Polytech Montpellier
MEA 3

Filtrage Analogique

Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2

Lionel Torres / 2023-2024

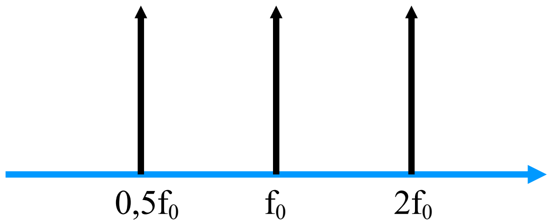
Contact : Lionel.Torres@lirmm.fr

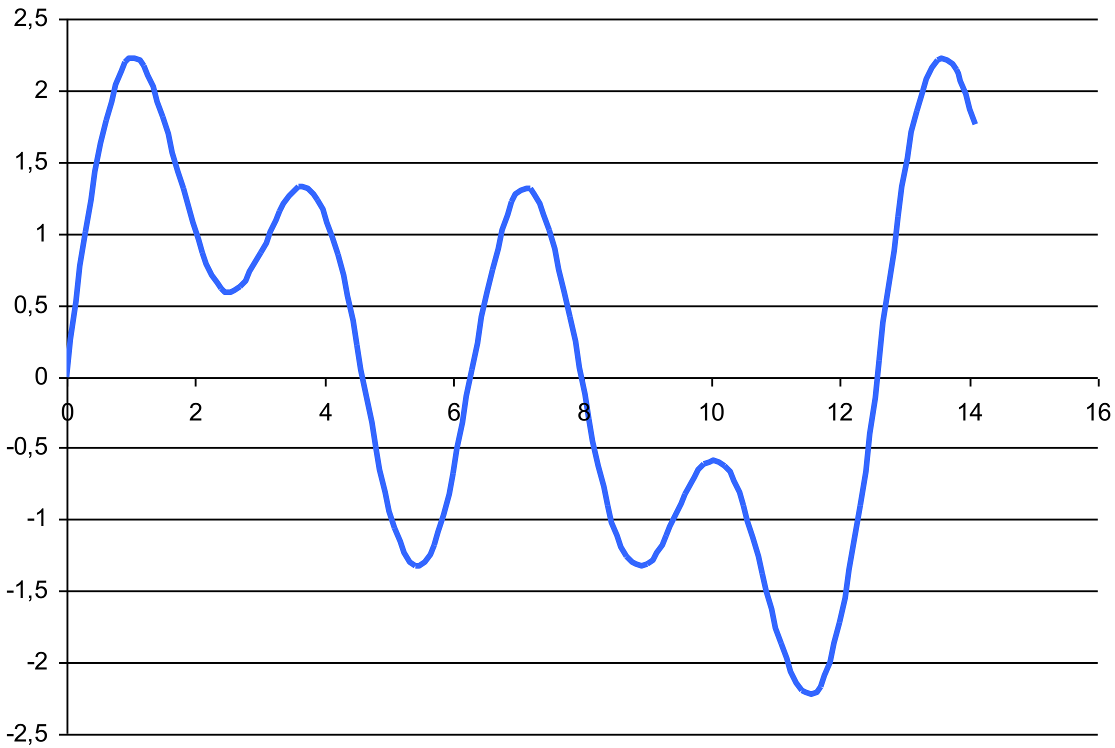
POLYTECH
MONTPELLIER

Filtrage Analogique

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Conclusions

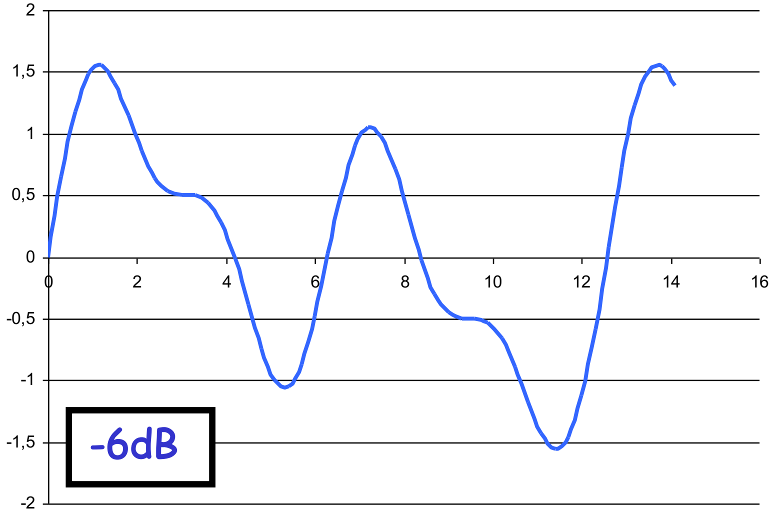
Rappels & compléments

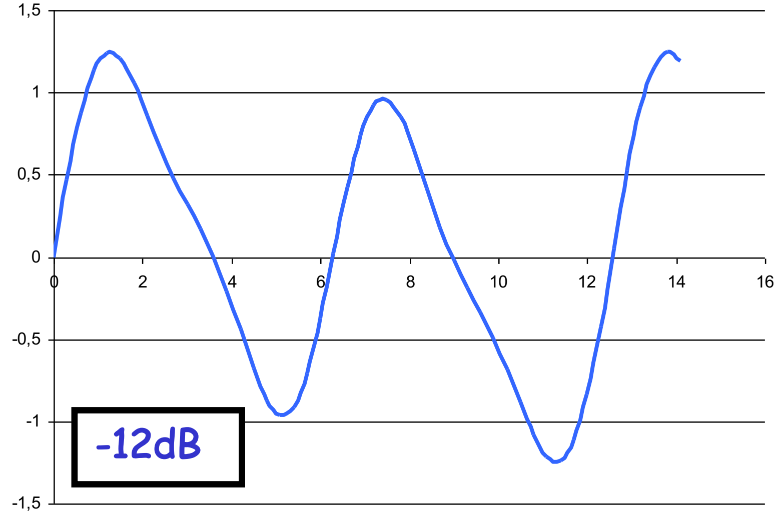


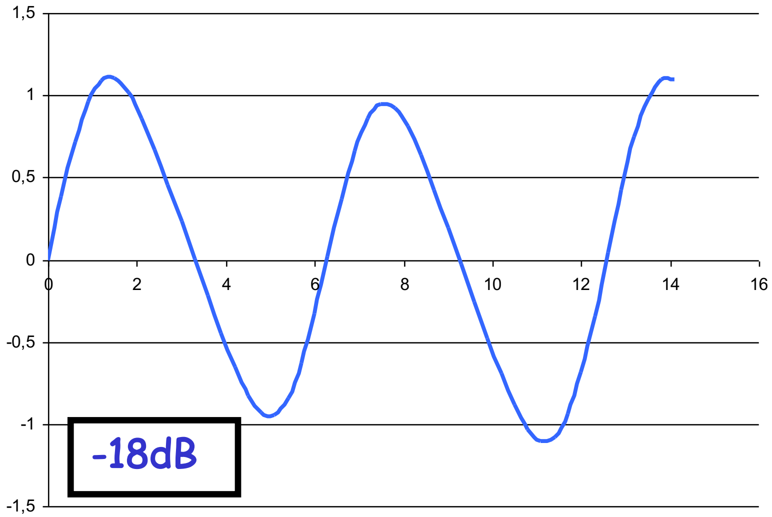


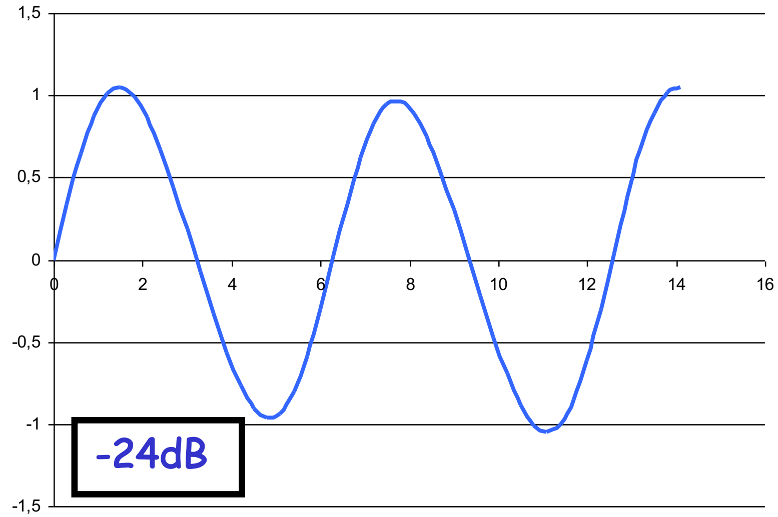
Récupérer la raie centrale => Atténuation des raies latérales

Rappels & compléments



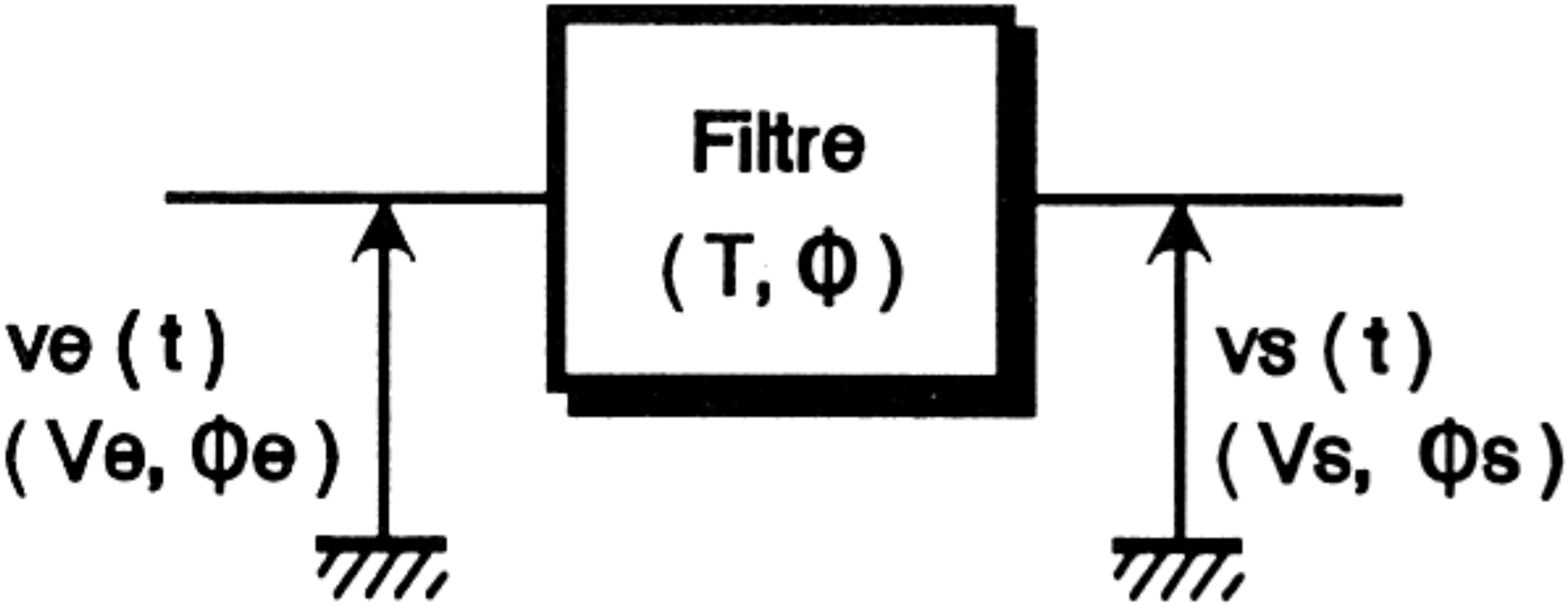






