ces quatre exemples, la **statique comparative** consiste, à partir d'une équation fondamentale caractérisant l'**équilibre du modèle**, reliant les variables **endogènes**, les variables **exogènes** et les **paramètres** du modèle sous la forme d'une **fonction implicite**, à exprimer les variables **endogènes** en fonction des variables **exogènes** et des **paramètres** du modèle, sous la forme d'une **fonction explicite**.
- Puis en différenciant cette fonction par rapport aux variables **exogènes**, on détermine l'**impact d'un changement** des variables **exogènes** sur les valeurs des variables **endogènes** à l'équilibre.

Introduction à la statique comparative

- La **statique comparative** constitue une méthode fondamentale en **analyse économique**.
- Bien que l'on puisse menée l'analyse graphiquement, il est utile de procéder de manière **analytique** car cela permet de déterminer précisément **comment les paramètres du modèle impactent la taille des effets identifiés** (comme nous l'avons fait dans les exemples présentés).

Introduction à la statique comparative

- Il existe au moins deux directions dans lesquelles l'approche adoptée au travers des exemples précédent doit être généralisée.
- La première est de relâcher les hypothèses (fortes) concernant les **formes fonctionnelles** particulières des fonctions utilisées dans le modèle économique (e.g. demande, offre, coût, utilité).
- Nous allons voir comment étendre la méthode lorsque les relations entre les variables économiques s'expriment sous la forme d'équations, sans préciser leurs **formes fonctionnelles** particulières, mais en faisant seulement des hypothèses sur leur **forme générale** (e.g. croissance, décroissance, concavité, convexité).

- La seconde direction est d'étendre l'analyse aux modèles économiques comprenant **plusieurs variables endogènes** et **plusieurs variables exogènes** (alors que dans les exemples étudiés, il y avait seulement une variable de chaque type).

Thème 4: Statique comparative

- Etendons progressivement l'analyse de **statique comparative** développée **Section 4.1**.
- Supposons, comme précédemment, qu'il existe **une variable endogène** et **une variable exogène**, mais sans faire l'hypothèse (restrictive) de **formes fonctionnelles** particulières pour les fonctions considérées.

Analyse de statique comparative générale

- On note x la variable **endogène** et on note α la variable **exogène**.
- On suppose que l'on étudie un modèle économique permettant de déterminer la valeur de x en fonction de α (e.g. le prix d'équilibre du marché en fonction du revenu des consommateurs).

Introduction à la statique comparative

- Formellement, la résolution du modèle économique consiste à trouver la **solution d'une équation d'équilibre** de la forme

$$f\left(x^*, \alpha\right) = 0$$

  où x^* est la valeur de la variable **endogène** à l'équilibre.
- L'interprétation de cette équation dépend du modèle économique particulier que l'on étudie (e.g. offre=demande, condition du premier ordre nécessaire à la maximisation du profit, etc.).

Analyse de statique comparative générale

- La **solution de l'équation d'équilibre** est de la forme x^* fonction de α (e.g. le prix d'équilibre du marché en fonction du revenu des consommateurs).
- Si la fonction f est différentiable, alors on peut déterminer l'impact d'une variation de α sur x^* en calculant $\frac{dx^*}{d\alpha}$.
- Le but de cette analyse de **statique comparative** est d'obtenir le plus d'information possible sur le terme $\frac{dx^*}{d\alpha}$, notamment de déterminer son **signe** et les éléments qui influence sa **magnitude** (e.g. l'impact d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché).

Analyse de statique comparative générale

- La **différentielle totale** de l'**équation d'équilibre** donne

$$df\left(x^*, \alpha\right) = \frac{\partial f\left(x^*, \alpha\right)}{\partial x} dx^* + \frac{\partial f\left(x^*, \alpha\right)}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

soit

$$\frac{dx^*}{d\alpha} = -\frac{f_\alpha\left(x^*, \alpha\right)}{f_x\left(x^*, \alpha\right)}$$

- Remarquer que ceci est simplement l'application du **théorème des fonctions implicites** (**Théorème 11**, **Section 1.3**). Cette approche nécessite donc d'avoir $f_x \neq 0$.
- De plus, noter que les **dérivées partielles** sont évaluées au point solution $\left(x^*, \alpha\right)$. Ce sont donc des **nombres**.

Example (1)

Soit la fonction implicite

$$f\left(x^*, \alpha\right) = \ln x^* - 2\alpha^2 = 0$$

Déterminer le la valeur de $\frac{dx^*}{d\alpha}$.

- En différenciant comme ci-dessus, ou en appliquant directement le **théorème des fonctions implicites** (**Théorème 11**, **Section 1.3**), on obtient

$$\frac{dx^*}{d\alpha} = -\frac{f_\alpha\left(x^*, \alpha\right)}{f_x\left(x^*, \alpha\right)} = -\frac{-4\alpha}{\frac{1}{x^*}} = 4\alpha x^*$$

- On note $D(p, y)$ la **fonction de demande** du marché en fonction du prix du bien p et du revenu agrégé des consommateurs y (comme dans le premier exemple de la **Section 4.1**, mais sans préciser sa forme fonctionnelle particulière).
- On note $S(p)$ la **fonction d'offre** du marché (encore une fois, sans préciser sa forme fonctionnelle particulière).

- Ici, p correspond à la variable **endogène** (x ci-dessus) et y correspond à la variable **exogène** (α ci-dessus).
- La valeur du **prix d'équilibre** p^* est donnée par l'égalisation de l'offre et de la demande (i.e. l'**équation d'équilibre**), soit

$$f(p^*, y) = D(p^*, y) - S(p^*) = 0$$

- Dans ce modèle, la **fonction implicite** f représente donc la **demande excédentaire** (qui doit être nulle à l'équilibre du marché).

- On obtient donc

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{f_y\left(p^*, y\right)}{f_p\left(p^*, y\right)} = -\frac{D_y\left(p^*, y\right)}{D_p\left(p^*, y\right) - S_p\left(p^*\right)}$$

ou plus simplement (en gardant à l'esprit que les **dérivées partielles** sont évaluées au point solution):

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{D_y}{D_p - S_p}$$

- Supposons que $D_p < 0$ (le bien n'est pas un **bien Giffen**) et $S_p > 0$. Alors, $\frac{dp^*}{dy}$ est du signe de D_y.
  - Si $D_y > 0$ (**bien normal**) alors $\frac{dp^*}{dy} > 0$.
  - Si $D_y < 0$ (**bien inférieur**) alors $\frac{dp^*}{dy} < 0$.
- Supposons que $D_p > 0$ (**bien Giffen**). Le bien est donc nécessairement un **bien inférieur** avec $D_y < 0$. Alors, $\frac{dp^*}{dy}$ est du signe de $D_p - S_p$.
  - Si $D_p - S_p > 0$ alors $\frac{dp^*}{dy} > 0$.
  - Si $D_p - S_p < 0$ alors $\frac{dp^*}{dy} < 0$.

- En général, l'analyse de **statique comparative** nous apprend que tout est possible (c'est plutôt la règle que l'exception) étant donné le peu d'hypothèses de base concernant la forme des fonctions (puisque nous n'avons pas précisé leur **forme fonctionnelle** particulière).
- Elle nous donne **tous les cas logiquement possibles**, et exclut donc ceux qui ne le sont pas.
- Mais cela ne signifie pas que l'analyse de **statique comparative** est inutile, au contraire.
- Elle permet de déterminer précisément quelles hypothèses concernant la forme des fonctions conduisent à un effet particulier ($\frac{dp^*}{dy} > 0$ ou $\frac{dp^*}{dy} < 0$ dans l'exemple ci-dessus).

