$t \longmapsto \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $t \longmapsto e^{\sin(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc en particulier $\int_x^{3x} e^{\sin(t)}\,dt$ est bien définie quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles, on a

$$\int_x^{3x} e^{\sin(t)}\,dt = \int_0^{3x} e^{\sin(t)}\,dt - \int_0^{x} e^{\sin(t)}\,dt$$

↳ Par le théorème fondamental de l'analyse, $\int_0^{3x} e^{\sin(t)}\,dt$ et $\int_0^{x} e^{\sin(t)}\,dt$ sont dérivables (et donc continues sur $\mathbb{R}$) car $t \longmapsto e^{\sin(t)}$ est continue. De plus

$$\frac{d}{dx}\int_x^{3x} e^{\sin(t)}\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^{3x} e^{\sin(t)}\,dt - \frac{d}{dx}\int_0^{x} e^{\sin(t)}\,dt$$

$$= 3e^{\sin(3x)} - e^{\sin(x)}$$

2) $f : x \longmapsto \int_1^x \sqrt{1+|\ln(t)|^2}\, dt$

$\forall x \in]0, ~~+1~~], \; |\ln(t)| = -\ln(t)$

$\Rightarrow |\ln(t)|^2 = (\ln(t))^2.$

OR $\ln(t)^2$ est continue sur $[x, 1]$ et est à valeurs dans $[0, \ln(x)^2]$

et $\sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1, +\infty[$ donc

$\sqrt{1+|\ln(t)|^2}$ est continue sur $[x, 1]$.

→ Par le TFA f est dérivable (donc continue donc définie) sur $]0, 1]$ et

$$f'(x) = \sqrt{1+|\ln(x)|^2}$$

$\Rightarrow$ Il en est de même pour $x \in [1, +\infty[$.

→ Montrons que f n'est pas définie en 0.

$\forall t \in]0, 1], \quad |\ln(t)|^2 \leq 1 + |\ln(t)|^2$

$\Rightarrow |\ln(t)| \leq \sqrt{1+|\ln(t)|^2}$

$\Rightarrow \int_x^1 |\ln(t)|\, dt \leq \int_x^1 \sqrt{1+|\ln(t)|^2}\, dt.$

$\Rightarrow -\int_x^1 \ln(t)\, dt \leq -f(x)$

$\Rightarrow f(x) \leq \int_x^1 \ln(dt)\, dt = 1 - \frac{1}{x}$

OR $\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$.

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

donc f n'est pas définie en 0 et donc par la relation de Chasles, f n'est pas définie sur $]-\infty, 0]$. Finalement, f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

3). $f : x \longmapsto \int_0^x \sqrt{1+t-2t^2}\, dt$

$-2t^2+t+1 \geqslant 0$?

$\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9 = 3^2$.

$t_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1$.

Ainsi $-2t^2+t+1 > 0 \Leftrightarrow t \in]-\frac{1}{2}, 1[$

il vient que $\sqrt{-2t^2+t+1}$ est bien définie sur $[-\frac{1}{2}, 1]$, est continue sur cette intervalle comme composition de fonction continues et est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, 1[$.

De plus, $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$, $f'(x) = \sqrt{1+x-2x^2}$

Exercice 10 :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2+x-6}$

$2x^2+x-6 = 0$? $\quad \Delta = 1 - 4\times 2\times(-6) = 49 = 7^2$.

$$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2 \quad , \quad x_2 = \frac{-1+7}{4} = 3/2$$

$\Rightarrow 2x^2+x-6 = 2(x+2)(x-3/2) = (x+2)(2x-3)$

f est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2, 3/2\}$ et est continue sur cet intervalle.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 3/2\}$, $\dfrac{1}{2x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x+2)(2x-3)}$

$\rightarrow$ Cherchons a et $b \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{2x-3}$.