Filtrage => Atténuation des raies latérales + déphasage (retard ou avance)

Rappels & compléments



$$Vs = T\,Ve$$

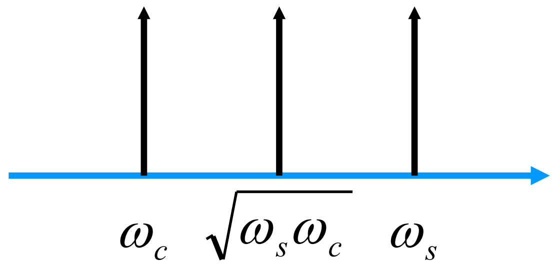
$$\Phi s = \Phi e + \Phi$$

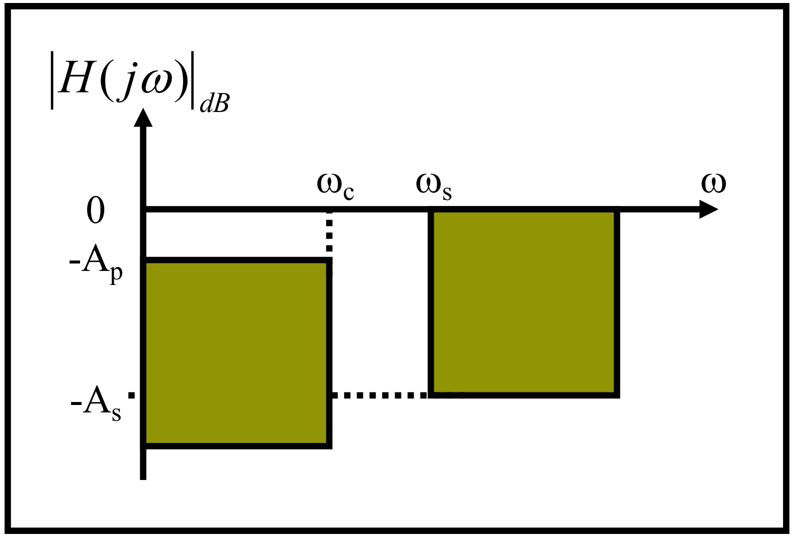
Rappels & compléments

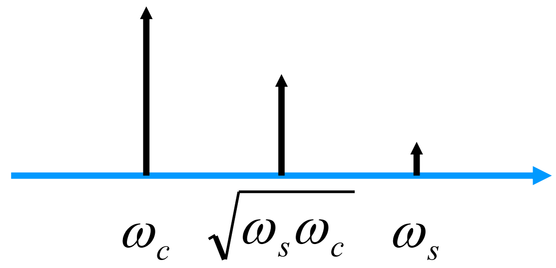
- Un filtre est défini par sa fonction de transfert F(p) qui permet de connaître
  - La réponse temporelle
    X(t) -> Y(t) avec $Y(t)=L^{-1}[F(p).X(p)]$
  - La réponse harmonique ($p=j\omega$)
    - Module et argument pour représenter la réponse harmonique d'un filtre
    - Gabarit pour représenter les spécifications d'un filtre
- Un filtre est dit linéaire s'il ne fait apparaître aucune composante spectrale dans le signal de sortie