- Deux interprétations de la méthode sont possibles.
- D'un côté, l'analyse de **statique comparative** peut permettre d'**expliquer un phénomène observé** (e.g. $\frac{dp^*}{dy} > 0$ ou $\frac{dp^*}{dy} < 0$ par exemple) par les hypothèses faites sur la forme des fonctions à l'oeuvre (e.g. signes de D_p, D_y et S_p).
- D'un autre côté, elle peut permettre de **faire des prédictions testables** (e.g. $\frac{dp^*}{dy} > 0$ ou $\frac{dp^*}{dy} < 0$) à partir des hypothèses empiriquement fondées sur la forme des fonctions à l'oeuvre (e.g. signes de D_p, D_y et S_p).

- Nous venons d'étendre l'analyse de **statique comparative** aux cas où on ne précise pas la **forme fonctionnelle** particulière des fonctions du modèle économique étudié, en nous contentant de faire des hypothèses générales concernant le signe des dérivées partielles de ces fonctions.
- Nous allons maintenant généraliser un peu plus l'approche de **statique comparative** en étudiant les cas où il existe **plusieurs variables endogènes** et **plusieurs variables exogènes**.

- Considérons un modèle économique avec **deux variables endogènes**, notées x_1 et x_2, et **deux variables exogènes**, notées α_1 et α_2.
- Dans ce contexte, les **équations d'équilibre** (e.g. **conditions du premier ordre** nécessaires à la maximisation du profit) sont

$$\begin{aligned} f^1\left(x_1^*, x_2^*, \alpha_1, \alpha_2\right) &= 0 \\ f^2\left(x_1^*, x_2^*, \alpha_1, \alpha_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

- Les solutions sont de la forme x_1^* fonction de α_1 et de α_2, et x_2^* fonction de α_1 et de α_2.
- L'objectif de l'analyse de **statique comparative** est alors de déterminer, si possible, les **signes** des quatre dérivées partielles $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}$, $i, j = 1, 2$.

- En dérivant les **équations d'équilibre** rapport à α_1, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_1} &= 0 \\
\frac{\partial f^2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^2}{\partial \alpha_1} &= 0
\end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$\begin{aligned}
f_1^1\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^1\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} &= -f_{\alpha_1}^1 \\
f_1^2\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^2\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} &= -f_{\alpha_1}^2
\end{aligned}$$

- Comme les **dérivées partielles** de f^1 et de f^2 de sont toutes évaluées au point solution, se sont des **nombres**. Les deux équations ci-dessus forment ainsi un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial \alpha_1 \\ \partial x_2^* / \partial \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_1}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix} = f_1^1 f_2^2 - f_1^2 f_2^1 \neq 0$$

- Supposons que ce soit le cas.

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} = \frac{\begin{vmatrix} -f_{\alpha_1}^1 & f_2^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 & f_2^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\left[f_{\alpha_1}^1 f_2^2 - f_{\alpha_1}^2 f_2^1\right]}{D}$$

et

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_1}^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_1}^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\left[f_1^1 f_{\alpha_1}^2 - f_1^2 f_{\alpha_1}^1\right]}{D}$$

- Pour trouver le signe de ces deux dérivées, nous devons connaitre le signe de toutes les dérivées partielles de f^1 et de f^2.
- De plus, comme les numérateurs et les dénominateurs ci-dessus contiennent des différences entre deux termes, nous devons connaître, ou faire des hypothèses, concernant la taille de ces termes.

- Une analyse symétrique permet d'identifier les deux autres dérivées partielles par rapport à α_2 :

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_2} = \frac{\begin{vmatrix} -f_{\alpha_2}^1 & f_2^1 \\ -f_{\alpha_2}^2 & f_2^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\left[f_{\alpha_2}^1 f_2^2 - f_{\alpha_2}^2 f_2^1\right]}{D}$$

et

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_2} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_2}^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_2}^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\left[f_1^1 f_{\alpha_2}^2 - f_1^2 f_{\alpha_2}^1\right]}{D}$$

- Considérons un modèle **IS-LM** dans lequel la **dépense agrégée** E est une fonction du **revenu agrégé** Y et du **taux d'intérêt** R.
- De plus, on suppose que E incorpore un élément **exogène** $\overline{E}$:

$$E = \overline{E} + E\left(Y, R\right), \quad 0 < E_Y < 1,\, E_R < 0$$

où les signes des dérivées partielles indiquent que E augmente lorsque Y augmente ($E_Y > 0$), et diminue lorsque R augmente ($E_R < 0$).

- L'**équilibre** sur le marché des biens et services est atteint lorsque l'offre égalise la demande:

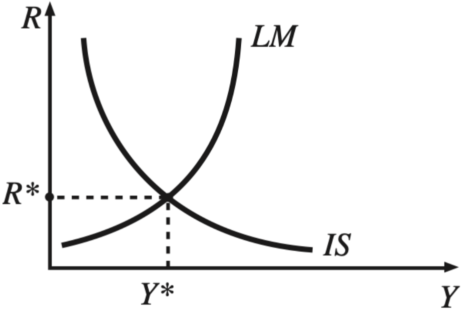
$$Y = \overline{E} + E\left(Y, R\right)$$

- Dans ce modèle, il existe **deux variables endogènes**, Y et R, et **une variable exogène** $\overline{E}$.
- Comme nous ne disposons que d'**une équation d'équilibre**, on ne peut pas résoudre le modèle (i.e. exprimer Y et R en fonction de $\overline{E}$).

- La **condition d'équilibre** sur le marché des biens et services elle-même ne permet pas de calculer une valeur unique du revenu Y et du taux d'intérêt R.
- Toutefois, pour une valeur donnée de R, on peut calculer la valeur de Y qui égalise l'offre et la demande agrégées de biens et services.
- De même, pour une valeur donnée de Y, on peut calculer la valeur de R qui égalise l'offre et la demande agrégées de biens et services.
- Ceci est illustré par la **courbe IS** représentée **Figure 11**.

Analyse de statique comparative générale

Figure 11



- La **courbe IS** est **décroissante**. En effet, étant donné la **dépense exogène** $\overline{E}$, l'**équation d'équilibre** donne une **relation implicite** entre Y et R:

$$f^{IS}(Y, R) = Y - \overline{E} - E(Y, R) = 0$$

- D'après le **théorème des fonctions implicites**, on a

$$\frac{dR}{dY} = -\frac{f_Y^{IS}}{f_R^{IS}} = \frac{1 - E_Y}{E_R} < 0$$

- La **décroissance** de la **courbe IS** découle directement des hypothèses faites sur les dérivées partielles, $0 < E_Y < 1$ et $E_R < 0$.

- De plus, une hausse de la **dépense exogène** $\overline{E}$ déplace la **courbe IS** vers le haut.
- En effet, *ceteris paribus*, i.e. avec Y fixé, la relation entre les variations de $\overline{E}$ et R est donnée par

$$\frac{dR}{d\overline{E}} = -\frac{f^{IS}_{\overline{E}}}{f^{IS}_{R}} = -\frac{1}{E_R} > 0$$

- La **courbe LM** représente l'**équilibre** sur le **marché de la monnaie**.
- La **demande de monnaie** L est **croissante** avec Y, et **décroissante** avec R:

$$L = L\left(Y, R\right), \quad L_Y > 0,\ L_R < 0$$

- L'**offre de monnaie** $\overline{M}$ est supposée **exogène**.