$\Leftrightarrow a(2x-3) + b(x+2) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 0 \\ -3a+2b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ -3a-4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/7 \\ b = 2/7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{7(2x-3)} - \frac{1}{7(x+2)}$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3/2\}$, elle admet une primitive sur son intervalle de définition

et
$$\int f(x)\,dx = \frac{2}{7}\int^{x} \frac{1}{2t-3}\,dt - \frac{1}{7}\int^{x}\frac{1}{t+2}\,dt$$
$$= \frac{1}{7}\ln|2x-3| - \frac{1}{7}\ln|x+2| + c$$
$$= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-3}{x+2}\right| + c \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2x+1} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$\rightarrow$ f est continue et définie, sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

donc admet une primitive sur cet ensemble.

et $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt = -\frac{1}{(x-1)} + c = \frac{1}{1-x} + c$ où $c\in\mathbb{R}$

3) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-4x+5}$ $\quad \Delta = 16 - 4\times 5 = -9 = -3^2 < 0$.

$\rightarrow$ FORME CANONIQUE, on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq

$x^2-4x+5 = \alpha + (x-\beta)^2 = \alpha + x^2 - 2\beta x + \beta^2$.

$$\begin{cases} -2\beta = -4 \\ \alpha + \beta^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2-4x+5 = 1 + (x-2)^2 > 0$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive sur cet ensemble.

$$\int^{x} \frac{1}{1+(t-2)^2}\,dt \overset{\substack{s=t-2 \\ t=s+2}}{=} \int^{x-2} \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(x-2)+c$$

où $c \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+x-6} = \dfrac{x}{(2x-3)(x+2)}$

→ comme pour la question 1, f est définie et continue sur $\mathbb{R}/\{-2, \frac{2}{3}\}$ et admet donc une primitive sur cet ensemble.

→ Cherchons a et $b \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{x}{(2x-3)(x+2)} = \frac{a}{2x-3} + \frac{b}{x+2}.$$

$\iff a(x+2)+b(2x-3) = x$

$\iff \begin{cases} a+2b=1 \\ 2a-3b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2}b+2b=1 \\ a=\frac{3}{2}b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b=\frac{2}{7} \\ a=\frac{3}{7} \end{cases}$

Ainsi $\displaystyle\int^{x} \frac{t}{(2t-3)(t+2)}\,dt$

$= \frac{3}{7}\displaystyle\int^{x} \frac{1}{2t-3}\,dt + \frac{2}{7}\int^{x} \frac{1}{t+2}\,dt$

$= \dfrac{3\ln(|2x-3|)+4\ln(|x+2|)}{14} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-2x+1} = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

$\rightarrow$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}/\{1\}$.

$\rightarrow$ $u : x \longmapsto (x-1)^2 \implies u'(x) = 2x-2$.

On souhaite faire apparaître une forme du type $\dfrac{u'}{u}$.

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x-2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2}\right]$$

$$\int^x \frac{t}{(t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt + \int^x \frac{1}{(t-1)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2\right) + \frac{1}{1-x} + C$$

$$= \ln\left(|x-1|\right) + \frac{1}{1-x} + C. \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

6) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-4x+5}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x}{1+(x-2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x-4}{1+(x-2)^2} + \frac{4}{1+(x-2)^2}\right]$$

$$\implies \int^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-4}{1+(t-2)^2}\,dt + 2\int^x \frac{1}{1+(t-2)^2}\,dt.$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+(x-2)^2\right) + 2\arctan(x-2)$$

Exercice 11 :

1) $f : x \longmapsto x\, e^{-3x^2}$, f est continue sur $\mathbb{R}$

donc admet une primitive sur cet ensemble.