Rappels & compléments : gabarits

- Passe-bas



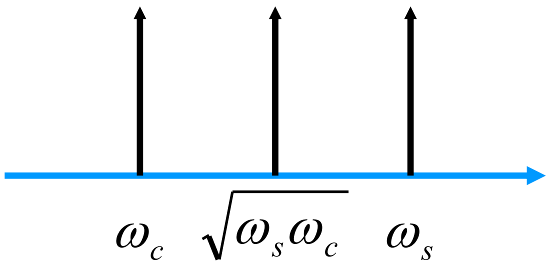


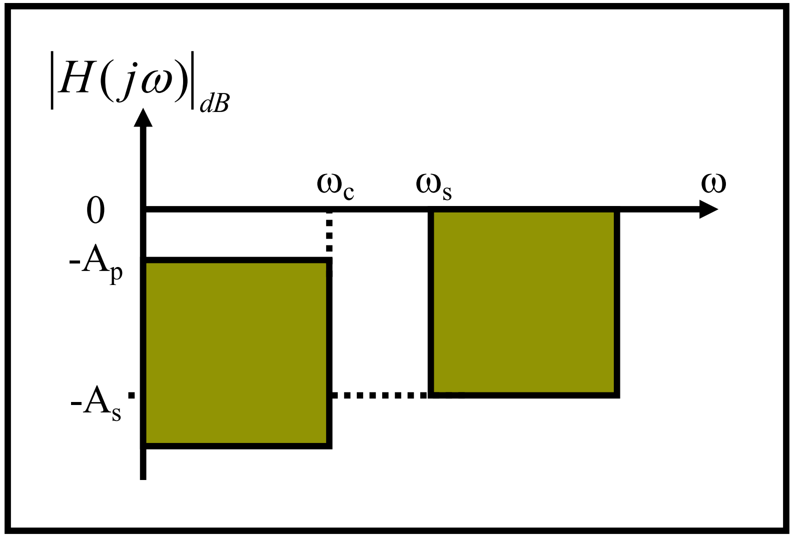


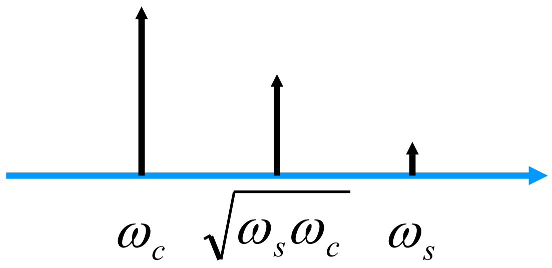
- Caractéristique dans la bande passante (ω_c)
  - Atténuation ou ondulation max : A_p
- Caractéristique dans la bande atténuée (ω_s)
  - Atténuation min : A_s
- Bande de transition (ω_s- ω_c) <-> ordre du filtre