- A l'**équilibre** sur le marché de la monnaie, la **demande de monnaie égalise l'offre de monnaie** :

$$f^{LM}(Y,R) = L(Y,R) - \overline{M} = 0$$

- Cette **seconde équation d'équilibre** donne une **seconde relation implicite** entre Y et R.

- Comme précédemment, pour une valeur donnée de R, on peut calculer la valeur de Y qui égalise l'offre et la demande sur le marché de la monnaie.
- De même, pour une valeur donnée de Y, on peut calculer la valeur de R qui égalise l'offre et la demande sur le marché de la monnaie.
- Cette relation est représentée par la **courbe LM** sur la **Figure 11**.

- D'après le **théorème des fonctions implicites**, on a

$$\frac{dR}{dY} = -\frac{f_Y^{LM}}{f_R^{LM}} = -\frac{L_Y}{L_R} > 0$$

- La **croissance** de la **courbe LM** découle directement des hypothèses faites sur les dérivées partielles, $L_Y > 0$ et $L_R < 0$.

- De plus, une hausse de l'**offre de monnaie exogène** $\overline{M}$ déplace la **courbe LM** vers le bas. En effet, *ceteris paribus*, i.e. avec Y fixé, la relation entre $\overline{M}$ et R est

$$\frac{dR}{d\overline{M}} = -\frac{f^{LM}_{\overline{M}}}{f^{LM}_{R}} = \frac{1}{L_R} < 0$$

- Ainsi, une hausse de l'offre de monnaie $\overline{M}$ réduit le taux d'intérêt R nécessaire à l'égalisation de l'offre et la demande de monnaie, pour chaque niveau de revenu Y.

- En combinant l'**équation d'équilibre sur le marché des biens et services (IS)** et **l'équation d'équilibre sur le marché de la monnaie** (**LM**), on obtient un système de deux équations à deux inconnues (Y et R), que l'on peut résoudre:

$$\begin{aligned} f^{IS}(Y^*, R^*) &= Y^* - \overline{E} - E(Y^*, R^*) = 0 \\ f^{LM}(Y^*, R^*) &= L(Y^*, R^*) - \overline{M} = 0 \end{aligned}$$

- Ainsi, on obtient l'**équilibre général du modèle IS-LM**, i.e. le couple **revenu** Y^* et **taux d'intérêt** R^*.
- C'est le point d'intersection entre la **courbe IS** et la **courbe LM** sur la **Figure 11**.

- En comparaison de l'analyse décontextualisée menée plus haut, les fonctions f^{IS} et f^{LM} correspondent à f^1 et f^2, les variables endogènes Y et R correspondent à x_1 et x_2 , et les variables exogènes $\overline{E}$ et $\overline{M}$ correspondent à α_1 et α_2.
- Dans l'analyse de **statique comparative** du **modèle IS-LM**, on cherche à déterminer l'impact des variations de la dépense exogène $\overline{E}$ et de l'offre de monnaie exogène $\overline{M}$ sur le couple revenu Y^* et taux d'intérêt R^* d'équilibre.

- D'après l'analyse précédente, l'impact d'une variation de la **dépense exogène** $\overline{E}$ vérifie

$$\begin{bmatrix} f_Y^{IS} & f_R^{IS} \\ f_Y^{LM} & f_R^{LM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial Y^*/\partial \overline{E} \\ \partial R^*/\partial \overline{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\overline{E}}^{IS} \\ -f_{\overline{E}}^{LM} \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 1-E_Y & -E_R \\ L_Y & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial Y^*/\partial \overline{E} \\ \partial R^*/\partial \overline{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = \begin{vmatrix} 1 - E_Y & -E_R \\ L_Y & L_R \end{vmatrix} = [1 - E_Y] \, L_R + L_Y E_R \neq 0$$

- D'après les hypothèses concernant les dérivées partielles $0 < E_Y < 1$, $E_R < 0$, $L_Y > 0$ et $L_R < 0$, on a clairement $D < 0$.

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \overline{E}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -E_R \\ 0 & L_R \end{vmatrix}}{D} = \frac{L_R}{D} > 0$$

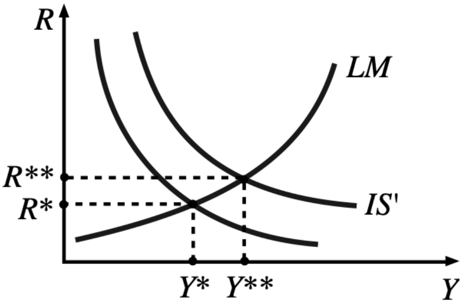
et

$$\frac{\partial R^*}{\partial \overline{E}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - E_Y & 1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-L_Y}{D} > 0$$

- Le modèle IS-LM permet de conclure qu'une **hausse de la dépense exogène** (e.g. hausse de la demande de biens d'investissement), conduit à une **hausse du revenu** et une **hausse du taux d'intérêt**.
- La hausse de la dépense conduit à une hausse (directe) du revenu. Cette hausse du revenu augmente la demande de monnaie, et conduit à une hausse (indirecte) du taux d'intérêt à offre de monnaie fixée.
- Ceci est illustré **Figure 12**.

Analyse de statique comparative générale

Figure 12



Analyse de statique comparative générale

- Même si le modèle reste assez général, seules les hypothèses concernant le signe des dérivées partielles des fonctions $E(Y, R)$ et $L(Y, R)$, et l'hypothèse $E_Y < 1$, permettent de conclure sans ambiguité l'impact qualitatif d'une hausse de l'investissement sur l'équilibre macroéconomique.

- Une analyse de statique comparative similaire peut être menée en envisageant une variation de l'offre de monnaie $\overline{M}$. Encore une fois, on peut montrer qu'on obtient sans ambiguité, à partir des hypothèses concernant le signe des dérivées partielles des fonctions $E(Y, R)$ et $L(Y, R)$, et l'hypothèse $E_Y < 1$, qu'une **hausse de l'offre de monnaie** $\overline{M}$ conduit à une **baisse du taux d'intérêt** R et une **hausse du revenu** Y.

- Une entreprise vend sa production sur un marché **concurrentiel** et fait donc face au **prix de marché** p.
- Elle emploi des travailleurs sur un marché du travail concurrentiel au taux de salaire w, et emprunte sur un marché du capital concurrentiel au taux r.
- La technologie de l'entreprise est représentée par une fonction de production **strictement concave** $f(L, K)$.

- La **fonction de profit** que l'entreprise cherche à maximiser est

$$\pi = pf\left(L, K\right) - wL - rK$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned} \pi_L &= pf_L\left(L^*, K^*\right) - w = 0 \\ \pi_K &= pf_K\left(L^*, K^*\right) - r = 0 \end{aligned}$$

- L'exercice de **statique comparative** consiste ici à déterminer l'impact d'une variation des prix des facteurs w et r (variables **exogènes**) sur les demandes optimales de facteurs L^* et K^* (variables **endogènes**).
- En dérivant les **conditions du premier ordre** par rapport à w on obtient le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{bmatrix} pf_{LL} & pf_{LK} \\ pf_{KL} & pf_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial L^*/\partial w \\ \partial K^*/\partial w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} pf_{LL} & pf_{LK} \\ pf_{KL} & pf_{KK} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{KL} & f_{KK} \end{vmatrix} \\ &= p^2 \left| H \right| = p^2 \left[f_{LL} f_{KK} - f_{LK}^2 \right] \neq 0 \end{aligned}$$

- Si les **conditions du second ordre** du **Théorème 3 Section 3.2** pour un **maximum** sont vérifiées, alors la **matrice Hessienne** de f vérifie $\left| H \right| > 0$ et donc $D > 0$.

