HAC310X Mathématiques pour la chimie S3

J.L. Ramírez Alfonsín
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
Université de Montpellier
Place Eugène Bataillon, 34095, Montpellier

2 septembre 2024

Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle

1.1 Quelques définitions et terminologie

Une fonction f est la donnée
- d'un ensemble de départ D, aussi appelé *domaine de définition* de f, et souvent noté D_f ;
- d'un ensemble d'arrivée A ;
- d'un procédé qui à chaque élément x de l'ensemble de départ D associe un (et un seul) élément de l'ensemble d'arrivée A, qu'on note $f(x)$ et qu'on appelle *image* de x par f.

On note

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f & \to & A \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Nous allons considérer principalement au cas des *fonctions d'une variable réelle*, c'est-à-dire les fonctions dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et dont le domaine de définition D_f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

On appelle *image* de f l'ensemble $\{f(x); x \in D\}$; il est noté $f(D)$ ou encore Imf. On appelle *image réciproque* d'un sous-ensemble Y de A par f l'ensemble des antécédents des éléments de Y, c'est-à-dire $\{x \in D, f(x) \in Y\}$. L'image réciproque est souvent notée $f^{-1}(Y)$

On dit que

- f est *surjective* (ou que f est une *surjection*) lorsque chaque élément y de A possède au moins un antécédent. Cela revient à dire que $A = f(D)$. L'équation $f(x) = y_0$ a toujours (au moins) une solution ;

- f est *injective* (ou que f est une *injection*) lorsque chaque élément y de A possède au plus un antécédent. Si l'équation $f(x) = y_0$ a une solution, elle est unique ;

- f est *bijective* (ou que f est une *bijection*) lorsque chaque élément y de A possède exactement un antécédent. L'équation $f(x) = y_0$ a toujours exactement une solution.

1.1.1 Opérations sur les fonctions

Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions d'une variable réelle, on définit leur *somme* et leur *produit* comme les deux fonctions d'une variable réelle $D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ données respectivement par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Le domaine de définition de $f+g$ et celui de fg sont donc $D_f \cap D_g$.

Exemple 1 *Le produit des fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $1/x : \mathbb{R} \to \setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, donne la fonction constante $1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (et non $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).*

On définit également la composée $g \circ f$ de f par g (attention à l'ordre, ça n'est nécessairement pas la même chose que $f \circ g$) par le procédé $g \circ f(x) = g(f(x))$. Le domaine de définition de la fonction $g \circ f$ est donc l'ensemble des $x \in D_f$ vérifiant $f(x) \in D_g$.

Exemple 2 *La fonction $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ composée par $\sqrt{x} : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, on obtient la fonction valeur absolue $|x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, car un carré est toujours ≥ 0.*

Si f est injective, on a défini $f^{-1} : Im(f) \to \mathbb{R}$ et on a

$$(f^{-1}f)(x) = x \text{ pour tout } x \in D_f \text{ et } (f \circ f^{-1})(y) = y \text{ pour tout } y \in Imf.$$

1.1.2 Représentation des fonctions

Le *graphe* de la fonction f, ou *courbe représentative* C_f de f, est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x décrit D, tracé dans un repère donné.

Exemple 3 *La fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$:* $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

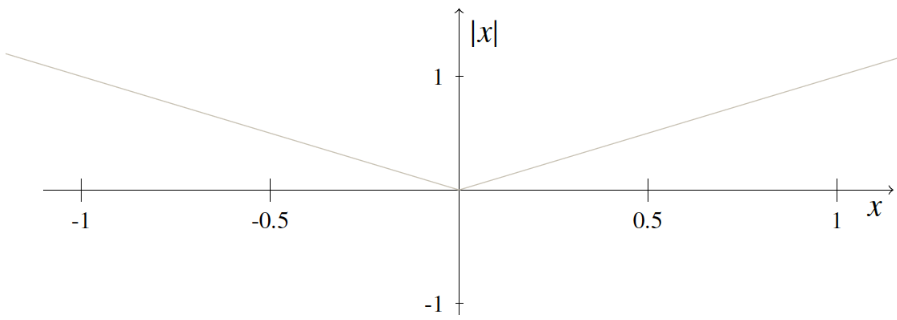

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction valeur absolue

Exemple 4 *La fonction* partie entière *$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $E(x)$ = le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