Rappels & compléments : gabarits

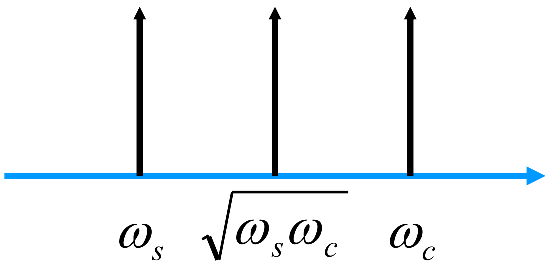
- Passe-bas

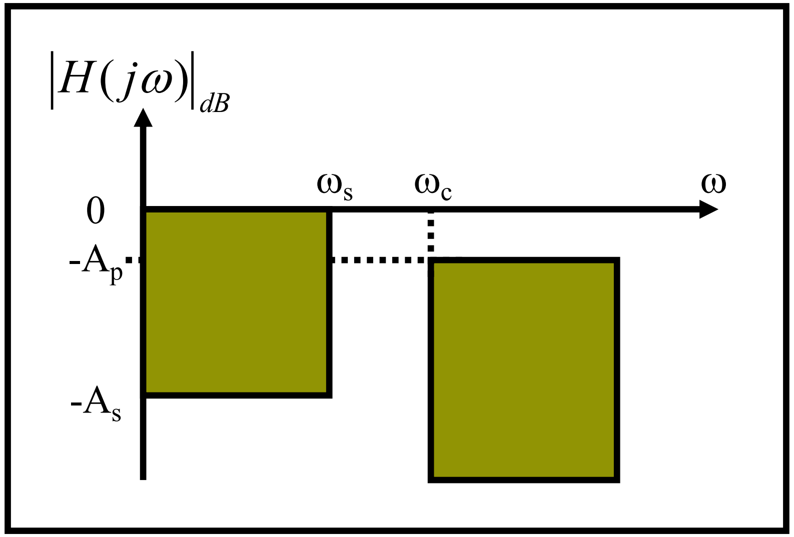


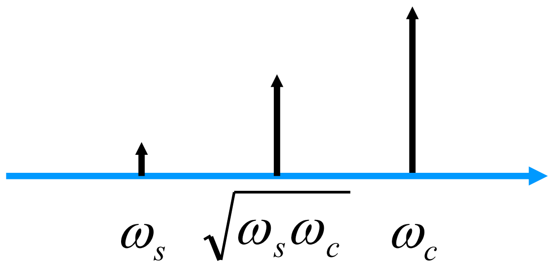




- Passe-haut

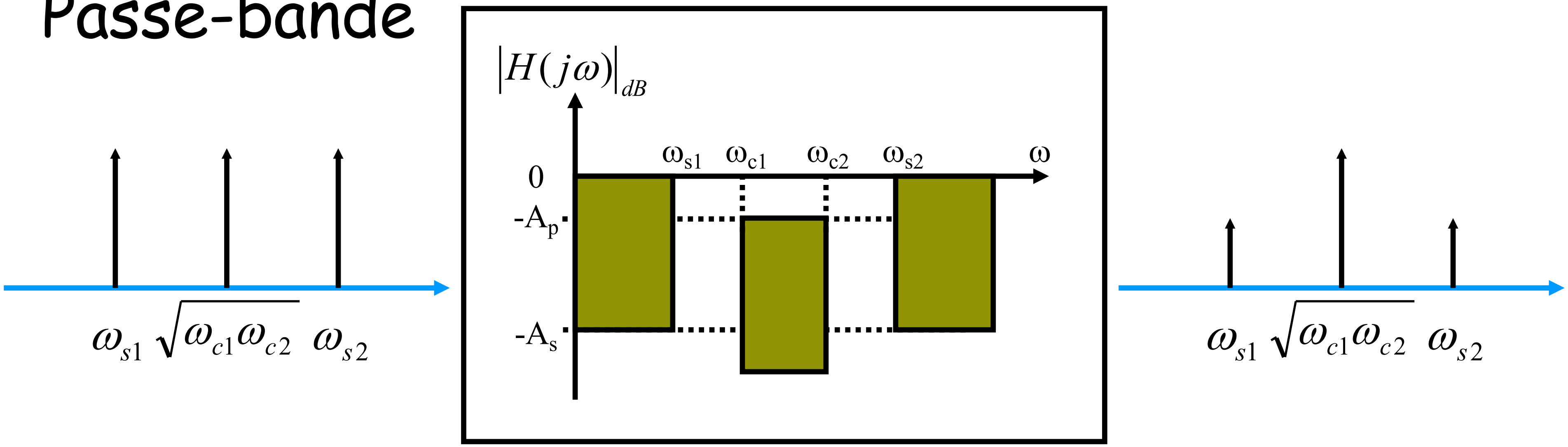






Rappels & compléments : gabarits

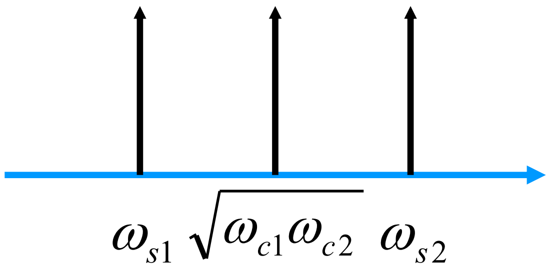
- Passe-bande

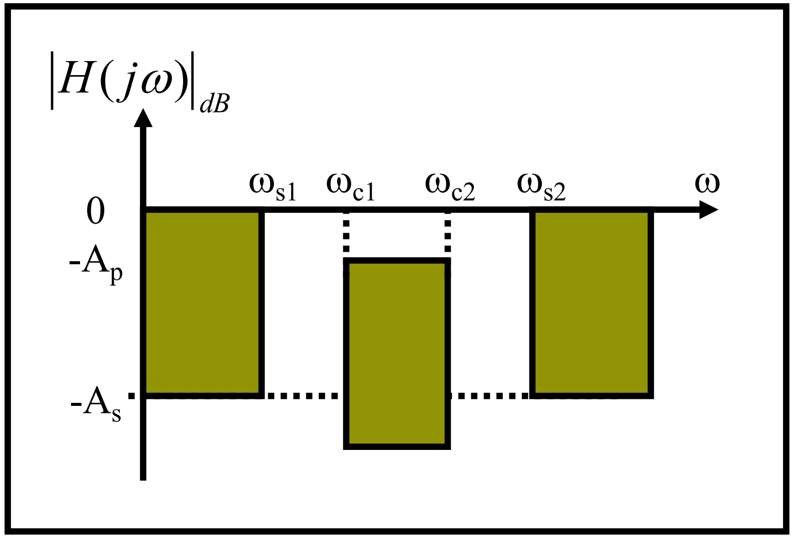


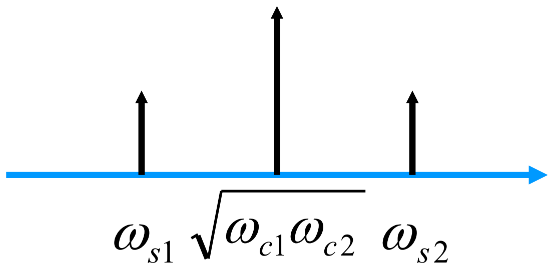
  - Deux bandes atténuées
  - Symétrie géométrique
    => Bande de transition identiques (échelle log)
    synthèse à l'aide de passe-bande élémentaires
  - Pas de symétrie => passe-haut plus passe-bas

Rappels & compléments : gabarits

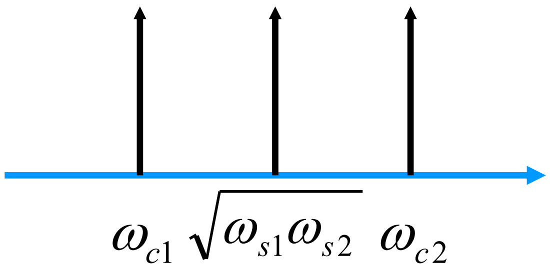
- Passe-bande

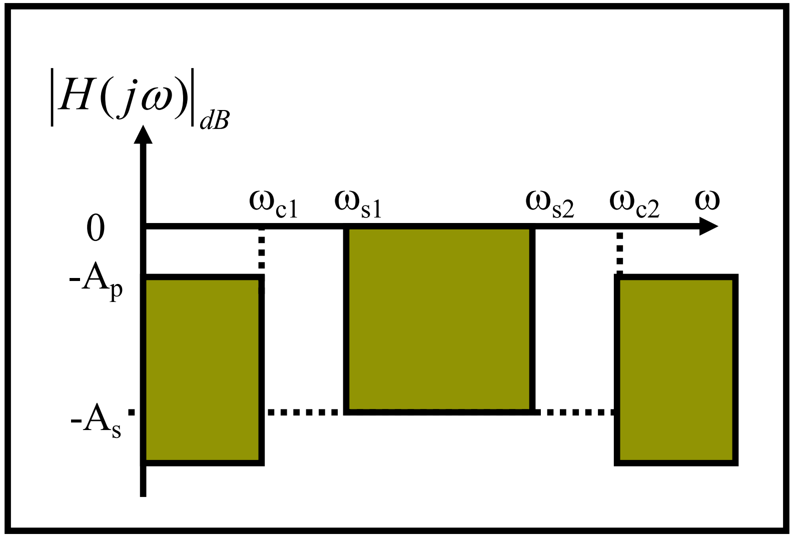


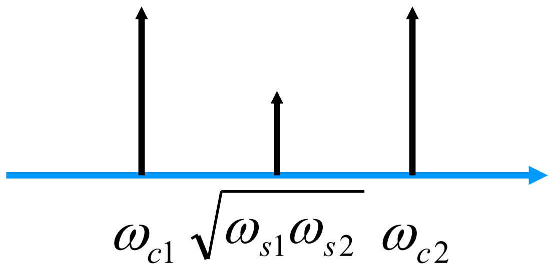




- Réjecteur







Filtrage analogique

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Conclusions

Filtres à amortissement critique

- Réalisation d'un filtre passe-bas d'ordre n par association de n cellules identiques du 1er ordre

$$V_{in}(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{(1+\alpha p)}} \xrightarrow{V_1(p)} \boxed{\dfrac{1}{(1+\alpha p)}} \rightarrow /\!/ \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{(1+\alpha p)}} \rightarrow V_{out}(p)$$

