CM 16

mardi 6 avril 2021 20:25

Calculs de développements limités

Le reste d'un D.L. : la notation de Landau.

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Définition On dit que

$$f(x) = o(g(x)) \text{ en } 0$$

"petit o de $g(x)$"

"f est négligeable devant g au voisinage de 0"

s'il existe $\alpha > 0$ et une fonction

$$\varepsilon : I \cap]-\alpha, +\alpha[\to \mathbb{R}$$

tq

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x) \text{ pour } x \in I \cap]-\alpha, \alpha[$$

et $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

Attention $o(g(x))$ désigne en fait une classe de fonctions et non une fonction particulière.

On peut donc écrire $f(x) = o(g(x))$

et $h(x) = o(g(x))$

On peut ...

et $h(x) = o(g(x))$

sans que f soit égal à h.

Par exemple $f(x) = o(x^n)$ en 0 avec $n \in \mathbb{N}$

signifie que $f(x) = \varepsilon(x)\, x^n$ $\quad \varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

Se donner un DL. de f à l'ordre n en 0 revient donc à écrire

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}_{\text{partie principale du D.L.}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{reste négligeable devant } x^n}$$

Remarque $f(x) = a + o(1)$ en 0

signifie que $f(x) \to a$ qd $x \to 0$.

<u>Calculs sur les restes.</u>

I intervalle contenant 0

$f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$

Si $\begin{cases} f_1(x) = o(x^n) \\ f_2(x) = o(x^n) \end{cases}$ en 0 alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$f_2(x) = o(x^n)$

$\lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = o(x^n)$ en 0.

<u>Dém</u> $f_1(x) = \varepsilon_1(x) x^n$ $\quad \varepsilon_1(x) \to 0$ qd $x \to 0$

$f_2(x) = \varepsilon_2(x) x^n$ $\quad \varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$

$\lambda f_1(x) + \mu f_2(y) = \underbrace{\left(\lambda \varepsilon_1(x) + \mu \varepsilon_2(x)\right)}_{\varepsilon_3(x)} x^n$

$\varepsilon_3(x) \to 0$ qd $x \to 0$. $\quad \square$

Soient I intervalle contenant 0.

$f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = o(x^{n_1})$ $\quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

$f_2(x) = o(x^{n_2})$

Alors $f_1(x) f_2(x) = o(x^{n_1+n_2})$

De plus: $f_1(x) = o(x^{n_1+n_2})$

$\iff f_1(x) = x^{n_1} o(x^{n_2})$ en 0.

<u>Dém</u> $f_1(x) = o(x^{n_1})$ $\quad f_1(x) = \varepsilon_1(x) x^{n_1}$

$f_2(x) = o(x^{n_2})$ $\quad f_2(x) = \varepsilon_2(x) x^{n_2}$

$\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

Alors $f_1 f_2(x) = \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x) x^{n_1+n_2}$

Alors $f_1 f_2(x) = \underbrace{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)}_{\varepsilon_3(x)} x^{n_1+n_2}$ $\quad \varepsilon_3(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

$f_1(x) = o(x^{n_1+n_2})$ en 0

$\iff f_1(x) = \varepsilon_1(x)\, x^{n_1+n_2}$ $\quad \varepsilon_1(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

$f_1(x) = x^{n_1}\, o(x^{n_2})$

$\iff f_1(x) = x^{n_1}\, \varepsilon_2(x)\, x^{n_2}$ $\quad \varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

C'est clairement la même chose $\square$

Primitive d'un reste.

I intervalle contenant 0

$f : I \to \mathbb{R}$ continue.

Supposons $f(x) = o(x^n)$ en 0.

Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Alors $F(x) = o(x^{n+1})$ en 0.

Dém $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Dém $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Th. des accroissements finis :
$\exists\, c_x$ entre 0 et x tq

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c_x) = f(c_x)$$

donc (puisque $F(0)=0$) $F(x) = x f(c_x)$.
c_x entre 0 et x

Or $f(x) = o(x^n)$
$f(x) = \varepsilon(x)\, x^n$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

$$F(x) = x f(c_x) = x\, c_x^n\, \varepsilon(c_x)$$
$$= x^{n+1} \times \underbrace{\frac{c_x^n}{x^n}\, \varepsilon(c_x)}_{\varepsilon_1(x)}$$

$$|\varepsilon_1(x)| \leq \underbrace{\left|\frac{c_x}{x}\right|^n}_{\leq 1} \times |\varepsilon(c_x)|$$

$c_x \to 0$ qd $x \to 0$
donc $\varepsilon(c_x) \to 0$ qd $x \to 0$

donc $\varepsilon_1(x) \to 0$ qd $x \to 0$.

Donc $F(x) = o(x^{n+1})$. $\square$

Ex : $x^{n+1} = o(x^n)$

$$\int_0^x t^{n+1}\,dt = \frac{x^{n+2}}{n+2} = o(x^{n+1}).$$

Si m, n sont dans $\mathbb{N}$

$n > m \Rightarrow x^n = o(x^m)$

Application aux D.L.

Combinaisons linéaires de D.L.

Thm Soit I intervalle contenant 0.

Soient f, g deux fonctions sur I ayant un D.L. à l'ordre n en 0.

Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ a un D.L. à l'ordre n en 0.

