TD8 (Partie 1)

Exercice 1 :

1) NON car $1 \notin (0, 0.1, 0.2, 0.8)$

2) NON car $0 \notin (0, 1, 0.2, 0.9, 1)$

3) NON car $0.7 > 0,5$

4) OUI car $\frac{0}{N} = 0$, $\frac{N}{N} = 1$ et
$\forall k \in \{0, \dots, N\}$, $\frac{k}{N} < \frac{k+1}{N}$.

5) NON car il y a une infinité de termes

Exercice 2 :

Soit $a < b$, $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$a \longmapsto a + (b-a)x$$

Si $(x_0, \dots, x_N)$ est une sub. de $[0,1]$

alors $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$.

Soit $y_k = \varphi(x_k) = a + (b-a)x_k$.

$\rightarrow y_0 = a$, $y_N = a + (b-a) = b$.

$x_k < x_{k+1} \Rightarrow (b-a)x_k < (b-a)x_{k+1} \Rightarrow y_k < y_{k+1}$

donc $(y_0, \dots, y_N)$ est une sub de $[a,b]$.

Exercice 3 :

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{si } x \in]1/2, 3/4] \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\to$ Montrons que f est adaptée à $(0, 1/2, 3/4, 1)$

$\Rightarrow \forall x \in]0, 1/2[, \ f(x) = 1$

$\forall x \in]1/2, 3/4[, \ f(x) = 0$

$\forall x \in]3/4, 1[, \ f(x) = 2$

donc f est adaptée à la sub. $(0, 1/2, 3/4, 1)$

et est donc en escalier.

2) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3[\\ 1 & \text{si } x \in]1/3, 2/3[\\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(x_0, \dots, x_N)$ une subdivision de $[0,1]$.

$\to$ si $x_1 \leq 1/3$ alors $f\left(\frac{x_1}{3}\right) = x_1$, $f\left(\frac{2x_1}{3}\right) = 2x_1$

donc f n'est pas constante sur $]0, x_1[$.

Exercice 4 :

1) Soit f et g deux fonctions en escalier

- Soit X une subdivision adaptée à f
  Y ——————————— g

- Soit Z la subdivision construite de l'union de X et Y. On note $Z = (z_0, \dots, z_N)$

- Alors f et g restent adaptées à Z donc

$\forall n \in [\![0, N-1]\!]$, f et g sont constantes sur $]z_n, z_{n+1}[$
donc $f+g$ est constantes sur $]z_n, z_{n+1}[$

donc Z est adaptée à $f+g$ et $f+g$ est en escalier.

2). Soit f une fonction en escalier

- Soit X une subdivision adaptée à f

↳ On note $X = (x_1, \dots, x_N)$, on a alors

$\forall n \in [\![0, N-1]\!]$, f est constante sur $]x_n, x_{n+1}[$
donc $|f|$ ———————————

donc X est adaptée à $|f|$ et $|f|$ est en escalier.

si $x_1 \geq 1/3$ alors $\frac{1}{6} \in]0, x_1[$ et $f(1/6) = 1/2$

et $\forall \alpha \in]1/3, x_1[$, $f(\alpha) = 1$.

donc f n'est pas constante sur $]0, x_1[$

Finalement f n'est jamais constante sur $]0, x_1[$ et n'est donc pas en escalier

3) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \begin{cases} n & \text{si } x \in]1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ une sub. de $[0,1]$.

Soit $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

$\rightarrow$ Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$

tq $\forall k \geq m$, $1 - \frac{1}{2^k} > 1 - \varepsilon$

en particulier pour $\varepsilon = 1 - x_{n-1} > 0$,

$\exists m \in \mathbb{N}$ tq $1 - \frac{1}{2^m} > 1 - (1 - x_{n-1}) = x_{n-1}$.

Ainsi, $\forall x \in]1 - \frac{1}{2^m}, 1 - \frac{1}{2^{m+1}}[$, $f(x) = m$.

$\forall x \in]1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1 - \frac{1}{2^{m+2}}[$, $f(x) = m+1$

donc f n'est pas constante sur $]x_{n-1}, 1[$ et n'est donc pas en escalier .