- Réponse obtenue ?

$$F(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{1}{(1+\alpha p)^n} \Rightarrow \left|F(j\omega)\right| = \frac{1}{(1+\alpha^2\omega^2)^{n/2}}$$

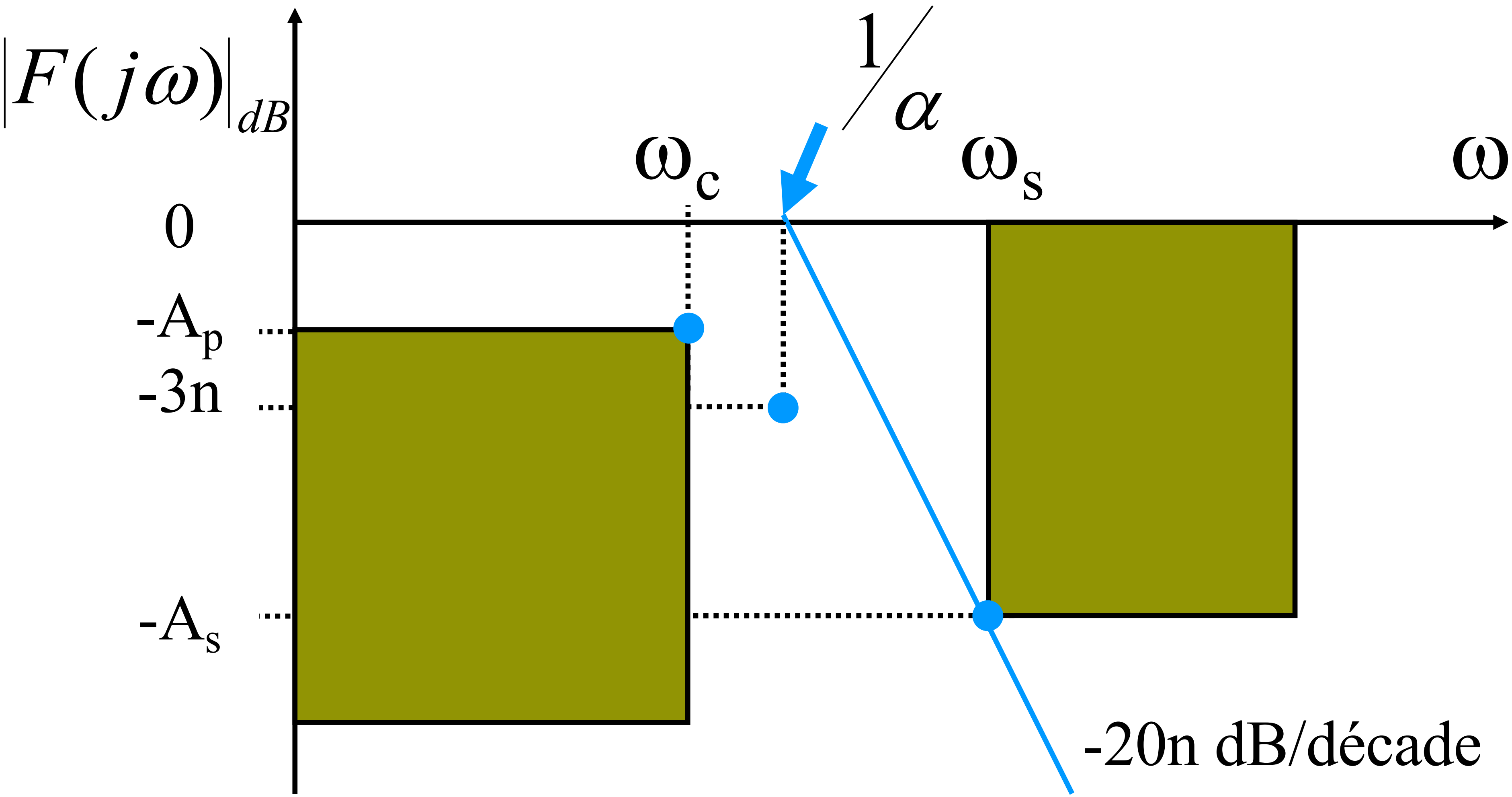
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = -20\log\left((1+\alpha^2\omega^2)^{n/2}\right) = -n\times 10\cdot\log(1+\alpha^2\omega^2)$$

- Calcul d'un filtre ?

Il faut calculer ***n*** et *α* → nombre de cellules et constante de temps

Filtres à amortissement critique

$$|F(j\omega)|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega^2)$$



Filtres à amortissement critique: Solution 1

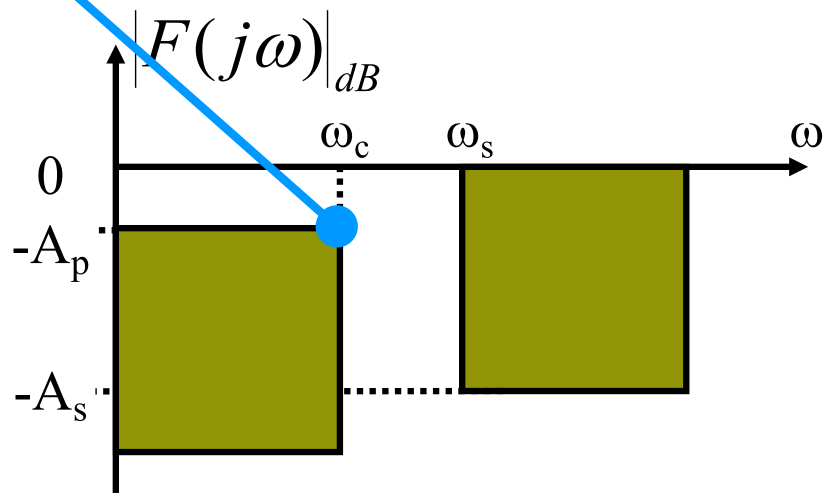
- Equation n°1 : α est déduit de ω_c et de A_p

$$\left|F(j\omega_c)\right|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega_c^2) = -A_p$$

$$\Rightarrow 1+\alpha^2{\omega_c}^2 = 10^{A_p/10n}$$

$$\Rightarrow \alpha^2{\omega_c}^2 = 10^{A_p/10n} - 1$$

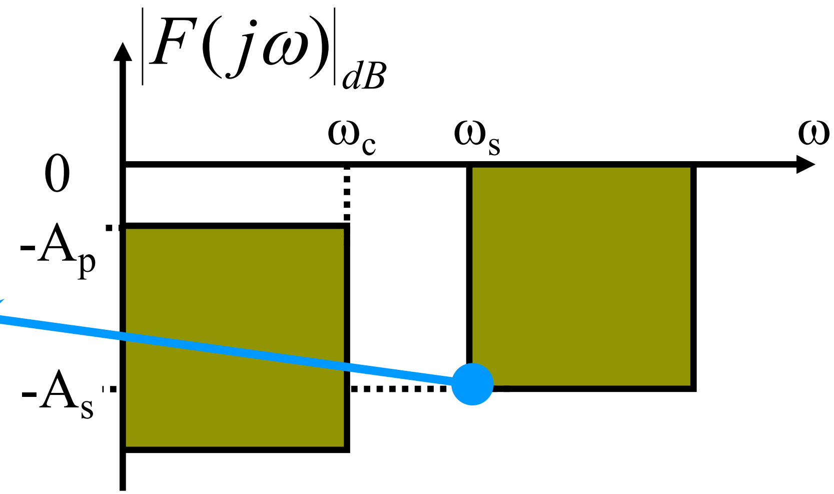
$$\boxed{\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{A_p/10n} - 1}}$$



