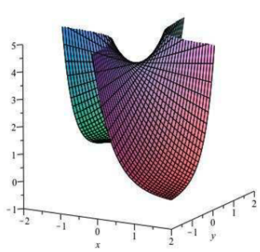
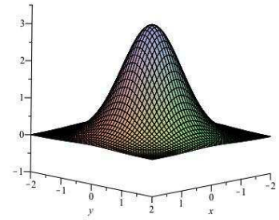
Feuille TD 4 : Fonctions à plusieurs variables

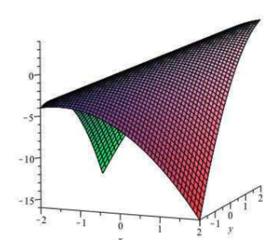
Exercice 1. Nous allons étudier la fonction $f(x, y) = y - x^2$.
a) Donner le plus grand domaine de définition possible pour f.
b) Calculer $f(1, 2)$.
c) Tracer les courbes de niveau $z = 0, z = 1$ et $z = 2$.
d) Tracer l'intersection du Surface-graphe $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $x = 0$.
e) Donner une représentation de $\mathcal{S}_f$ dans l'espace.

Exercice 2. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes ainsi que les points selles :
a) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$.
b) $f(x, y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$.
c) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8$.
d) $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$.
e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 1$.
f) $f(x, y) = x^2 + y^4$.

Exercice 3. En étudiant les extrema, associer à chaque figure la formule correspondante :
(i) $f(x, y) = 3e^{-x^2-y^2}$
(ii) $g(x, y) = x + y + 2xy - x^2 - y^2$
(iii) $h(x, y) = 4e^{xy}$


a)


b)


c)

Exercice 4. Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est utilisée. Des études ont montré qu'en laboratoire la durée de l'infection pouvait être modélisée par

$$D(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120,$$

où x est le dosage en mg du premier composé et y le dosage en mg du second. Comment minimiser la duréee de l'infection ?

Exercice 5. Une boîte en carton rectangulaire (plus rigoureusement parallélepipédique) ouverte sur le dessus a un volume de $32m^3$. Quelles doivent être ses dimensions pour que sa surface totale soit minimale ? (Autrement dit, quelles doivent être les dimensions pour obtenir une boite de $32m^3$ en utilisant le moins de carton possible ?)

Exercice 6. Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et, dans les cas il est, chercher f tel que $df = w_i$. :

a) $w_1 = 2xy\ dx + x^2\ dy$

b) $w_2 = xy\ dx - z\ dy + xz\ dz$

c) $w_3 = 2xe^{x^2-y}\ dx - 2e^{x^2-y}\ dy$

d) $w_4 = yz^2\ dx + (xz^2 + z)\ dy + (2xyz + 2z + y)\ dz$

Exercice 7. On considère la forme différentielle $w = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y\ dy$.

a) Montrer que w n'est pas exacte.

b) Trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x)w = df$. Préciser alors f. (On dit que φ est un *facteur intégrant.*)

Exercice 8. On considère la forme différentielle

$$w = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

a) Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?

b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_C w$ où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

c) La forme w est-elle exacte ?

Exercice 9. Calculer l'intégrale de la forme différentielle w le long du contour orienté C dans les cas suivants :

a) $w = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x + 1$ joignant les points $(0, -1)$ et $(0, 1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.

b) $w = (x - y^3)dx + x^3\ dy$ et C est le cercle de centre l'origine et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.

c) $w = xyz\ dx$ et C est l'arc $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 10. Calculer les intégrales multiples suivantes :

a) $\int\int_D (x + y)\ dx\ dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant 1, y \leqslant 1, x + y \geq 1\}$.

b) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy^2 dydx$. Donner la représentation de la région d'intégration.

c) $\int\int_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.

Révission et approfondissement

Exercice 11. Calculer les intégrales multiples suivantes :

a) $\int\int_{[-1,1]^2} |x+y|\ dx\ dy$.

b) $\int\int_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy$.

c) $\int\int\int_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\ dx\ dy\ dz$.

Exercice 12. On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

a) Calculer dx, dy et dz.

b) Vérifier que $xdx + ydy + zdz = rdr$. En déduire $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial r}{\partial z}$.