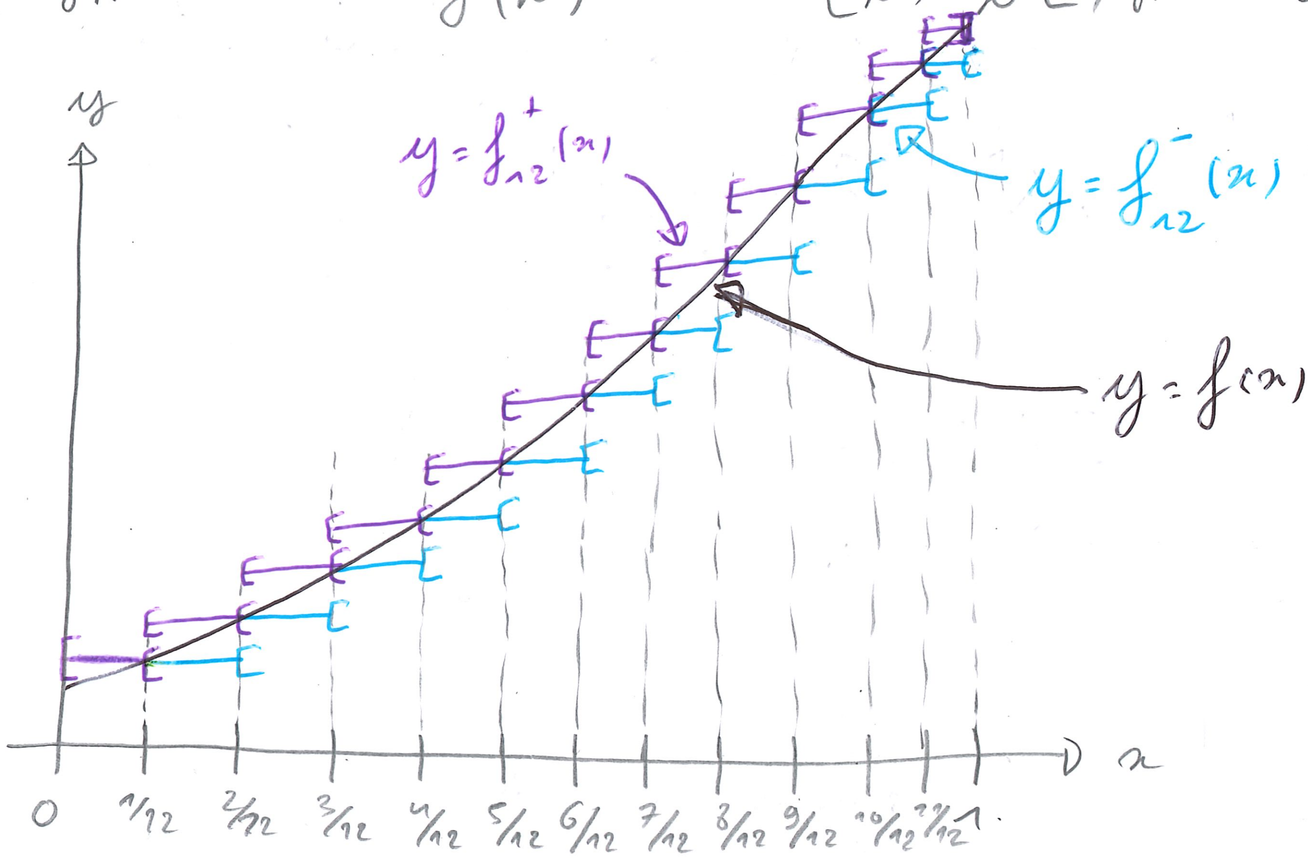
Exercice 5 :

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et $N \in \mathbb{N}^*$

$f_N^+ : x \longmapsto f\left(\frac{k+1}{N}\right)$ si $x \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$, $f_N^+(1) = f(1)$

$f_N^- : x \longmapsto f\left(\frac{k}{N}\right)$ si $x \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$, $f_N^-(1) = f(1)$

1)



2) Soit $X^{(N)} = (0, 1/N, 2/N, \dots, N-1/N, 1)$

(i.e. $X_k^{(N)} = k/N$)

alors $\forall k \in [\![0, N-1]\!]$, $f_N^+(x) = f\left(\frac{k+1}{N}\right)$

$f_N^-(x) = f(k/N)$

donc f_N^+ et f_N^- sont adaptées à $X^{(N)}$ donc elles sont en escaliers.

3) $\int_0^1 f_N^+(x) - f_N^-(x)\, dx$.