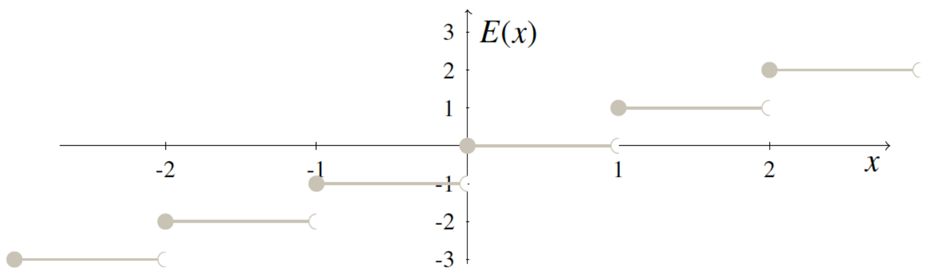

FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction partie entière

Une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite

- *paire* si son domaine est symétrique : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et si $f - x) = f(x)$. Graphiquement, la courbe C_f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

- *impaire* si son domaine est symétrique : $\forall x \in D_f$ et si $f(-x) = -f(x)$. Graphiquement, la courbe C_f est symétrique par rapport à l'origine.
Attention ! Une fonction qui n'est pas paire n'a aucune raison d'être impaire.

Enfin, une fonction f est dite *périodique* s'il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall x \in D_f, x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$. Le plus petit réel $T > 0$ vérifiant cette propriété (s'il existe) s'appelle *la période* de f . Graphiquement, la courbe C_f est invariante par translation de vecteur $T \cdot \overrightarrow{t}$.

Exemple 5 *Les fonctions* cos *et* sin *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $[-1; , 1] \subset \mathbb{R}$. *Les fonctions cosinus et sinus sont* 2π*-périodiques. La fonction sinus est impaire, tandis que la fonction cosinus est paire.*

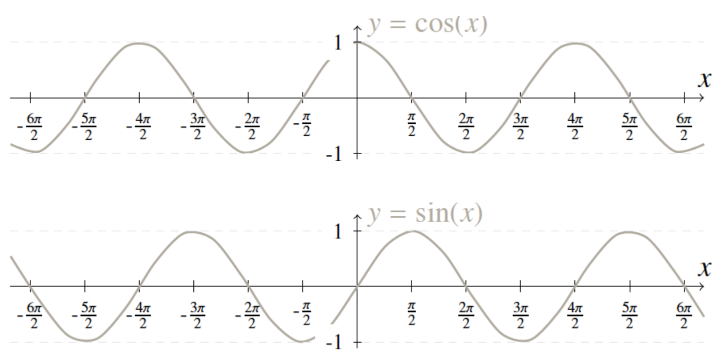

FIGURE 1.3 – Graphes des fonctions cosinus et sinus.

1.1.3 Limites

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I, sauf éventuellement en x_0. On dit que f *tend vers une limite* ℓ quand x tend vers x_0 si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ pour tous les x assez proches de x_0. De maniȓe rigoureuse, on dit :"pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, dès que x est dans le domaine de f et à distance inférieure à α de x_0, alors $f(x)$ est à distance inférieure à ϵ de ℓ" ; on peut dire cela en abrégé de la manière suivante :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell)| < \epsilon.$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Exemple 6 *(a)* $f(x) = x; \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \geq 0 \\ 1 & si\ x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ *n'existe pas, mais on dit que* f *possède une limite à gauche en* 0 *(on fait tendre* x *vers 0 avec* $x < 0$*) et une limite à droite en 0 (idem avec* $x > 0$*) ; on écrit* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