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & pf_{LK} \\ 0 & pf_{KK} \end{vmatrix}}{D} = \frac{pf_{KK}}{D} < 0$$

et

$$\frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} pf_{LL} & 1 \\ pf_{KL} & 0 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{pf_{KL}}{D}$$

- Le signe négatif de $\frac{\partial L^*}{\partial w}$ découle du fait que $f_{KK} < 0$ car la **fonction de production** f est **strictement concave**. Une **hausse du taux de salaire réduit la demande optimale de travail**.
- Le signe de $\frac{\partial K^*}{\partial w}$ dépend du signe de f_{KL}, i.e. l'effet d'une variation de la quantité de travail sur la productivité marginale du capital. Si l'on fait l'hypothèse que $f_{KL} > 0$ (ce qui n'est pas nécessairement le cas), alors une **hausse du taux de salaire réduit la demande optimale de capital**.

- Lorsque l'on envisage le **problème d'optimisation contraint** le plus simple, avec **deux variables** et **une contrainte,** les solutions doivent vérifier trois **conditions du premier ordre**, avec **trois variables endogènes** (les deux variables de contrôle et le **multiplicateur de Lagrange**).
- Pour appliquer l'analyse de **statique comparative** aux solutions d'un **problème d'optimisation contraint**, nous devons étendre l'analyse précédente à n **variables endogènes**.
- Commençons avec $n = 3$.

- Considérons un modèle économique avec **trois variables endogènes**, notées x_1, x_2 et x_3, et m **variables exogènes**, notées $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$.
- Dans ce contexte, les **équations d'équilibre** sont

$$\begin{aligned} f^1\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*; \alpha_1, ..., \alpha_m\right) &= 0 \\ f^2\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*; \alpha_1, ..., \alpha_m\right) &= 0 \\ f^3\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*; \alpha_1, ..., \alpha_m\right) &= 0 \end{aligned}$$

- Les **solutions** sont de la forme (variables **endogènes** fonctions des variables **exogènes**):

$$x_i^* = x_i\left(\alpha_1, ..., \alpha_m\right) \quad i = 1, 2, 3$$

- L'objectif de l'analyse de **statique comparative** est alors de déterminer les signes des m dérivées partielles $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, ..., m$.

- En dérivant les **équations d'équilibre** rapport à α_j, $j = 1, ..., m$, on obtient

$$
\begin{aligned}
f_1^1 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} + f_2^1 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} + f_3^1 \frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} &= -f_{\alpha_j}^1 \\
f_1^2 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} + f_2^2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} + f_3^2 \frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} &= -f_{\alpha_j}^2 \\
f_1^3 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} + f_2^3 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} + f_3^3 \frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} &= -f_{\alpha_j}^2
\end{aligned}
$$

- Comme les dérivées partielles de f^1, f^2 et f^3 de sont toutes évaluées au point solution, se sont des **nombres**. Les trois équations ci-dessus forment ainsi un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial \alpha_j \\ \partial x_2^* / \partial \alpha_j \\ \partial x_3^* / \partial \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_j}^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 \\ -f_{\alpha_j}^3 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = |F| = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Supposons que ce soit le cas.

- En utilisant la **méthode des cofacteurs**, on peut calculer D comme suit:

$$\begin{aligned} D &= f_1^1 \begin{vmatrix} f_2^2 & f_3^2 \\ f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix} - f_2^1 \begin{vmatrix} f_1^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_3^3 \end{vmatrix} + f_3^1 \begin{vmatrix} f_1^2 & f_2^2 \\ f_1^3 & f_2^3 \end{vmatrix} \\ & f_1^1 \left[f_2^2 f_3^3 - f_2^3 f_3^2 \right] - f_2^1 \left[f_1^2 f_3^3 - f_1^3 f_3^2 \right] + f_3^1 \left[f_1^2 f_2^3 - f_1^3 f_2^2 \right] \end{aligned}$$

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{D} \quad i = 1, 2, 3; \, j = 1, ..., m$$

où F_{ij} est obtenue en remplaçant la colonne i de F, par le vecteur colonne

$$\begin{bmatrix} -f_{\alpha_j}^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 \\ -f_{\alpha_j}^3 \end{bmatrix}$$

- Lorsque l'on veut résoudre un **système d'équations linéaires** à trois équations et trois inconnues, la **règle de Cramer** donne

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{1j}|}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -f_{\alpha_j}^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ -f_{\alpha_j}^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix}}{D} \quad j = 1, ..., m$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{2j}|}{D} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_j}^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_j}^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & -f_{\alpha_j}^3 & f_3^3 \end{vmatrix}}{D} \quad j = 1, \ldots, m$$

et

$$\frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{3j}|}{D} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & -f_{\alpha_j}^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & -f_{\alpha_j}^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & -f_{\alpha_j}^3 \end{vmatrix}}{D} \quad j = 1, \ldots, m$$

- Lorsque l'on résout un **problème d'optimisation** à deux variables et une contrainte, les fonctions f^1, f^2 et f^3 sont les trois **conditions du premier ordre**, i.e. les dérivées partielles de la **fonction de Lagrange** par rapport aux deux variables et au **multiplicateur**.
- Dans ce cas, le déterminant $D = |F|$ est le déterminant de la **matrice Hessienne** associée a la **fonction de Lagrange**. Comme les **conditions du second ordre** s'expriment en fonction du signe du déterminant de cette matrice (voir **Section 3.2, Théorème 3**), on peut utiliser le fait que les **conditions du second ordre** sont vérifiées pour trouver le signe des effets de **statique comparative** (e.g. maximum si $|F| > 0$).

- Considérons le **problème du consommateur** avec deux biens:

$$\max_{x_1,x_2} : u\left(x_1, x_2\right) \quad s.c.\ R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

- Les variables **endogènes** sont les demandes x_1 et x_2, et les variables **exogènes** sont les prix p_1 et p_2 et le revenu R.
- L'un des but principaux de l'analyse du problème du consommateur est de déterminer l'**impact des variations de prix sur les demandes de biens**. Il s'agit d'un exercice de **statique comparative**.

- En appliquant la **méthode de Lagrange**, les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned} u_1\left(x_1^*, x_2^*\right) - \lambda^* p_1 &= 0 \\ u_2\left(x_1^*, x_2^*\right) - \lambda^* p_2 &= 0 \\ R - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* &= 0 \end{aligned}$$

- En dérivant les **conditions du premier ordre** rapport à p_1, on obtient

$$
\begin{aligned}
u_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} &= \lambda^* \\
u_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} &= 0 \\
-p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} &= x_1^*
\end{aligned}
$$

- Les trois équations ci-dessus forment un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial p_1 \\ \partial x_2^* / \partial p_1 \\ \partial \lambda^* / \partial p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* \\ 0 \\ x_1^* \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

- La **règle de Cramer** donne

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^* & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ x_1^* & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D}$$

$$= \frac{\lambda^* \begin{vmatrix} u_{22} & -p_2 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} - u_{12} \begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ x_1^* & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} 0 & u_{22} \\ x_1^* & -p_2 \end{vmatrix}}{D}$$

$$= \frac{-\lambda^* p_2^2}{D} + \frac{x_1^* \left[p_1 u_{22} - p_2 u_{12}\right]}{D}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} &= \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & \lambda^* & -p_1 \\ u_{21} & 0 & -p_2 \\ -p_1 & x_1^* & 0 \end{vmatrix}}{D_{p_1}} \\
&= \frac{u_{11}\begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ x_1^* & 0 \end{vmatrix} - \lambda^* \begin{vmatrix} u_{21} & -p_2 \\ -p_1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & 0 \\ -p_1 & x_1^* \end{vmatrix}}{D_{p_1}} \\
&= \frac{p_1\, p_2\, \lambda^*}{D} + \frac{x_1^*\left[p_2\, u_{11} - p_1\, u_{21}\right]}{D}
\end{aligned}$$

- De même, en dérivant les **conditions du premier ordre** rapport à p_2, on obtient

$$\begin{array}{rcl}
u_{11}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + u_{12}\dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_2} - p_1\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} & = & 0 \\
u_{21}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + u_{22}\dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_2} - p_2\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} & = & \lambda^* \\
-p_1\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_2} - p_2\dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & = & x_2^*
\end{array}$$

- Les trois équations ci-dessus forment un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial p_2 \\ \partial x_2^* / \partial p_2 \\ \partial \lambda^* / \partial p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si $D \neq 0$. Or nous avons vu dans la **Section 3.2**, **Théorème 3**, que les **conditions du second ordre** sont vérifiées si $D > 0$.

