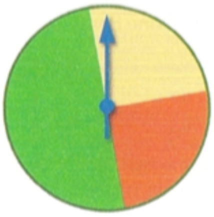
Seconde :

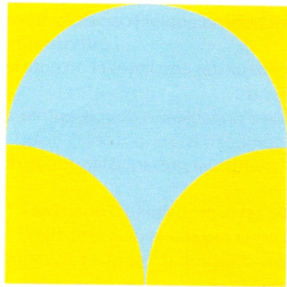
Modèle de probabilité

9 Une expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue ci-dessous et à noter la couleur obtenue.



• Proposer un univers et une loi de probabilité adaptés à cette expérience aléatoire.

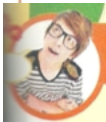
49 Une entreprise de thermolaquage réalise le logo suivant dans un carré de côté 2 m. La partie bleue est délimitée par un demi-cercle et deux quarts de cercle.



La machine à peindre réalise systématiquement et aléatoirement un défaut sur un point du carré.
• Quelle est la probabilité que ce soit sur un point bleu ?

52 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser
Anaïs et Marco ont quatre pièces dans leur porte-monnaie :
• une pièce de 0,20 € ;
• deux pièces de 0,10 € ;
• une pièce de 0,50 €.
Ils prennent trois pièces au hasard.

• Calculer la probabilité qu'ils puissent payer une baguette de pain qui vaut 0,75 €.



Automatismes

Calcul mental

1 On fait tourner une roue de loterie partagée en quatre secteurs portant les numéros 1, 3, 4 et 7.

Issue	1	3	4	7
Fréquence	0,21	0,4		0,18

• Recopier et compléter le tableau donnant la loi de probabilité associée à cette expérience.

2 Si $P(\mathrm{A}) = 0{,}4$, $P(\mathrm{B}) = 0{,}8$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5$, déterminer ce que valent :
1. $P(\overline{\mathrm{A}})$
2. $P(\overline{\mathrm{B}})$
3. $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$
4. $P(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}})$

3 Des jetons rouges, verts et bleus sont numérotés 1 et 2. On tire un jeton au hasard. Le tableau suivant donne les probabilités d'obtenir chacune des issues.

	Rouge	Vert	Bleu
1	0,1	0,3	0
2	0,3	0,1	0,2

1. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité qu'il porte le numéro 2 ?
3. Quelle est la probabilité qu'il soit bleu et qu'il porte le numéro 2 ?
4. Quelle est la probabilité qu'il soit vert ou qu'il porte le numéro 1 ?

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

1. Fluctuation d'échantillonnage

Propriété (admise)

On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante et dont on connaît la probabilité p d'une issue ω.
On constitue un grand nombre d'échantillons de taille n sur lesquels on observe la fréquence f de réalisation de l'issue ω.
Plus la taille n des échantillons est grande, moins il y a de fluctuation de la fréquence observée f autour de la valeur de p.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce équilibrée et à noter si elle retombe sur « Pile » ou « Face ». On sait que la probabilité p d'obtenir « Face » est égale à 0,5.
À l'aide d'un ordinateur, on simule 1 000 échantillons de taille 1 000 et, pour chaque échantillon, on calcule la fréquence d'apparition de « Face ». On peut observer que, sur ces échantillons, environ 95 % de ces fréquences appartiennent à l'intervalle [0,47 ; 0,53].
On simule à présent 1 000 échantillons de taille 10 000 et, pour chaque échantillon, on calcule la fréquence d'apparition de « Face ». On peut observer cette fois qu'environ 95 % de ces fréquences appartiennent à l'intervalle [0,49 ; 0,51] : les fréquences observées sont plus proches de la valeur de p.

2. Estimation d'une proportion

Propriété (admise)

On considère une population dans laquelle on cherche la proportion des individus qui possèdent un certain caractère.
On prélève au hasard un échantillon de taille n dans la population et on observe la fréquence f du caractère dans cet échantillon. Cette fréquence f est une valeur approchée de p, appelée estimation ponctuelle de p.
Plus la taille de l'échantillon est grande, meilleure est l'estimation de p.

Exemple

Un candidat se présente à une élection dans une ville de 10 000 habitants. Un sondage réalisé sur 1 100 habitants montre que 517 personnes envisagent de voter pour ce candidat.
La fréquence observée sur cet échantillon est $f = \frac{517}{1\,100} = 0{,}47$.
On peut estimer qu'une valeur approchée de la proportion des habitants souhaitant voter pour ce candidat est 47 %. La qualité de cette estimation dépend de la taille de l'échantillon.

Remarque

De la même façon, pour une expérience aléatoire donnée, on peut estimer la probabilité d'une issue en observant sa fréquence dans un échantillon de taille suffisamment grande.

Exercice résolu 1 Utiliser la fluctuation d'échantillonnage

On se demande si une pièce donnée est équilibrée. Pour cela, on lance 10 000 fois cette pièce. On observe que la fréquence de « Face » obtenue est de 0,52.

1. Quelle est la taille de l'échantillon constitué ? Quelle est l'issue dont on observe la fréquence sur cet échantillon ?
2. D'après les simulations effectuées dans l'exemple de la page ci-contre, à quel intervalle cette fréquence observée aurait-elle de grandes chances d'appartenir si la pièce était équilibrée ?
3. Peut-on penser que cette pièce est équilibrée ?