1.1.4 Continuité

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *continue en un point* $x_0 \in I$ si elle admet une limite en ce point (cette limite est forcément égale à $f(x_0)$). Une fonction est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Exemple 7 *Un premier exemple simple de fonction continue est* $f(x) = x$. *En guise d'exemple typique de fonction qui n'est pas continue, on peut citer la fonction définie par* $f(x) = 0$ *lorsque* $x \geq 0$ *et* $f(x) = 1$ *lorsque* $x < 0$ *(dont le graphe est donné dans la figure 1.4) : son graphe a un saut en 0 et on constate qu'elle n'a pas de limite en 0 (elle y a une limite à gauche qui vaut 0, et une limite à droite qui vaut 1).*

Théorème 1.1.1 *(***Théorème des extrema***) Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors* f *a un maximum et un minimum, c'est-à-dire, il existe* c *et* d *dans* $[a, b]$ *tel que* $f(c) \geq f(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *et* $f(d) \leq f(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$.

Le fait que l'intervalle de définition soit fermé et borné est essentiel (de même que la continuité de la fonction) ; par exemple, $f(x) = 1/x$ définie sur $]0; 1[$ n'a pas de maximum sur cet intervalle. Ce théorème est illustré dans la figure 1.5.

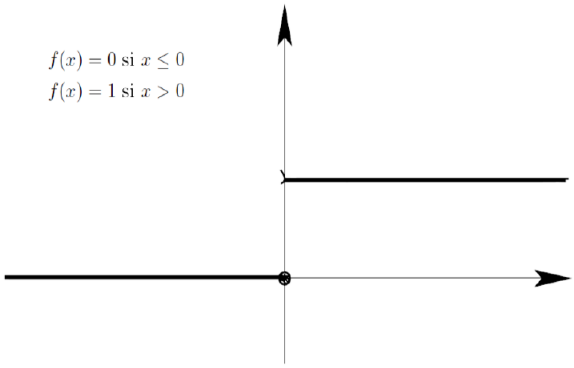

FIGURE 1.4 – Graphe d'une fonction non continue.

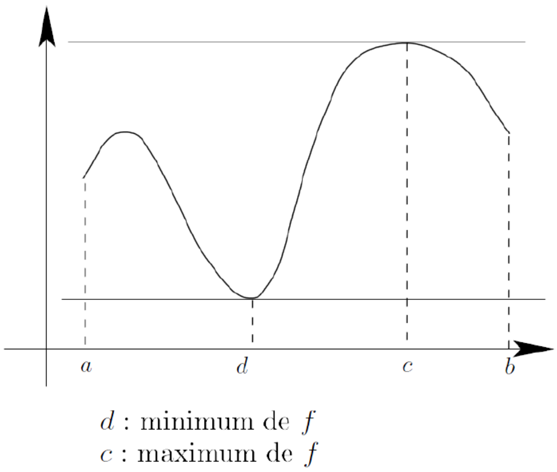

FIGURE 1.5 – Illustration du théorème des extrema.

1.2 Dérivation

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est *dérivable* en $x_0 \in I$ si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. On note alors cette limite $f'(x_0)$. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est *dérivable* sur I.
L'interprétation géométrique de la dérivée est classique : $f'(x_0)$ est la pente de la tangente au graphe de f en x_0. Notons que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ représente la pente de la droite qui joint $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ et $(x_0, f(x_0))$.

Fonction f	Dérivée f'
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

TABLE 1.1 – Les dérivées de quelques fonctions usuelles.

Les règles de dérivation des sommes, produits et fonctions composées présentées ci-dessous permettent de dériver des fonctions plus compliquées.
(1) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g, \lambda f$ et fg sont dérivables et

$$(f+g)' = f' + g'; (\lambda f)' = \lambda f'; (fg)' = f'g + fg'$$

(2) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

(3) Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont dérivables alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

(4) Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective, et $x \in I$. Alors, $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y = f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$, et dans ce cas

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

La dérivée d'une fonction est un outil très puissant pour l'étude de la fonction. Deux résultats illustrent ceci.

