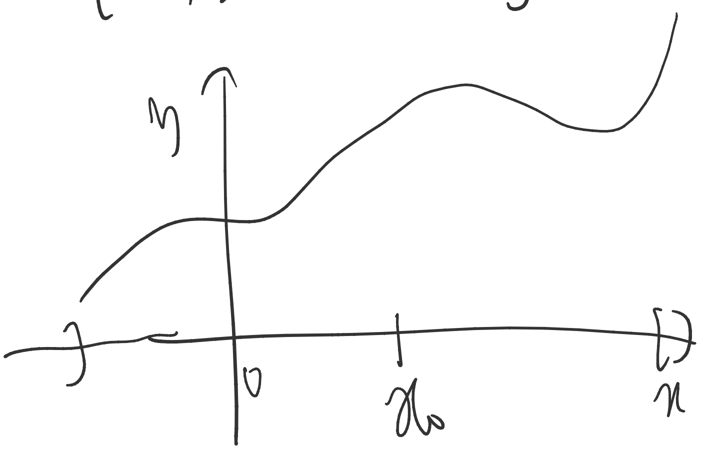
CM18
mercredi 14 avril 2021 08:51

Position d'une courbe par rapport à sa tangente.

Soit une courbe graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$

C d'équation $y = f(x)$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$



Soit $x_0 \in I$.

C a une tangente en x_0 ssi f est dérivable au point x_0 et sa tangente a pour équation :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = \underset{\substack{\shortparallel \\ y_0}}{f(x_0)} + \underbrace{f'(x_0)}_{\substack{\text{pente de la} \\ \text{tangente à } \mathcal{C} \\ \text{au point } (x_0, y_0).}}(x - x_0)$$

Or f dérivable en x_0

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

(Formule de Taylor - Young à l'ordre $\underline{1}$ en x_0).

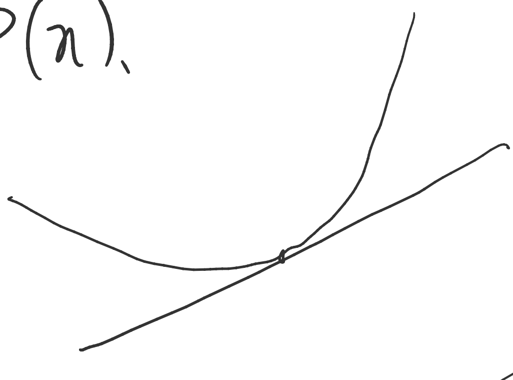
D.L. de f à l'ordre 1 en x_0.

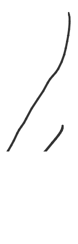
Partie principale =

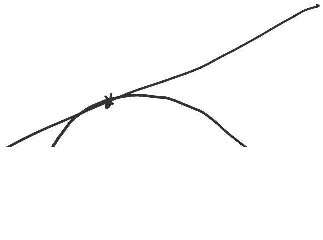
$$\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P(x)}$$

L'équation de la tangente est donc

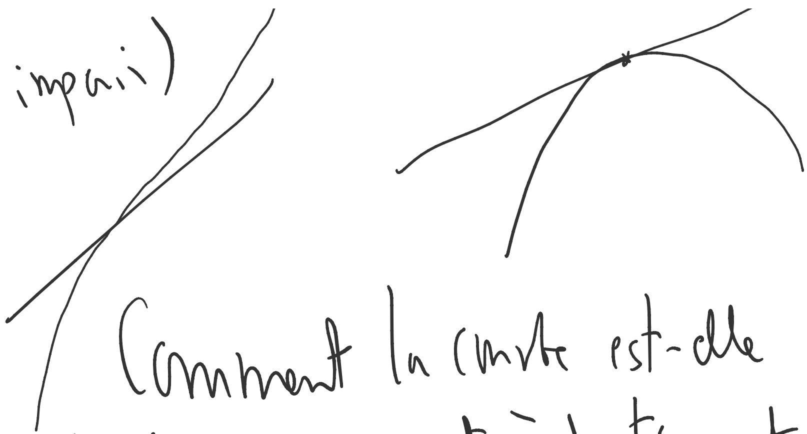
$y = P(x)$.







(k impair)



'' '' $a_k < 0$)

Comment la courbe est-elle située par rapport à la tangente ?

$(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente $\iff f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

en-dessous $\iff f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Ça dépend donc du signe de

$r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$.

<u>Th</u>. Supposons que f ait un D.L. à l'ordre $k \geq 2$ en x_0 de la forme

$$f(x) = \underset{f(x_0)}{\underset{\shortparallel}{a_0}} + \underset{f'(x_0)}{\underset{\shortparallel}{a_1}}(x-x_0) + \underbrace{a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^k}_{r(x)}$$

avec $a_k \neq 0$

Alors f est au-dessus de sa

Alors f est au-dessus de sa
tangente au voisinage de x_0
ssi k pair et $a_k > 0$
f est au-dessous
ssi k pair et $a_k < 0$
f traverse sa tangente en x_0
ssi k impair.
(on dit qu'on a un point d'inflexion)

Ex $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

la tangente au graphe de de sin
en $(0,0)$ est la droite $y = x$
$k = 3$
la courbe traverse le graphe en ce point
C'est un point d'inflexion.

---

les développements limités permettent

Les développements limités permettent de calculer des limites.

Soit $f(x) = (1+ax)^{1/x}$

$a \in \mathbb{R}$

défini si $x > 0$

et $1 + ax > 0$

si $a > 0$ $\quad 1 + ax > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{a}$

$D_f =]0, +\infty[$.

si $a < 0$ $\quad 1 + ax > 0 \Leftrightarrow ax > -1$

$\Leftrightarrow x < -1/a$

$D_f =]0, \frac{1}{|a|}[$

si $a = 0$ $\quad D_f =]0, +\infty[$.

Quelle est la limite de f en 0 ?

$1/x$

$$f(x) = (1+ax)^{1/x}$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)}$$

$$\frac{1}{x}\ln(1+ax) = \frac{1}{x}(ax + o(x))$$

$$\left(\ln(1+u) = u + o(u)\right)$$

$$= a + o(1) \to a \text{ qd } x \to 0$$

$$(1+ax)^{1/x} \to e^a \text{ qd } x \to 0.$$

Pour $x = 1/n$

$$\boxed{e^a = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} .$$

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Autre exemple

Etudions la limite en 0 de

$$\frac{sh(x) - \sin(x)}{x\,(\cos x - 1)}$$

forme indéterminée $\frac{0-0}{0\times(1-1)}$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$sh(x) - \sin(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$x\,(\cos x - 1) = x\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^k\, o(x^l) = o(x^{k+l}) \\ o(x^k)\, o(x^l) = o(x^{k+l}) \end{array}}$$

$$\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Ce...

$$f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

$o(1) \to 0$
qd $x \to 0$.

$$= \cancel{\frac{x^3}{x^3}} \, \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)}$$

$\longrightarrow -\frac{2}{3}$ qd $x \to 0$.