Filtres à amortissement critique: Solution 1

- Equation n°2 : on utilise l'expression de α pour calculer le gain en fin de bande de transition

$$\left|F(j\omega_s)\right|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega_s^2) = -A_s$$



$$\boxed{\Rightarrow -10n\log\left(1+\left(10^{A_p/10n}-1\right)\frac{\omega_s^2}{\omega_c^2}\right) = -A_s}$$

Filtres à amortissement critique: Solution 2

POLYTECH MONTPELLIER

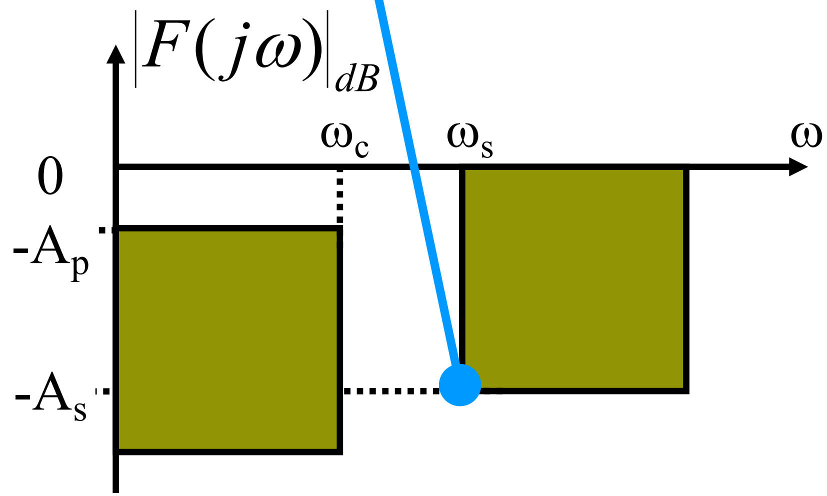
- Equation n°1 : α est déduit de ω_s et de A_s

$$\left|F(j\omega_s)\right|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega_s^2) = -A_s$$

$$\Rightarrow 1+\alpha^2{\omega_s}^2 = 10^{A_s/10n}$$

$$\Rightarrow \alpha^2{\omega_s}^2 = 10^{A_s/10n} - 1$$

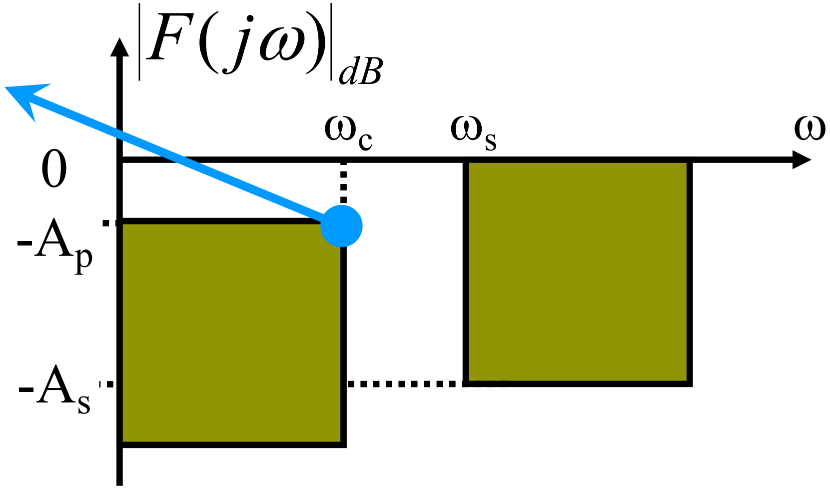
$$\boxed{\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega_s}\sqrt{10^{A_s/10n} - 1}}$$



Filtres à amortissement critique: Solution 2

- Equation n°2 : on utilise l'expression de α pour calculer le gain en limite de bande passante

$$\left|F(j\omega_c)\right|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega_c^2) = -A_p$$



$$\boxed{\Rightarrow -10n\log\left(1+\left(10^{A_s/10n}-1\right)\frac{\omega_c^2}{\omega_s^2}\right) = -A_p}$$

Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-bas

POLYTECH MONTPELLIER

- 1ère étape : on calcule l'atténuation obtenue pour différentes valeurs de *n* et on retient une valeur « suffisante » pour obtenir une atténuation au moins égale à A_s en limite de bande de transition.
- 2ème étape : on calcule alors la constante de temps des *n* sections de premier ordre (max de α) $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{A_p/10n} - 1}$
- et la fonction de transfert souhaitée $F(p) = \frac{1}{(1+\alpha p)^n}$
- Le filtre nécessaire est composé de *n* cellules du premier ordre de constante de temps égale à α.

Filtres à amortissement critique : Exemple

- Pulsation de coupure : ω_c = 10^3 rd/s (A_p=3dB)
- Bande atténuée : ω_s= 5.10^3 rd/s (A_s=30dB)
- On calcule la valeur de l'atténuation en limite de bande de transition pour différents n

$$10n\log\left(1+\left(10^{A_p/10n}-1\right)\frac{\omega_s^2}{\omega_c^2}\right) \text{ avec } A_p=3 \text{ et } \frac{\omega_s}{\omega_c}=5$$

$\frac{\omega_s}{\omega_c}$ →

n ↓

	2	4	5	10	20	32	64	100
1	6,99	12,30	14,15	20,04	26,03	30,11	36,12	40,00
2	8,49	17,65	21,10	32,55	44,44	52,57	64,60	72,35
3	9,29	21,38	26,25	42,94	60,63	72,80	90,83	102,45
4	9,79	24,20	30,33	51,97	75,39	91,58	115,59	131,09
5	10,14	26,44	33,69	60,03	89,08	109,27	139,27	158,63
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Filtres à amortissement critique : Exemple