$u(x) = -3x^2$, $\quad u'(x) = -6x$.

$$f = -\frac{1}{6}\left(-6x\, e^{-3x^2}\right) = -\frac{1}{6}\left(u'(x)\, e^{u(x)}\right)$$

On reconnait une forme $u'(x) f'(u(x))$. Or u est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc.

$$\int^x f(t)\,dt = -\frac{1}{6}\int^x u'(t)\, e^{u(t)}\,dt = -\frac{e^{-3x^2}}{6} + C \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

2) $f : x \longmapsto \sin(x)^2 \cos(x)^3$, f est continue sur $\mathbb{R}$

donc admet une primitive sur cet ensemble

$$\sin(x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{4} = \frac{2 - e^{i2x} - e^{-i2x}}{4}$$

$$\cos(x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8}$$

$$f(x) = \left(\frac{2 - e^{i2x} - e^{-i2x}}{4}\right)\left(\frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\Big[2e^{i3x} + 6e^{ix} + 6e^{-ix} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - 3e^{i3x} - 3e^{ix} - e^{-ix}$$
$$- e^{ix} - 3e^{-ix} - 3e^{-i3x} - e^{-i5x}\Big].$$

$$= \frac{1}{32}\left[-e^{i5x} - e^{-i5x} - e^{i3x} - e^{-i3x} + 2e^{ix} + 2e^{-ix}\right]$$

$$= \frac{\cos(x)}{8} - \frac{\cos(3x)}{16} - \frac{\cos(5x)}{16}.$$

Ainsi $\displaystyle\int^x f(t)\,dt = \frac{\sin(x)}{8} - \frac{\sin(3x)}{48} - \frac{\sin(5x)}{80} + C$ où $C \in \mathbb{R}$

3) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3+e^{-x}}$, f est continue et définie sur $\mathbb{R}$ et donc admet une primitive sur cet ensemble.

$$f(x) = \frac{1}{3+e^{-x}} = \frac{e^x}{3e^x+1} = \frac{1}{3}\,\frac{3e^x}{3e^x+1}$$

En posant $u : x \longmapsto 3e^x+1$, on a $f(x) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc $\displaystyle\int^x f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt = \frac{1}{3}\int^{u(x)} \frac{1}{t}\,dt$

car u est C^1 sur $\mathbb{R}$

$$= \frac{\ln(1+3e^x)}{3} + C \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, f est définie sur $]-1,+\infty[$. Elle est continue sur cet ensemble et admet donc une primitive sur $]-1,+\infty[$.

$\forall x \in]-1,+\infty[$,

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow \int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt = \int^x \sqrt{1+t}\,dt - \int^x \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt$$

$$= \int^x (1+t)^{1/2}\,dt - \int^x (1+t)^{-1/2}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2(1+x)^{1/2} + c \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

(on a utilisé la formule $\int^x t^\alpha \, dt = \frac{1}{1+\alpha} t^{1+\alpha}$ $(\alpha \neq -1)$)

5) $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$, f est définie et continue sur $]0,+\infty[$ et admet donc une primitive sur cet ensemble.

$$\int^x t^2 \ln(t) \, dt \quad \underline{\text{IPP}}$$

$u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v(t) = \frac{t^3}{3}$, $v'(t) = t^2$

u et v sont C^1 sur $]0,+\infty[$.

$$= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int^x \frac{t^2}{3} \, dt$$

$$= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{3x^3 \ln(x) - x^3}{9}$$

6) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$, f est définie sur $]0,+\infty[$ et est continue, donc admet une primitive sur ~~cet ensemble~~.

$$\int^x f(t) \, dt = \int^x \frac{1/t}{\ln(t)} \, dt$$

$u(t) = \ln(t)$

u est C^1 sur $]0,+\infty[$.

$$= \int^x \frac{u'(t)}{u(t)} \, dt$$

$$= \ln(u(x)) = \ln(\ln(x))$$

Exercice 12

1) $x \mapsto x\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale existe.