Solution commentée

1. On répète 10 000 fois l'expérience aléatoire qui consiste à lancer cette pièce et à regarder si elle tombe sur « Face », on constitue donc un échantillon de taille 10 000.
La fréquence observée de 0,52 est celle de l'issue « Face ».

2. Pour des échantillons de taille 10 000 avec une pièce équilibrée, on a constaté qu'environ 95 % des fréquences d'apparition de « Face » appartiennent à l'intervalle [0,49 ; 0,51].
Si la pièce étudiée était équilibrée, la fréquence observée de « Face » aurait donc de grandes chances de se trouver dans cet intervalle.

3. La fréquence observée n'appartient pas à cet intervalle puisqu'elle est égale à 0,52. On peut donc penser que la pièce n'est probablement pas équilibrée.

EXERCICE 8 p. 356

Exercice résolu 2 Estimer une proportion

Une société de dépannage informatique souhaite s'implanter dans une petite ville. Pour être assurée d'une certaine clientèle, elle propose un questionnaire à 1 200 personnes choisies au hasard dans cette ville.

À la question « Vous êtes-vous déjà dit qu'un tel service manquait dans votre ville ? », 696 personnes interrogées ont répondu « Oui ».

1. Quelle est la taille de l'échantillon constitué ?
2. Quelle est la fréquence des personnes de cet échantillon qui ont déjà dit qu'un tel service manquait dans leur ville ?
3. En déduire une estimation ponctuelle de la proportion réelle de personnes s'étant déjà dit qu'un tel service manquait dans leur ville.

Solution commentée

1. L'échantillon constitué est de taille 1 200.

2. La fréquence des personnes de cet échantillon qui ont déjà dit qu'un tel service manquait dans leur ville est $f = \frac{696}{1\,200} = 0{,}58$ soit 58 %.

3. Une estimation ponctuelle de la proportion réelle de personnes s'étant déjà dit qu'un tel service manquait dans leur ville est de 0,58, soit 58 %.

EXERCICE 13 p. 357

Notion d'échantillon

1 On lance 1 000 fois une pièce équilibrée et on regarde si on obtient « Pile » ou « Face ».
On répète 500 fois cette expérience.
1. Combien d'échantillons a-t-on constitués ?
2. Quelle est la taille de ces échantillons ?

2 On lance 100 fois deux dés équilibrés et on regarde si on obtient un double 6 ou non.
On répète 1 000 fois cette expérience.
1. Combien d'échantillons a-t-on constitués ?
2. Quelle est la taille de ces échantillons ?

3 L'étiquetage d'un sac de 100 kg de café précise qu'il contient 30 % de robusta et 70 % d'arabica. On prélève dans ce sac une poignée de 153 grains de café et on obtient 45 grains de robusta.

1. Indiquer la population étudiée, le caractère étudié, sa proportion théorique et la taille de l'échantillon.
2. Calculer la fréquence du caractère dans cet échantillon.

4 Dans l'Union européenne, la proportion de femmes de 30-34 ans diplômées de l'enseignement supérieur est égale à 43,4 % en 2015 (source Eurostat).
On décide d'interroger, en 2015, 1 000 femmes de l'Union européenne âgées de 30 à 34 ans. 480 répondent qu'elles ont obtenu un diplôme de l'enseignement supérieur.
1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quel est le caractère étudié ?
3. Quelle est la proportion p de ce caractère pour l'ensemble de la population étudiée ?
4. Quelle est la taille de l'échantillon ?
5. Quelle est la fréquence du caractère étudié dans cet échantillon ?

1. Modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire

Exemples

On considère l'expérience aléatoire suivante.
Un joueur lance un dé cubique équilibré : si le résultat est 6, le joueur gagne 9 €, sinon le joueur perd 3 €.

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Valeur du gain	–3	–3	–3	–3	–3	9

On peut considérer le « gain algébrique » du joueur : ce gain est égal soit à 9 (s'il gagne), soit à –3 (s'il perd). Ce gain est donc une variable qui peut prendre deux valeurs selon le résultat de l'expérience aléatoire. On peut modéliser cette expérience aléatoire en définissant un univers composé des six issues correspondant aux résultats du dé, puis en associant à chacune de ces issues une valeur du gain.

2. Variable aléatoire

Définition

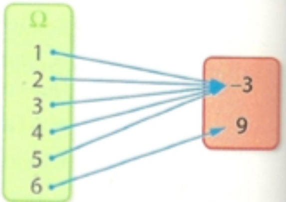
On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini noté Ω.
Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Définir une variable aléatoire X consiste donc à associer, à chaque issue de l'expérience aléatoire, un nombre réel.

Exemple

On considère le jeu précédent et on note X le gain algébrique du joueur.
X est une variable aléatoire définie sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, et qui peut prendre les valeurs –3 et 9.



Lorsque le résultat du dé est 1, 2, 3, 4 ou 5, X prend la valeur –3.
On note cet évènement $\{X = -3\}$.
Lorsque le résultat du dé est 6, X prend la valeur 9.
On note cet évènement $\{X = 9\}$.

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est donner, pour chaque valeur x_i que peut prendre X, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

Exemples

Dans l'exemple précédent, l'évènement $\{X = 9\}$ est réalisé par une seule issue : 6. Sa probabilité vaut $\frac{1}{6}$.
L'évènement $\{X = -3\}$ est réalisé par les issues 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Sa probabilité vaut $\frac{5}{6}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc donnée dans le tableau ci-contre.

x_i	–3	9
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque

Pour une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a toujours :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1.$$