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$

$g(x) = Q(x) + o(x^n)$

où P, Q sont des polynômes de degré $\leq n$

... de degré $\leq n$

alors $\lambda f(x) + \mu g(x) = \underbrace{\lambda P(x) + \mu Q(x)}_{\text{partie principale du D.L. } n} + o(x^n)$

D.L. et parité

Th. Soit f une fonction $I \to \mathbb{R}$ ayant un D.L. à l'ordre n en 0, de partie principale P,

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$P \in \mathbb{R}_n[X].$$

Si f est paire (resp. impaire) alors P est pair (resp. impair). Autrement dit P n'a que des puissances paires (resp. impaires) de x.

Dém $f(x) = P(x) + o(x^n)$

$$f(-x) = P(-x) + o(-x^n)$$

$$o(x^n) = \varepsilon(x) x^n \qquad \varepsilon(x) \to 0$$

$o(x^n) = \varepsilon(x)x^n \qquad \varepsilon(x) \to 0$

$o((-x)^n) = \varepsilon(-x)(-x)^n = \underbrace{(-1)^n \varepsilon(-x)}\, x^n$

$= o(x^n) \qquad \to 0 \text{ qd } x \to 0.$

$$f(-x) = P(-x) + o(x^n)$$

$f(x)$ paire $\Rightarrow f(x) = f(-x)$

$\Leftrightarrow f(x) - f(-x) = 0$

$\quad\parallel$

$0 = P(x) - P(-x) + o(x^n)$

D.L. de la fonction 0 à l'ordre n

car $P(x) - P(-x) \in \mathbb{R}_n[X^n]$

Par unicité du D.L. $P(x) - P(-x) = 0$

$\Rightarrow P$ pair.

Idem si f est impair $\square$.

Exemples : Cos est paire

$$\cos(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{partie principale paire}} + o(x^{2n+1})$$

partie principale paire

Sin est impair

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{partie principale impaire}} + o(x^{2n+2})$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$ch(x) = \frac{\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!}}{2} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{\frac{1+(-1)^k}{2}}_{\substack{=1 \text{ si } k=2h \\ =0 \text{ si } k=2h+1}} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h}}{(2h)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{Sh}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Troncature

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ on note

$T_n(P)$ sa troncature au degré n

(où $n \in \mathbb{N}$).

Concrètement si $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ $a_k \in \mathbb{R}$

$$T_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

$$T_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$$

pol. de degré $\leq n$.

Ex. $T_3(X^4 + 2X + 1) = 2X + 1$

$T_4(X^4 + 2X + 1) = X^4 + 2X + 1.$

$T_2(X^6) = 0.$

$$T_2(x^2) = 0.$$
$$T_6(x^2) = x^2.$$

Troncature d'un D.L.

Th. Soit f une fonction ayant un D.L. à l'ordre m en 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^m)$$

Soit $n < m$. Alors f a un DL à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = T_n(P)(x) + o(x^n)$$

Ex $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$\Rightarrow$ $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$

"Qui peut le plus peut le moins".

D.L. de produits.

Th Soit f, g deux fonctions sur I ayant chacune un D.L. à l'ordre n en 0

ayant chacune un D.L. à l'ordre n en 0

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$
$P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors fg a un D.L. à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x)g(x) = T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

dont la p. p. est la troncature au degré n du produit de celles de P et de Q.

__Dém__. $f(x) = P(x) + o(x^n)$
$g(x) = Q(x) + o(x^n)$

$$f(x)g(x) = PQ(x) + \underbrace{P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n)}_{= o(x^n)}$$

$$PQ(x) = T_n(PQ)(x)$$
$$+ \text{ termes de degré} > n.$$
$$= T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

donc $f(x)g(x) = T_n(PQ)(x) + o(x^n)$

donc $f'(x)g(x) = \ln(PQ)(x) + o(x^n)$

D.L. n. $\square$

<u>Ex.</u> $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ D.L. 3.

$\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x}$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

$\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x} = T_3\left((1+x+x^2+x^3)^2\right) + o(x^3)$

$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 \; (+\cancel{x^4})$

$\quad + x^2 + x^3 \,(+\cdots) + x^3\,(+\cdots)$

$\quad + o(x^3)$

$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)$

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)$.

$1/1-x = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

D.L. d'une primitive.

Th. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

Si f a un D.L. à l'ordre n en 0

$$f(x) = P(x) + o(x^n),$$

alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ a un D.L.

à l'ordre $n+1$ en 0 qui est

$$F(x) = \underbrace{\int_0^x P(t)\,dt}_{\text{pol. de degré } \leq n+1} + o(x^{n+1})$$

Par exemple.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

donc $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

Composition de D.L.

Soient I, J deux intervalles contenant 0.

Soient I, J deux intervalles contenant 0.

$f : I \to \mathbb{R}$ ayant un D.L. à l'ordre n en 0.

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$g : J \to I$ vérifiant $g(0) = 0$

et ayant un D.L. à l'ordre n en 0

$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

$Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$Q(0) = 0$.

Alors $f \circ g$ a un D.L. à l'ordre n en 0 donné par :

$$f(g(x)) = T_n(P \circ Q)(x) + o(x^n).$$

Ex. $f(x) = \cos(x)$

$g(x) = \sin(x)$

On cherche un DL à l'ordre 4 de $f \circ g$

$\cos(\sin(x)) = ?$

$\cos(\sin(x)) -$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4) \qquad y = \sin(x)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$