- La **règle de Cramer** donne

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ \lambda^* & u_{22} & -p_2 \\ x_2^* & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{-u_{12}\begin{vmatrix} \lambda^* & -p_2 \\ x_2^* & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} \lambda^* & u_{22} \\ x_2^* & -p_2 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{\lambda^* p_1 p_2}{D} + \frac{x_2^* \left[p_1 u_{22} - p_2 u_{12} \right]}{D}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} &= \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & -p_1 \\ u_{21} & \lambda^* & -p_2 \\ -p_1 & x_2^* & 0 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{u_{11}\begin{vmatrix} \lambda^* & -p_2 \\ x_2^* & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & \lambda^* \\ -p_1 & x_2^* \end{vmatrix}}{D} \\
&= -\frac{\lambda^* p_1^2}{D} + \frac{x_2^* \left[p_2 u_{11} - p_1 u_{21}\right]}{D}
\end{aligned}
$$

- De même, en dérivant les **conditions du premier ordre** rapport à R, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial R} + u_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial R} - p_1\frac{\partial \lambda^*}{\partial R} &= 0 \\
u_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial R} + u_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial R} - p_2\frac{\partial \lambda^*}{\partial R} &= 0 \\
-p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial R} - p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial R} &= -1
\end{aligned}$$

- Les trois équations ci-dessus forment un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial R \\ \partial x_2^* / \partial R \\ \partial \lambda^* / \partial R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si $D \neq 0$

- La **règle de Cramer** donne

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^*}{\partial R} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{-u_{12}\begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} 0 & u_{22} \\ -1 & -p_2 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{p_2\, u_{12} - p_1\, u_{22}}{D}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2^*}{\partial R} &= \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & -p_1 \\ u_{21} & 0 & -p_2 \\ -p_1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{u_{11}\begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & 0 \\ -p_1 & -1 \end{vmatrix}}{D} \\
&= \frac{p_1 u_{21} - p_2 u_{11}}{D}
\end{aligned}$$

- L'analyse de **statique comparative** permet également de déterminer l'**impact d'une hausse du revenu sur la demande**.
- Considérons le signe de

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial R} = \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{D}$$

- La théorie ne place aucune restriction sur le signe de u_{12} et u_{22}. Nous ne pouvons donc pas déterminer le signe du numérateur (idem pour $\frac{\partial x_2^*}{\partial R}$).

- Cette indétermination est plus une force qu'une faiblesse de la théorie. En effet, elle nous conduit à trois cas possibles correspondant à une classification du bien:
    - Bien **normal** $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} > 0$.
    - Bien **strictement inférieur** $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} < 0$.
    - Bien **faiblement inférieur** $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} = 0$.
- Si le bien est **inférieur** (sans préciser strictement ou faiblement) on a $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} \leq 0$.

- Cette classification est utile pour déterminer, par exemple, le signe de $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$. En injectant $\frac{\partial x_1^*}{\partial R}$ dans $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$, on obtient l'**équation de Slutsky**:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{-\lambda^* p_2^2}{D} - x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R}$$

- Le premier terme $\frac{-\lambda^* p_2^2}{D}$ mesure l'**effet de substitution** ou l'**effet prix**. Ce terme est **toujours négatif** (car $D > 0$ et $\lambda^* = u_1 / p_1 > 0$). Une hausse du prix du bien 1 conduit à une baisse de la demande de bien 1. Le consommateur réduit sa consommation de bien 1 et augmente sa consommation de bien 2 qui est devenu **relativement moins cher** (la consommation de bien 2 se substitue à celle de bien 1).

- Le second terme, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R}$, mesure l'**effet revenu** ou l'**effet pouvoir d'achat**.
- La hausse du prix du bien 1 réduit le **pouvoir d'achat** du consommateur (son revenu ne lui permet plus de consommer les quantités qu'il consommait avant la hausse de prix).
- Le consommateur est donc **appauvri** par la hausse de prix.
- L'impact sur la demande de bien 1 dépend du type du bien 1.

- Si le bien 1 est **normal**, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R} < 0$, l'**effet revenu** conduit à une baisse de la demande de bien 1 (effets de substitution et de revenu jouent dans le même sens et la demande diminue sans ambiguité).
- Si le bien 1 est **strictement inférieur**, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R} > 0$, l'**effet revenu** conduit à une hausse de la demande de bien 1 (**effet de substitution** et **effet de revenu** jouent en sens opposés, et si l'**effet revenu** l'emporte sur l'**effet de substitution**, alors la demande de bien 1 augmente alors que son prix augmente, c'est un bien **Giffen**).
- Si le bien 1 est **faiblement inférieur**, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R} = 0$, l'**effet revenu** ne joue pas (seul l'**effet de substitution** joue et la demande diminue sans ambiguité).

Analyse de statique comparative générale

Definition (1)

Méthode générale de statique comparative. Soit un système de n équations, caractérisant un équilibre économique,

$$\begin{array}{rcl} f^1\left(x_1^*, ..., x_n^*; \alpha_1, ..., \alpha_m\right) & = & 0 \\ f^2\left(x_1^*, ..., x_n^*; \alpha_1, ..., \alpha_m\right) & = & 0 \\ & & ... \\ f^n\left(x_1^*, ..., x_n^*; \alpha_1, ..., \alpha_m\right) & = & 0 \end{array}$$

Résoudre ce système consiste à déterminer les **valeurs d'équilibre** des n variables **endogènes** $x_1^*, ..., x_n^*$, en fonction des m variables **exogènes** $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

Definition (1 suite)

A l'équilibre, l'impact d'un changement de la variable **exogène** α_j sur la variable **endogène** x_i^* est donné par

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|} \quad i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$$

où $|F| \neq 0$.

Definition (1 suite)

La matrice F est

$$F = \begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^n & f_2^n & \dots & f_n^n \end{bmatrix}$$

La matrice F_{ij} est obtenue à partir de la matrice F, en remplaçant la i-ème colonne de F par la j-ème colonne de la matrice $n \times m$ suivante

$$M = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_1}^1 & -f_{\alpha_2}^1 & \dots & -f_{\alpha_m}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 & -f_{\alpha_2}^2 & \dots & -f_{\alpha_m}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_{\alpha_1}^n & -f_{\alpha_2}^n & \dots & -f_{\alpha_m}^n \end{bmatrix}$$

- Remarques sur la méthode générale de statique comparative:
  - On doit avoir $|F| \neq 0$.
  - Les dérivées partielles sont toutes évaluées au point d'équilibre initial et sont donc des nombres donnés.
  - Lorsque le système de n équations représente les **conditions du premier ordre** d'un **problème d'optimisation**, les **conditions du second ordre** pour ce problème donnent le signe de $|F|$, étant donné que c'est le **déterminant** de la **matrice Hessienne bordée** impliquée dans les **conditions du second ordre** associées au **problème d'optimisation** (voir **Section 3.2**).