Théorème 1.2.1 *Soit $f : [a;,b] \to \mathbb{R}$. Si $c \in]a,b[$ est un extremum de f et si f est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.*

Théorème 1.2.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ; f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I. Enfin f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.*

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si pour tout couple de points (A, B) du graphe de f , la corde $[A, B]$ est située au dessus de la partie du graphe de f comprise entre A et B.
Si pour tout couple (A, B), la corde $[A; B]$ est située au dessous de la partie du graphe de f comprise entre A et B, on dit que la fonction f est *concave.*

Théorème 1.2.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f' : I \to \mathbb{R}$ soit dérivable. Si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I ; si $f'' \leq 0$ sur I alors f est concave sur I.*

Les points où la fonction passe de convexe à concave (ce sont donc des points où la dérivée seconde s'annule) sont appelés *points d'inflexion*; ce sont des points où la fonction colle de très près à sa tangente.

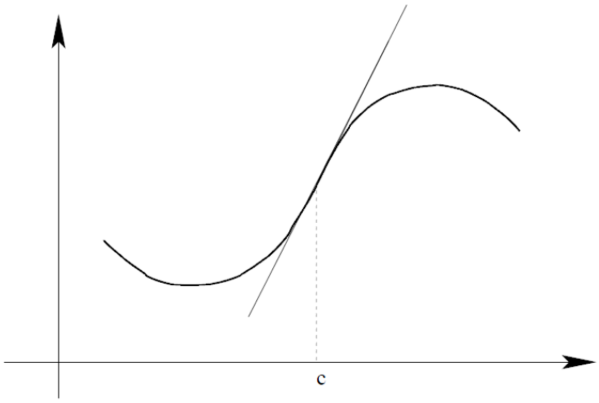

FIGURE 1.6 – c est un point d'inflexion (la fonction est convexe avant c et concave après).

1.3 Intégration

1.3.1 Primitives

Une *primitive* d'une fonction f donnée est une fonction F dérivable sur le domaine de définition de f dont la dérivée est $f : F' = f$.

Exemple 8 *La fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F = \frac{x^7}{7} + e^{5x} + 2\ln(x) - 8$ est une primitive de $f(x) = x^6 + 5e^{5x} + \frac{2}{x}$.*

Un fait souvent utile, notamment dans la résolution des équations différentielles (Chapitre **??**) : une fonction de la forme

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

où α est un réel non-nul et P est un polynôme de degré d (c'est-à-dire, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ avec $a_0, \ldots a_d$ constantes), admet une unique primitive de la forme

$$F(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

où Q est un polynôme de degré d (donc de la forme $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d$).

Exemple 9 *Cherchons une primitive de $f(x) = x^2 e^x$. On sait qu'il existe une primitive de la forme $F(x) = (a + bx + cx^2)e^x$. On dérive cette expression et on trouve $F'(x) = (a + b + bx + 2cx + cx^2)e^x$, qui doit être égal à $x^2 e^x$. C'est le cas si $a + b = 0, b + 2c = 0$ et $c = 1$. Ce système de trois équations linéaires à trois inconnues est facile à résoudre, et donne $c = 1, b = -2$ et $a = 2$. On trouve donc la primitive $F(x) = (2 - 2x + x^2)e^x$.*

Nous avons que si F est une primitive de f alors toutes les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
On note

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

où $f(x)$ est l'*intégrande*, $d(x)$ la *variable d'intégration*, $F(x)$ une primitive de f et C *constante d'intégration*.