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k+1}{N} - \frac{k}{N}\right)\left(f\left(\frac{k+1}{N}\right) - f\left(\frac{k}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k+1}{N}\right) - f\left(\frac{k}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\Big[\left(\cancel{f(1/N)} - f(0)\right) + \left(\cancel{f(2/N)} - \cancel{f(1/N)}\right) + \cancel{\dots}$$
$$+ \left(\cancel{f(N-1/N)} - \cancel{f(N-2/N)}\right) + \left(f(1) - \cancel{f(N-1/N)}\right)\Big]$$

Par télescopage

$$= \frac{1}{N}\left(f(1) - f(0)\right)$$

4) <u>Rappel</u> : $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ si $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists (f^-, f^+) \in Esc([0,1])$ tq $f^- \leq f \leq f^+$

et $\int_0^1 (f^+(x) - f^-(x))\, dx < \varepsilon$

D'une part, comme f est croissante,

$\forall k \in [\![0, N-1]\!]$, $\forall x \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$

$f_N^-(x) = f\left(\frac{k}{N}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{N}\right) = f_N^+(x)$

ce qui prouve que $f_N^- \leq f \leq f_N^+$,

d'autre part, comme $\int_0^1 f_N^+(x) - f_N^-(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\int_0^1 f_N^+(x) - f_N^-(x)\,dx < \varepsilon$

(Par def de la limite). En conclusion,

on a bien $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$.

Exercice 6 :

- Soit $f, g \in \mathcal{L}^1([0,1])$

- Soit $\varepsilon > 0$, comme f est intégrable,

$\exists (f^-, f^+) \in Esc([0,1])$ tq $f^- \leq f \leq f^+$

$$\int_0^1 f^+(x) - f^-(x)\,dx < \varepsilon/2.$$

De même,

$\exists (g^-, g^+) \in Esc([0,1])$ tq $g^- \leq g \leq g^+$

$$\int_0^1 g^+(x) - g^-(x)\,dx < \varepsilon/2$$

il vient que $f^- + g^-$ et $f^+ + g^+$ sont deux fonctions en escaliers vérifiants $f^- + g^- \leq f + g \leq f^+ + g^+$

et $\int_0^1 ((f^+ + g^+)(x) - (f^- + g^-)(x))\,dx$

$= \int_0^1 f^+(x) - f^-(x)\,dx + \int_0^1 g^+(x) - g^-(x)\,dx$

$= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Exercice 7 :

Soit $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \int_a^x f(x)\,dx$

↳ Comme $f \in \mathcal{C}([a,b])$, F est continue sur $[a,b]$ et F est dérivable sur $]a,b[$ et $F'(x) = f(x)$.

Par le TAF, $\exists c \in]a,b[$ tq

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Exercice 8 :

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

f est décroissante sur $[0,1]$ donc

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{k/n}^{k+1/n} \frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2} dx \leq \int_{k/n}^{k+1/n} f(x)\, dx \leq \int_{k/n}^{k+1/n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2} \leq \int_{k/n}^{k+1/n} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{k+1/n} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

OR par la relation de Chasles

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{k+1/n} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$

DONC $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \geq \int_0^1 f(x)\,dx.$

et d'autre part.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{0}{n}\right)^2} \right)$$

$$= u_n - \frac{1}{2n}$$

et donc $u_n - \frac{1}{2n} \leq \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\Rightarrow u_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2n}.$$

ce qui prouve que

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leq u_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2n}.$$

2) Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

$\Rightarrow f(x) \leq \int_x^1 \ln(dt)\, dt = 1 - \frac{1}{x}$

OR $\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$.

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

donc f n'est pas définie en 0 et donc par la relation de Chasles, f n'est pas définie sur $]-\infty, 0]$. Finalement, f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

3). $f : x \longmapsto \int_0^x \sqrt{1 + t - 2t^2}\, dt$

$-2t^2 + t + 1 \geqslant 0$?

$\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9 = 3^2$.

$t_1 = \frac{-1+3}{-4}$, $t_2 = \frac{-1-3}{-4}$

$= -\frac{1}{2}$ $\qquad = 1$.

Ainsi $-2t^2 + t + 1 > 0 \iff t \in]-\frac{1}{2}, 1[$

il vient que $\sqrt{-2t^2 + t + 1}$ est bien définie sur $[-\frac{1}{2}, 1]$, est continue sur cette intervale comme composition de fonction continues et est dérivable sur $]-1/2, 1[$.

De plus, $\forall x \in]-1/2, 1[$, $f'(x) = \sqrt{1 + x - 2x^2}$.