Analyse de statique comparative générale

- Noter qu'en différenciant les n équations d'équilibre par rapport à chaque variable **exogène** $\alpha_1, ..., \alpha_m$, on a le système de équations linéaires $FV = M$, où F est la **matrice des coefficients** associés aux variables, M est la **matrice des résultats**, et V est la **matrice des variables**:

$$V = \begin{bmatrix} \partial x_1^*/\partial\alpha_1 & \partial x_1^*/\partial\alpha_2 & ... & \partial x_1^*/\partial\alpha_m \\ \partial x_2^*/\partial\alpha_1 & \partial x_2^*/\partial\alpha_2 & ... & \partial x_2^*/\partial\alpha_m \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial x_n^*/\partial\alpha_1 & \partial x_n^*/\partial\alpha_2 & ... & \partial x_n^*/\partial\alpha_m \end{bmatrix}$$

- L'application de la **règle de Cramer** donne $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|}$.

Analyse de statique comparative générale

- Noter que le produit matriciel FV donne la matrice de taille $n \times m$ suivante (de même taille que la matrice M)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_1 & \sum_{i=1}^{n} f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_m \\ \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \partial x_i^* / \partial \alpha_1 & \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \partial x_i^* / \partial \alpha_2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \partial x_i^* / \partial \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_1 & \sum_{i=1}^{n} f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_m \end{bmatrix}$$

- L'égalité $FV = M$ dit que chaque terme de cette matrice est égal à chaque terme de la matrice M. Par exemple, L1/C1 on a $\sum_{i=1}^{n} f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_1 = -f_{\alpha_1}^1$, L1/C2 on a $\sum_{i=1}^{n} f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_2 = -f_{\alpha_2}^1$, Ln/Cm on a $\sum_{i=1}^{n} f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_m = -f_{\alpha_m}^n$, etc.

Théorème de l'enveloppe

- Dans l'analyse de **statique comparative** des **problèmes d'optimisation contraints**, il est souvent utile de suivre une approche basée sur le **théorème de l'enveloppe**.
- Le **théorème de l'enveloppe** peut être vu comme un complément du **théorème des fonctions implicites**.
- Il permet de déterminer l'impact d'un changement d'une variable **exogène** sur la **fonction objectif**, évaluée au point solution, d'un **problème d'optimisation contraint**.

Théorème de l'enveloppe

- Considérons le **problème de maximisation contraint** suivant

$$\max_{x_1, x_2} : f\left(x_1, x_2; \alpha\right) \quad s.c.\ g\left(x_1, x_2; \alpha\right) = 0$$

  où α est une variable **exogène**. On suppose que f et g sont deux fois continûment différentiables.
- La **fonction de Lagrange** associée est

$$L\left(x_1, x_2, \lambda; \alpha\right) = f\left(x_1, x_2; \alpha\right) + \lambda g\left(x_1, x_2; \alpha\right)$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= f_1\left(x_1^*, x_2^*; \alpha\right) + \lambda^* g_1\left(x_1^*, x_2^*; \alpha\right) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= f_2\left(x_1^*, x_2^*; \alpha\right) + \lambda^* g_2\left(x_1^*, x_2^*; \alpha\right) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= g\left(x_1^*, x_2^*; \alpha\right) = 0
\end{aligned}$$

Théorème de l'enveloppe

- Si les fonctions f et g possèdent des **dérivées partielles continues d'ordre 1 et d'ordre 2**, et si le **déterminant** de la **matrice Hessienne** du **Lagrangien** est non nul, i.e.

$$D = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} + \lambda^* g_{11} & f_{12} + \lambda^* g_{12} & g_1 \\ f_{21} + \lambda^* g_{21} & f_{22} + \lambda^* g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

  alors on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
- Cela revient à dire que nous pouvons résoudre le **problème de maximisation contraint** (via les **conditions du premier ordre**) en exprimant les variables **endogènes** comme des **fonctions différentiables** $x_1^* = x_1(\alpha)$, $x_2^* = x_2(\alpha)$ et $\lambda^* = \lambda(\alpha)$, de la variable **exogène** α.

Théorème de l'enveloppe

- En injectant les solutions $x_1^* = x_1(\alpha)$ et $x_2^* = x_2(\alpha)$, dans la **fonction objectif** $(f(x_1, x_2; \alpha)$, on obtient la **fonction de valeur** du **problème de maximisation contraint**

$$V(\alpha) = f(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha)$$

- Cette fonction donne la **valeur de la fonction objectif**, aux alentours du point solution, en fonction de la variable **exogène**.

Théorème de l'enveloppe

- De manière similaire, en injectant les solutions $x_1^* = x_1(\alpha)$, $x_2^* = x_2(\alpha)$ et $\lambda^* = \lambda(\alpha)$, dans la **fonction de Lagrange** $L(x_1, x_2, \lambda; \alpha)$, on obtient

$$L = f(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha) + \lambda(\alpha)\, g(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha)$$

- On peut alors constater un fait intéressant en différenciant par rapport à la variable **exogène** α:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\alpha} &= f_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + f_\alpha + \frac{d\lambda}{d\alpha} g + \lambda \left[g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + g_\alpha \right] \\ &= [f_1 + \lambda g_1] \frac{dx_1}{d\alpha} + [f_2 + \lambda g_2] \frac{dx_2}{d\alpha} + g \frac{d\lambda}{d\alpha} + f_\alpha + \lambda g_\alpha \end{aligned}$$

Théorème de l'enveloppe

- D'après les **conditions du premier ordre**, au point solution, on a $f_1 + \lambda g_1 = 0$, $f_2 + \lambda g_2 = 0$ et $g = 0$. Ainsi on obtient

$$\frac{dL}{d\alpha} = f_\alpha + \lambda g_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

- La **variation totale du Lagrangien**, aux alentours du point solution, par rapport à un changement de la variable **exogène** α est simplement donnée par la **dérivée partielle du Lagrangien**.
- Du fait que l'on se situe au point solution, l'impact de la variable **exogène** α sur les variables **endogènes** x_1, x_2 et λ disparait (car d'après les **conditions du premier ordre**, les dérivées partielles du **Lagrangien** sont nulles à l'optimum.

Théorème de l'enveloppe

- Le **théorème de l'enveloppe** établit une connexion, au point solution, entre la différentielle totale de la **fonction de valeur** et la différentielle totale de la **fonction de Lagrange**, par rapport à la variable **exogène** α.
- En différenciant la **fonction de valeur** par rapport à la variable **exogène** α, on obtient

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = f_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + f_\alpha$$

- En substituant, d'après les **conditions du premier ordre**, $f_1 = -\lambda g_1$ et $f_2 = -\lambda g_2$, il vient

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = -\lambda \left[g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} \right] + f_\alpha$$

Théorème de l'enveloppe

- A l'optimum, on peut réécrire la **fonction contrainte** comme suit

$$g\left(x_1\left(\alpha\right), x_2\left(\alpha\right); \alpha\right) = 0$$

- En différenciant la **fonction contrainte** par rapport à la variable **exogène** α, on obtient

$$g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + g_\alpha = 0$$

- En substituant, cette dernière relation dans $dV\left(\alpha\right)/d\alpha$, on aboutit à

$$\frac{dV\left(\alpha\right)}{d\alpha} = f_\alpha + \lambda g_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

- C'est la forme que prend le **théorème de l'enveloppe** pour cet exemple.