- On peut alors calculer la constante de temps des 4 sections du premier ordre

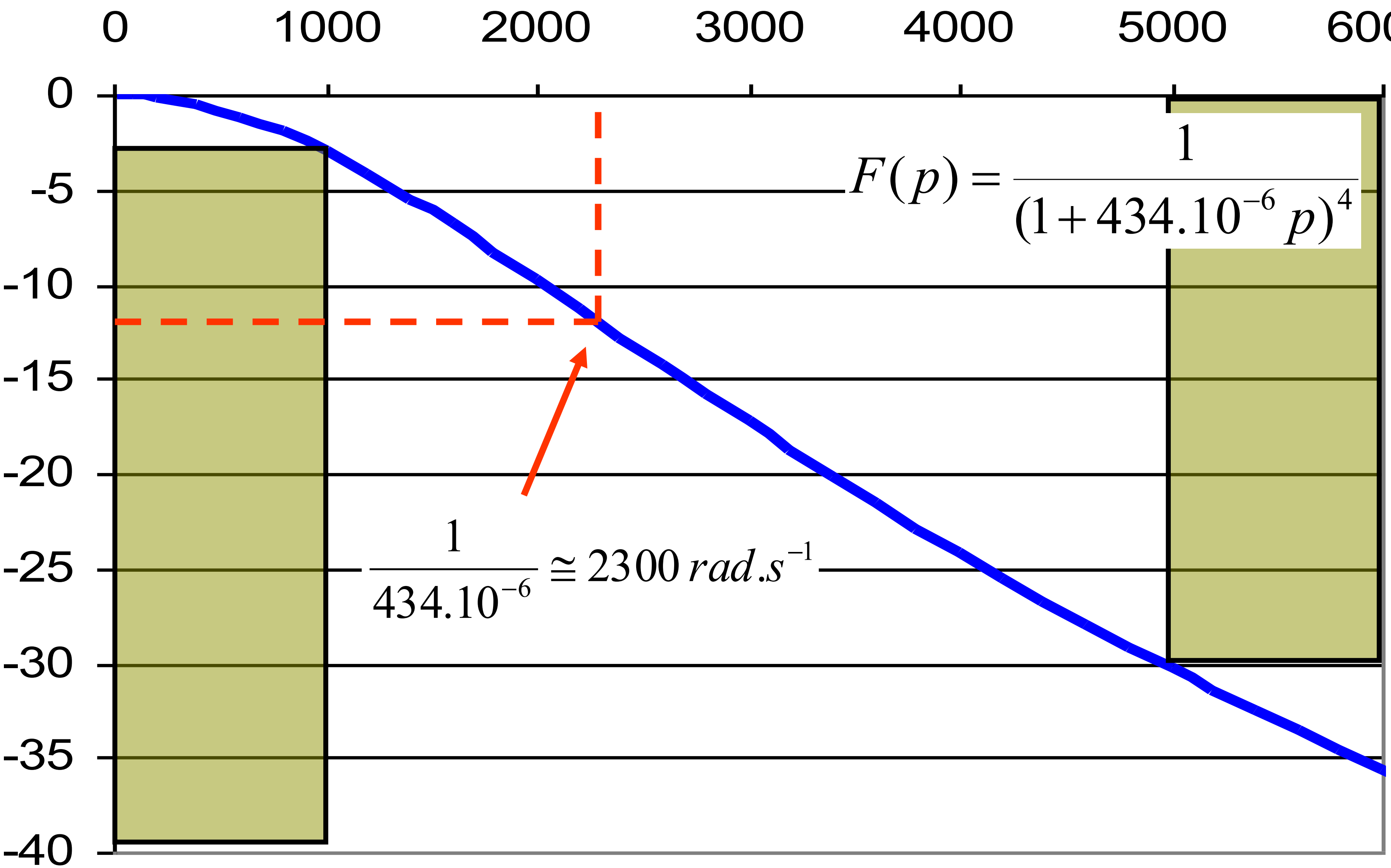
$$\alpha = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{A_p/10n}-1} = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{3/40}-1} = \frac{0{,}434}{\omega_c} \Rightarrow \alpha = 434\mu s$$

- Et en déduire la fonction de transfert souhaitée pour le passe-bas

$$F(p) = \frac{1}{(1+434.10^{-6}\,p)^4}$$

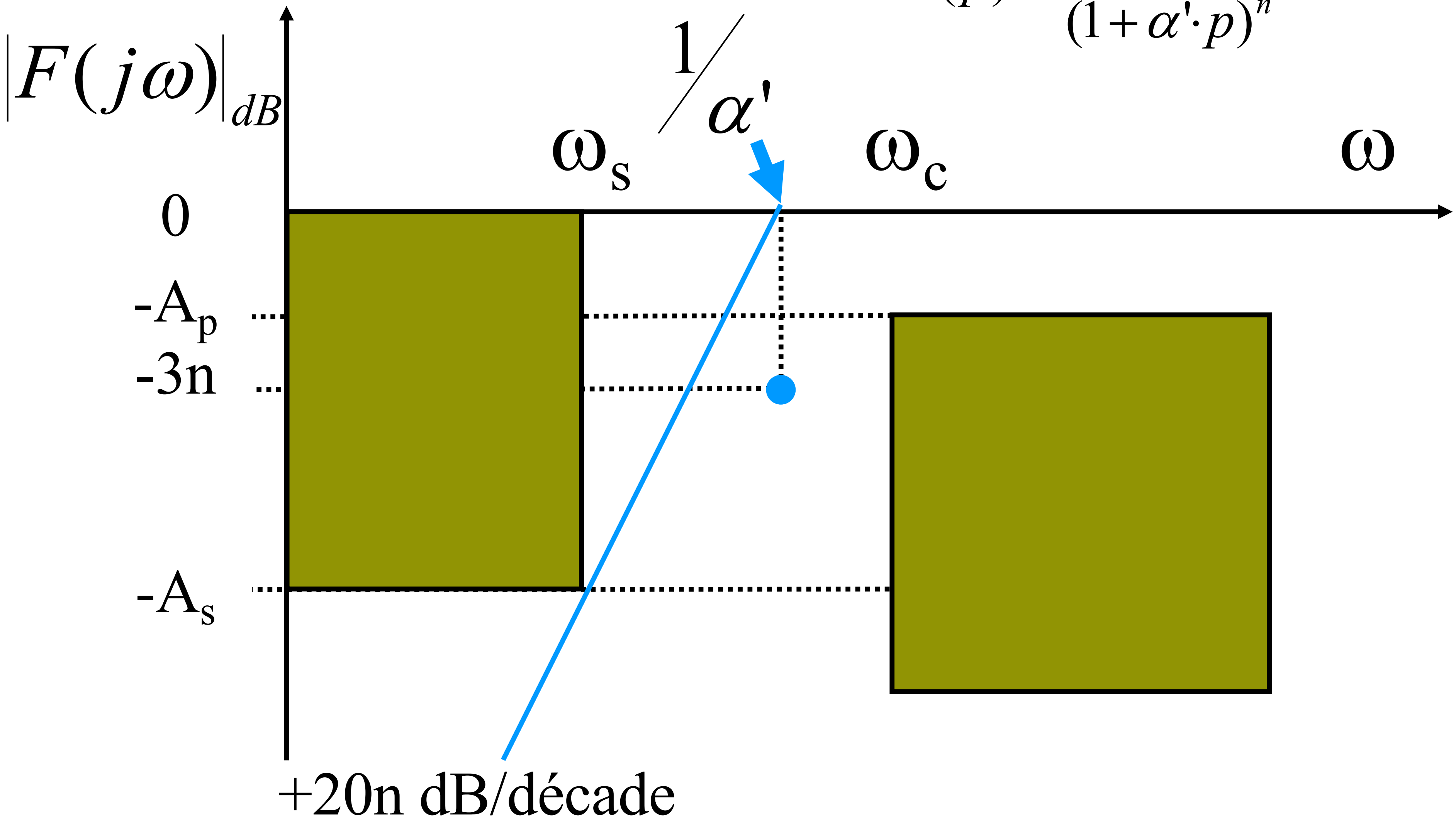
- Il faut quatre cellules du premier ordre de constante de temps égale à 434 μs