Exemple 10 *1. si $k \in \mathbb{R}$ est une constante,*

$$\int k dx = kx + C.$$

2. si $n \neq -1$,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

(la formule est valable pour $x \in \mathbb{R}$ si n est un entier positif, pour $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$ si n est un entier inférieur ou égal à -2 et pour $x \in]0, +\infty[$ si n n'est pas un entier)

3. pour $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C.$$

4. si $k \in \mathbb{R}^*$ est une constante,

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

5. $\int \cos x \ dx = \sin x + C$

6. $$\int \sin x \ dx = -\cos x + C$$
7. *pour* $x \in]0, +\infty[$,
$$\int \ln x \ dx = x \ln x - x + C.$$

Proposition 1.3.1 *Si* $k \in \mathbb{R}$ *et* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions définies sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$,
— $\int (kf)(x)dx = k \int f(x)dx$
— $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Exemple 11 *1.*
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x} dx &= \int \left(x - 3 + \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \left(\int x dx \right) - 3 \left(\int dx \right) + 4 \left(\int \frac{dx}{x} \right) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln |x| + C \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \int \left(e^{-4x} + \frac{6}{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}} \right) dx &= \left(\int e^{-4x} dx \right) + 6 \left(\int \frac{dx}{x} \right) - 2 \left(\int \frac{dx}{x^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{e^{-4x}}{4} + 6 \ln x + \frac{4}{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

3. Cherchons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$ *et* $f(1) = 7$. *Alors*
$$f(x) = \int \left(5x^4 + 6x^2 + 1 \right) dx = x^5 + 2x^3 + x + C$$
pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. *Pour trouver la valeur de* C, *on utilise* $f(1) = 7$, *qui donne* $1^5 + 2 * 1^3 + 1 + C = 7$, *et donc* $C = 3$. *Donc*
$$f(x) = x^5 + 2x^3 + x + 3.$$

4. La vitesse d'un véhicule au temps t *est donnée par* $v(t) = 50 + 30e^{-t}$. *On veut déterminer la distance parcourue entre* $t = 0$ *et* $t = 1$. *On note* $d(t)$ *la distance parcourue au temps* t, *avec la convention* $d(0) = 0$. *On cherche donc* $d(1)$. *Pour tout* $t \in [0, 1]$, *on a*
$$d'(t) = v(t) = 50 + 30e^{-t}.$$
Donc
$$d(t) = \int \left(50 + 30e^{-t} \right) dt = 50t - 30e^{-t} + C,$$
pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. *Or* $d(0) = 0$, *donc* $50 * 0 - 30e^{-0} + C = 0$, *et donc* $C = 30$. *D'où*
$$d(1) = 50 - 30e^{-1} + 30 = 80 - 30e^{-1} \ (\approx 69).$$

1.3.2 Changement de variable (ou substitution)

Supposons que l'on cherche à calculer une primitive d'une fonction $f(x)$ que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = g(u(x))u'(x),$$

où g et u sont deux nouvelles fonctions. Supposons par ailleurs que l'on sâche calculer une primitive G de la fonction g :

$$\int g(x)dx = G(x) + C.$$

D'après la formule qui donne la dérivée de la composée de deux fonctions, on sait que

$$\frac{d}{dx}G(u(x)) = G'(u(x))u'(x) = g(u(x))u'(x) = f(x).$$

f est donc la dérivée de $G \circ u$, qui est donc une primitive de f :

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int G'(u(x))u'(x)dx = \int \frac{d}{dx}G(u(x))dx = G(u(x)) + C.$$

Exemple 12 *1. Calculons $\int (5x+4)^{1/3}dx$. On pose $u = 5x+4$. Alors $du = 5dx$, d'où $dx = \frac{du}{5}$ et donc*

$$\int (5x+4)^{1/3}dx = \int u^{1/3}\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\frac{u^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{20}(5x+4)^{4/3} + C.$$

2. Calculons $\int xe^{3x^2+1}dx$. On pose $u = 3x^2+1$. Alors $du = 6xdx$, d'où $xdx = \frac{du}{6}$ et donc

$$\int xe^{3x^2+1}dx = \int e^u\frac{du}{6} = \frac{1}{6}e^u + C = \frac{1}{6}e^{3x^2+1} + C.$$

3. Calculons $\int \frac{2x^3+3x^2}{x^4+2x^3+1}dx$. On pose $u = x^4+2x^3+1$. Alors $du = (4x^3+6x^2)dx = 2(2x^3+3x^2)dx$, d'où $(2x^3+3x^2)dx = \frac{du}{2}$ et donc

$$\int \frac{2x^3+3x^2}{x^4+2x^3+1}dx = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\ln(|u|) + C = \frac{1}{2}\ln(|x^4+2x^3+1|) + C.$$