- Le **théorème de l'enveloppe** nous apprend que nous pouvons déterminer l'impact d'un changement de la variable **exogène** α sur la **valeur optimale** de la **fonction objectif**, simplement en calculant la **dérivée partielle du Lagrangien**, évalué au point solution, par rapport à la variable **exogène** α.

Théorème de l'enveloppe

Theorem (1)

Etant donné le **problème de maximisation contraint**

$$\max_{x_1,\dots,x_n} : f\left(x_1,\dots,x_n;\alpha_1,\dots,\alpha_m\right) \quad s.c. \quad \begin{array}{c} g^1\left(x_1,\dots,x_n;\alpha_1,\dots,\alpha_m\right)=0 \\ \dots \\ g^K\left(x_1,\dots,x_n;\alpha_1,\dots,\alpha_m\right)=0 \end{array}$$

la **fonction de valeur** $V\left(\alpha_1,\dots,\alpha_m\right)$ *et la* **fonction de Lagrange** $L=f+\sum_{k=1}^K \lambda_k g^k$ *qui lui correspondent, on a*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}=f_{\alpha_j}+\sum_{k=1}^K \lambda_k g^k_{\alpha_j}$$

- Une application simple, mais importante, du **théorème de l'enveloppe** donne l'interprétation des **multiplicateurs de Lagrange** associés aux contraintes d'un problème d'optimisation.
- Supposons que l'on a le **problème de maximisation contraint** suivant

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} : f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \quad s.c. \quad \begin{array}{c} g^1\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \alpha_1 = 0 \\ \ldots \\ g^K\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \alpha_K = 0 \end{array}$$

où les K variables **exogènes** $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ intègrent les contraintes comme des "**constantes de contraintes**".

Théorème de l'enveloppe

- La **fonction de Lagrange** est

$$L = f\left(x_1, ..., x_n\right) + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \left[g^k\left(x_1, ..., x_n\right) + \alpha_k\right]$$

- En appliquant le **théorème de l'enveloppe** on a

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \lambda_k^*$$

Théorème de l'enveloppe

- Ainsi, le **multiplicateur de Lagrange** λ_k^* mesure le taux auquel la **fonction de valeur** change lorsque la contrainte à laquelle le **multiplicateur** est associé se relâche "légèrement".
- Cette interprétation du **multiplicateur de Lagrange** est d'importance fondamentale dans les **applications économiques** des **problèmes d'optimisation contraints**.
- Une implication est immédiate. Si le relâchement d'une contrainte est sans conséquence sur la **valeur optimale** de la **fonction objectif**, alors le **multiplicateur de Lagrange** associé à cette contrainte est nul.

- Au regard du résultat qu'il établit, il n'est pas évident de comprendre pourquoi le **théorème de l'enveloppe** porte ce nom.
- La raison de cette dénomination est que le théorème a été découvert dans le cadre de l'étude de la relation entre les **coûts** de **long terme** et de **court terme**.
- Précisément, la **courbe de coût total de long terme** est l'**enveloppe inférieure** de l'ensemble des **courbes de coût total de court terme** générée en faisant varier le facteur fixe.
- Le **théorème de l'enveloppe** permet d'établir rigoureusement ce résultat.

- Pour illustrer, considérons un exemple.
- Considérons une entreprise qui produit en quantité y un bien en utilisant deux facteurs de production, le travail L et le capital K.
- La technologie de production de l'entreprise est représentée par une fonction de production $f(L, K)$.

- Le programme de **minimisation du coût total de production** de l'entreprise est

$$\min_{L,K} : wL + rK \quad s.c.\ y = f(L, K)$$

où w est le taux de salaire et r le prix du capital.

- Il s'agit de réaliser un certain niveau de production y à moindre coût, en choisissant la combinaison travail/capital la moins chère possible et qui permet de réaliser le volume de production y.
- Graphiquement, dans le repère (L, K), il s'agit de choisir un point sur l'**isoquante** de niveau y. Le meilleur choix est le point qui se trouve sur la **droite d'iso-coût** de niveau $\overline{C}$, d'équation $K = -\frac{w}{r} + \frac{\overline{C}}{r}$ la plus basse possible).

- La **fonction de Lagrange** associée est

$$\mathrm{L}(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda\left[y - f(L, K)\right]$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial L} &= w - \lambda f_L(L, K) = 0 \\
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial K} &= r - \lambda f_K(L, K) = 0 \\
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} &= y - f(L, K) = 0
\end{aligned}$$

- En combinant les deux premières **conditions du premier ordre** on obtient la **condition de tangence** discutée précédemment **Section 3**:

$$\frac{w}{r} = \underbrace{\frac{f_L\left(L, K\right)}{f_K\left(L, K\right)}}_{TMST_{K,L}}$$

- La troisième **condition du premier ordre** assure que la contrainte est vérifiée:

$$y = f\left(L, K\right)$$

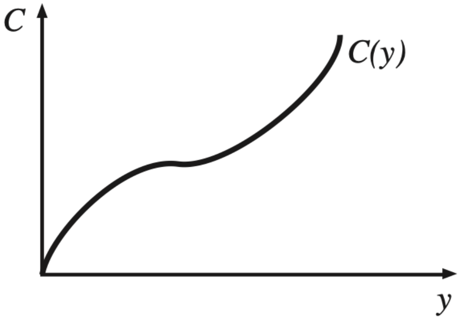
- On dispose d'un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

- Dans ce problème de **minimisation du coût total de production**, les variables **exogènes** sont w, r et y, tandis que les variables **endogènes** sont L et K.
- La résolution conduit aux **demandes optimales de facteurs** travail $L^* = L(w, r, y)$ et capital $K^* = K(w, r, y)$, i.e. les variables **endogènes** sont exprimées en fonction des variables **exogènes**.
- En substituant ces solutions dans la **fonction objectif**, on obtient la **fonction de valeur**, appelée **fonction de coût total de long terme** dans ce contexte:

$$\begin{aligned} C^* &= wL^* + rK^* \\ &= wL(w, r, y) + rK(w, r, y) \\ &= C(w, r, y) \end{aligned}$$

- Si le marché du travail et du capital sont **concurrentiels**, les prix des facteurs de production sont fixes.
- On note ainsi, plus simplement, la **fonction de coût total de long terme** $C(y)$.
- Cette fonction est représentée **Figure 13**.
- Elle illustre comment le coût total minimum évolue en fonction de l'objectif de production y, pour un niveau donné des prix des facteurs de production.

Figure 13



- La différence entre le **long terme** et le **court terme** est la suivante.
- A **long terme**, **tous** les facteurs de production sont **variables**.
- A **court terme**, **certains** facteurs de production sont **fixes**.

- Supposons ici que le capital est fixe à **court terme**, tandis que le travail reste variable. On note K_a le stock de capital disponible et $F_a = rK_a$ son coût fixe.
- Le programme de **minimisation du coût total de production** de l'entreprise à **court terme** est

$$\min_{L} : wL + F_a \quad s.c.\ y = f\left(L, K_a\right)$$

- Il s'agit de réaliser un certain niveau de production y à moindre coût. Il s'agit donc simplement de choisir la quantité de travail minimale, c'est à dire celle qui vérifie la contrainte.
- Graphiquement, dans le repère $\left(L, K\right)$, il s'agit de choisir un point sur l'**isoquante** de niveau y. Le choix est ici trivial. La demande optimale de travail L^* est simplement l'abscisse de correspondant à l'ordonnée K_a sur l'**isoquante** de niveau y.