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx$$

$u(x) = x, \quad u'(x) = 1$

$v(x) = -\cos(x), \quad v'(x) = \sin(x)$

IPP

u et v sont C^1 sur $[0, \pi/2]$.

$$= \left[-x\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \left[\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

2) $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

OR $-\pi/2 < -\pi/4 < \pi/4 < \pi/2$ donc l'intégrale est bien définie

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\,dx$$

OR sin est bijectif de $[\pi/4, \pi/4]$ dans $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ et C^1

donc on peut poser $y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$

$\Leftrightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_{-\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-y^2}\,dy$$

OR $\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{a}{1-y} + \frac{b}{1+y}$

où $a(1+y) + b(1-y) = 1$

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} (\Leftrightarrow) \; a = b = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left(\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-y}\,dy + \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1+y}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Big[\ln(1+y)\Big]_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} - \Big[\ln(1-y)\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}/2\right) - \ln\left(1-\sqrt{2}/2\right) - \ln\left(1-\sqrt{2}/2\right) + \ln\left(1+\sqrt{2}/2\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}\right) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)^2}\,dx$ $\qquad \sin(2x) = \dfrac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}$

$\qquad\qquad = \dfrac{(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}$

Lo définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale existe.

$\qquad\qquad = 2\cos(x)\sin(x)$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

$u(x) = 1+\cos^2(x)$

$u'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$

$$= - \left[\ln(1+\cos(x)^2) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\ln(1) + \ln(2) = \ln(2)$$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt$ $\longrightarrow$ $t \longmapsto \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale existe.

$u(x) = \arctan(x)$, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ Changement de variable

$$\Rightarrow \int_0^1 u'(t)\,u(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}u(t)^2\right)'dt$$

$$= \left[\frac{\arctan(t)^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\arctan(1)^2}{2} - \frac{\arctan(0)^2}{2}$$

$$= \frac{(\pi/4)^2}{2} = \frac{\pi^2}{32}$$

5) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(t)\,e^t\,dt$ $\longrightarrow$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale existe.

$u(x) = \cos(x)$ $\quad u'(x) = -\sin(x)$

$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$\underline{\text{IPP}}$ $\quad$ u et v sont C^1 sur $[-\pi/4, \pi/4]$.

$$= \left[\cos(x)\,e^x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(x)\,e^x\,dx.$$

On refait une IPP $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$

$v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$

u et v sont C^1 sur $[-\pi/4, \pi/4]$.

$$= \left[\cos(x)\, e^x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \left[\sin(x)\, e^x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x)\, e^x \, dx$$

$$\Rightarrow 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x) e^x \, dx = \left[\cos(x)\, e^x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \left[\sin(x)\, e^x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4}} + \sqrt{2}/2\, e^{\pi/4} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4}}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x) e^x \, dx = \frac{\sqrt{2}\, e^{\pi/4}}{2}$$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{e^t+1}} \, dt$

$t \longmapsto e^t$ est bijectif de $[0,1]$ dans $[1, e]$ donc on peut poser $s = e^t$

$\Rightarrow t = \ln(s)$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{s} ds$.

$$= \int_1^e \frac{s}{\sqrt{s+1}} \frac{1}{s} \, ds$$

$$= \int_1^e \frac{1}{\sqrt{s+1}} \, ds = 2\int_1^e \frac{1}{2\sqrt{1+s}} \, ds = 2\left[\sqrt{1+s}\right]_1^e$$

$$= 2\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{2}\right)$$

Exercice 13

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \, dx$$

1) $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^0 \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \pi/2$

$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = 1$

2) $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n+2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sin(x)^{n+1} \, dx.$

IPP: $u(x) = \sin(x)^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin(x)^n$

$v(x) = -\cos(x)$ $\quad v'(x) = \sin(x)$

u et v sont C^1 sur $[0, \pi/2]$ donc

$$\Rightarrow I_{n+2} = \underbrace{\left[-\cos(x)\sin(x)^{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 \sin(x)^n \, dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin(x)^2)\sin(x)^n \, dx$$

$$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

3) Soit $u_n = (n+1) I_{n+1} I_n$.

$$u_{n+1} = (n+2) I_{n+2} I_{n+1}$$

$$= (n+2) \times \frac{n+1}{n+2} I_n \times I_{n+1}$$

$$= (n+1) \times I_n \times I_{n+1} = u_n$$

Donc u_n est constante et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 = I_1 \times I_0 = \frac{\pi}{2}$$