1.3.3 Intégration par parties

Supposons que l'on cherche à calculer une primitive d'une fonction $f(x)$ que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = u(x)v'(x),$$

où u et v sont deux fonctions. D'après la formule de dérivation d'un produit, on sait que

$$(uv)' = uv' + u'v,$$

et donc

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

En intégrant cette dernière égalité, on en déduit la formule d'intégration par parties

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 13 *1. Calculons $\int \ln x dx$. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = 1/x$, $v(x) = x$, et donc*

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

2. Calculons $\int x^2 e^{3x} dx$. On pose $u_0(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{3x}$. Alors $u_0'(x) = 2x$, $v(x) = \frac{e^{3x}}{3}$, et donc

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx.$$

On s'est donc ramené à calculer une nouvelle intégrale, ce que l'on va faire à l'aide d'une nouvelle intégration par parties : on pose $u_1(x) = x$, et à nouveau $v'(x) = e^{3x}$. Alors $u_1'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{e^{3x}}{3}$, et donc, en reprenant le calcul précédent,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(x \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx \right) = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx \\ &= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{27} e^{3x} + C.\end{aligned}$$

1.3.4 Aire sous courbe et intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où a et b sont des réels, et $a < b$). On suppose dans un premier temps que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$. On considère l'aire $\mathcal{A}$ de la surface délimitée par les courbes d'équations $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ (dans un repère orthonormé), c'est à dire "l'aire sous le graphe de f entre a et b".
On subdivise cette surface en n tranches (où n est un nombre entier qu'on peut penser comme étant grand), de bases les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ (où $x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$, avec $k \in \{1, \cdots, n\}$), de largeur $x_{k+1} - x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

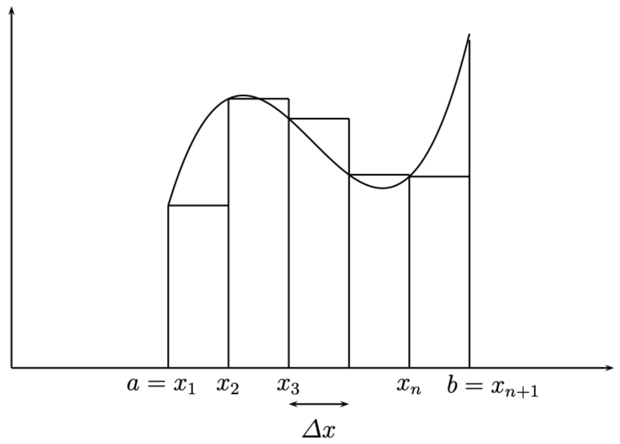

FIGURE 1.7 – Subdivision.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'**intégrale de f entre a et b**, notée $\int_a^b f(x)dx$ est définie par

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (f(x_1) + \cdots + f(x_n))\,\Delta x \quad \text{où} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

(l'intervalle $[a, b]$ ayant été subdivisé en n parts égales, x_k appartenant au $k^{\text{ième}}$ sous intervalle).
La définition vaut même si f n'est pas positive, mais si de plus $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ peut être interprétée comme l'aire sous le graphe de f sur l'intervalle $[a, b]$.
Le théorème suivant fait le lien entre les intégrales que l'on vient de définir et les primitives.

Théorème 1.3.2 (Théorème fondamental du calcul) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), et soit F une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

On note

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f, elle est du type $G(x) = F(x) + C$ pour une certaine constante C, et donc

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Propriétés Soit f, g continues sur $[a, b]$ et k une constante

1. $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (relation de Chasles)
   On a supposé ici que f est continue sur un intervalle qui contient a, b et c.

Exemple 14 *Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{1} (x-1)^2dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{0}^{1} \\ &= \left(\frac{0^2}{2} + 0\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) + \frac{(1-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^{-1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{6}.$$