- On note la demande optimale de travail

$$L^{CT} = \phi\left(y, K_a\right)$$

- En l'injectant dans la **fonction objectif**, on obtient la **fonction de valeur** qui est la **fonction de coût total de court terme** dans ce contexte

$$\begin{aligned} C^{CT} &= wL^{CT} + F_a \\ &= w\phi\left(y, K_a\right) + F_a \\ &= c\left(y, K_a\right) \end{aligned}$$

- On note y_a le niveau de production tel que le **coût total de long terme** égalise le **coût total de court terme**:

$$C\left(y_a\right) = c\left(y_a, K_a\right)$$

  où $K_a = K^*$.
- Comme l'illustre la **Figure 14a**, La courbe de **coût total de court terme** est toujours **au dessus** de la courbe de **coût total de long terme** (on ne peut pas faire moins bien en étant libre d'ajuster le niveau de capital) et les deux courbes se touchent uniquement pour le niveau de production y_a:

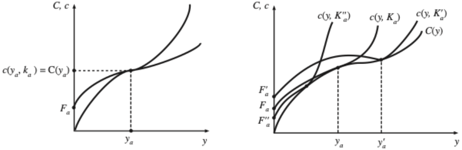
$$c\left(y, K_a\right) > C\left(y\right) \quad \forall y \neq y_a$$

- On peut montrer que **théorème de l'enveloppe** permet d'établir que $c_y\left(y_a, K_a\right) = C'\left(y_a\right)$, d'où le **point de tangence** entre les deux courbes en y_a. Nous laissons ici l'aspect technique de ce point en nous contentant de l'analyse graphique.

- Lorsque l'on fait varier le niveau de capital fixe K_a à **court terme**, on obtient une **nouvelle courbe de coût total de court terme**.
- Si l'on augmente le niveau de capital fixe à un niveau $K_a' > K_a$, on obtient la **nouvelle courbe de coût total de court terme** $c\left(y, K_a'\right)$ avec un **nouveau point de tangence** $y_a' > y_a$.
- Si l'on diminue le niveau de capital fixe à un niveau $K_a'' < K_a$, on obtient la **nouvelle courbe de coût total de court terme** $c\left(y, K_a''\right)$ avec un **nouveau point de tangence** $y_a'' < y_a$.
- La **Figure 14b** illustre ainsi que la **courbe de coût total de long terme** est l'**enveloppe inférieure** des **courbes de coût total de court terme** générées en faisant varier le facteur fixe.

Théorème de l'enveloppe

Figure 14



(a) Short-run and long-run cost functions

(b) Envelope relation

- On considère un planificateur central contrôlant une économie à deux secteurs, le secteur 1 produisant le bien 1 en quantité x_1, et le secteur 2 produisant le bien 2 en quantité x_2.
- On suppose que l'économie est une petite économie ouverte (par rapport au reste du monde) qui considère ainsi les prix p_1 et p_2 (des biens 1 et 2, respectivement) comme fixés par le marché mondial.
- Le planificateur cherche à maximiser le produit national Y de son pays compte tenu des prix mondiaux.
- Le facteur travail est le seul facteur disponible en quantité limitée L^0.

- Le problème du planificateur est donc d'allouer de manière optimale une certaine proportion du facteur travail disponible à chaque secteur.
- Les fonctions de production des secteurs 1 et 2 sont respectivement

$$x_1 = a_1 L_1^b \quad \text{et} \quad x_2 = a_2 L_2^b$$

où L_i est la quantité de travail employée dans le secteur $i = 1, 2$, avec $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $0 < b < 1$.

- Le produit national est donc

$$Y = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 a_1 L_1^b + p_2 a_2 L_2^b$$

- Le **problème de maximisation contraint** du planificateur est

$$\max_{L_1,L_2} : p_1 a_1 L_1^b + p_2 a_2 L_2^b \quad s.c.\ L^0 = L_1 + L_2$$

- La **fonction de Lagrange** associée est

$$\mathrm{L}\left(L_1, L_2, \lambda\right) = p_1 a_1 L_1^b + p_2 a_2 L_2^b + \lambda \left[L^0 - L_1 - L_2\right]$$

- Remarquons que L^0 est une **constante contrainte**.

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_1} &= p_1 a_1 b L_1^{b-1} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_2} &= p_2 a_2 b L_2^{b-1} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} &= L^0 - L_1 - L_2 = 0
\end{aligned}
$$

- En combinant les deux premières **conditions du premier ordre** on obtient

$$p_1 a_1 L_1^{b-1} = p_2 a_2 L_2^{b-1}$$

- La troisième **condition du premier ordre** assure que la contrainte est vérifiée:

$$L^0 = L_1 + L_2$$

- On dispose d'un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

- Les solutions sont

$$L_1^* = \alpha^* L^0 \quad \text{et} \quad L_2^* = [1 - \alpha^*]\, L^0$$

où

$$\alpha^* = \alpha\left(p_1, p_2\right) = \left[1 + \left[\frac{p_1\, a_1}{p_2\, a_2}\right]^{\frac{1}{b-1}}\right]^{-1}$$

est la part optimale du travail disponible L^0 allouée au secteur 1 (et $1 - \alpha^*$ celle allouée au secteur 2).

- On peut noter que L_1^* et L_2^* sont des fonctions linéaires de L^0. La règle d'allocation optimale du travail entre les deux secteurs ne dépend pas du niveau de travail disponible L_0 (i.e. ne dépend pas de la taille de l'économie). Elle ne dépend que des prix mondiaux des biens p_1 et p_2 (et des paramètres technologiques a_1, a_2 et b supposés constants).

- En substituant les solutions dans la **fonction objectif**, on obtient la **fonction de valeur**, soit la **valeur optimisée du produit national**

$$\begin{aligned}
Y^* &= p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \\
&= p_1 a_1 \left[\alpha^* L^0\right]^b + p_2 a_2 \left[\left[1-\alpha^*\right] L^0\right]^b \\
&= p_1 a_1 \left[\alpha\left(p_1, p_2\right) L^0\right]^b + p_2 a_2 \left[\left[1-\alpha\left(p_1, p_2\right)\right] L^0\right]^b \\
&= V\left(p_1, p_2, L^0\right)
\end{aligned}$$

- On s'intéresse alors à l'impact d'un changement du travail disponible L^0 et des prix mondiaux des biens p_1 et p_2, sur le produit national.

- D'après le **théorème de l'enveloppe**, on a

$$\frac{\partial V}{\partial L^0} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial L^0} = \lambda^* = p_1 a_1 b \left[L_1^*\right]^{b-1}$$

- Le **multiplicateur de Lagrange** mesure l'impact du relâchement de la contrainte, i.e. comment le revenu national varie lorsque la quantité de travail disponible augmente légèrement.
- On peut interpréter λ^* comme étant la disposition maximale à payer du planificateur pour obtenir une légère hausse de la quantité de travail dont il dispose. On parle alors de **taux de salaire fictif** ou **prix fictif** du travail.

- D'après le **théorème de l'enveloppe**, on a également

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial p_1} = a_1 \left[L_1^*\right]^b = a_1 \left[\alpha^* L^0\right]^b$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial p_2} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial p_2} = a_2 \left[L_2^*\right]^b = a_2 \left[\left[1 - \alpha^*\right] L^0\right]^b$$

- Le **théorème de l'enveloppe** permet ici d'obtenir facilement l'impact d'une légère variation des prix mondiaux des biens sur le revenu national (sans calculer deux dérivées plutôt complexes de la fonction V par rapport à p_1 et p_2).