Filtres à amortissement critique : Exemple

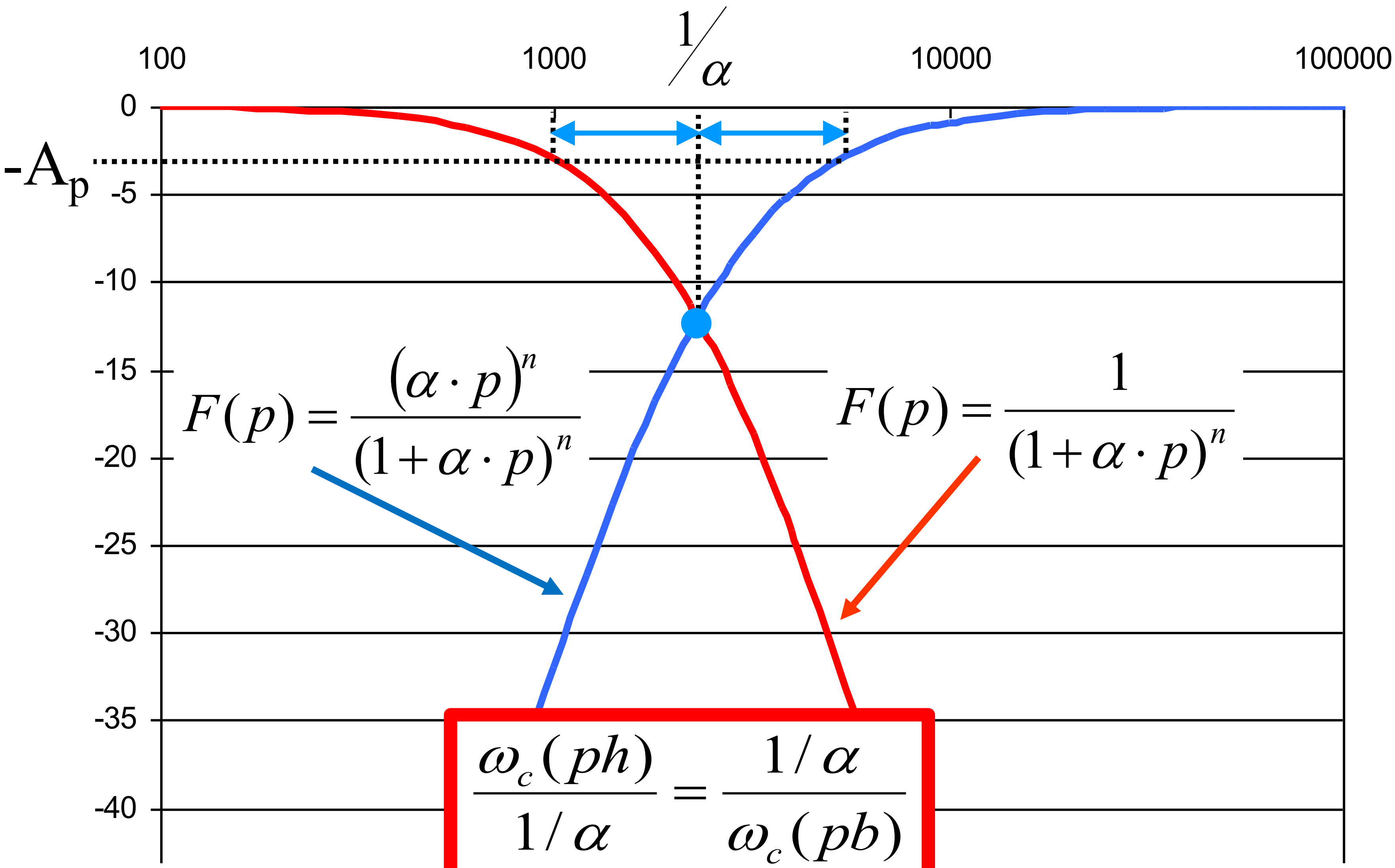


Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut

$$F(p)=\frac{(\alpha'\cdot p)^n}{(1+\alpha'\cdot p)^n}$$

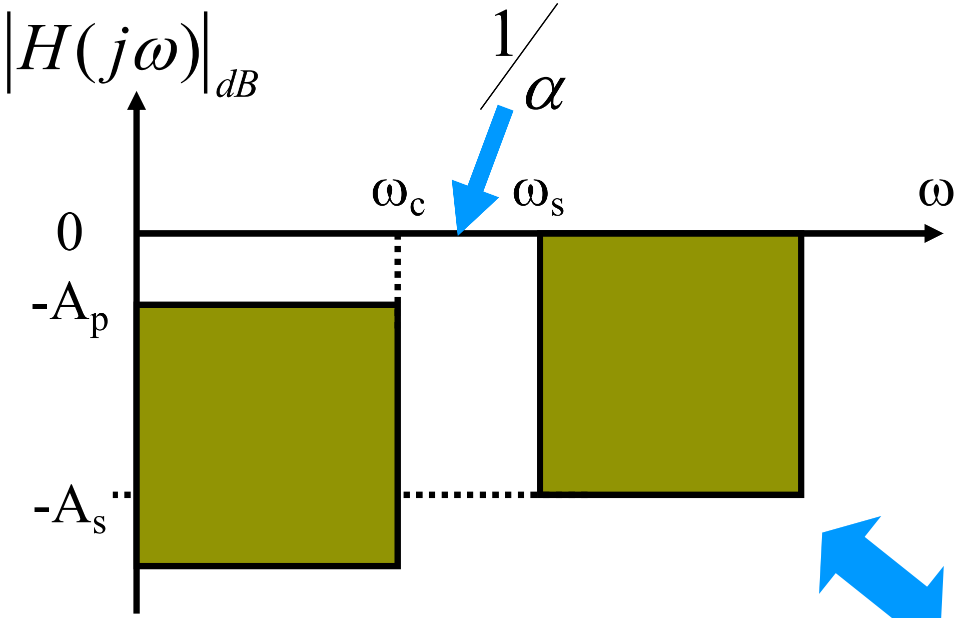


Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut



$$\boxed{\frac{\omega_c(ph)}{1/\alpha}=\frac{1/\alpha}{\omega_c(pb)}}$$

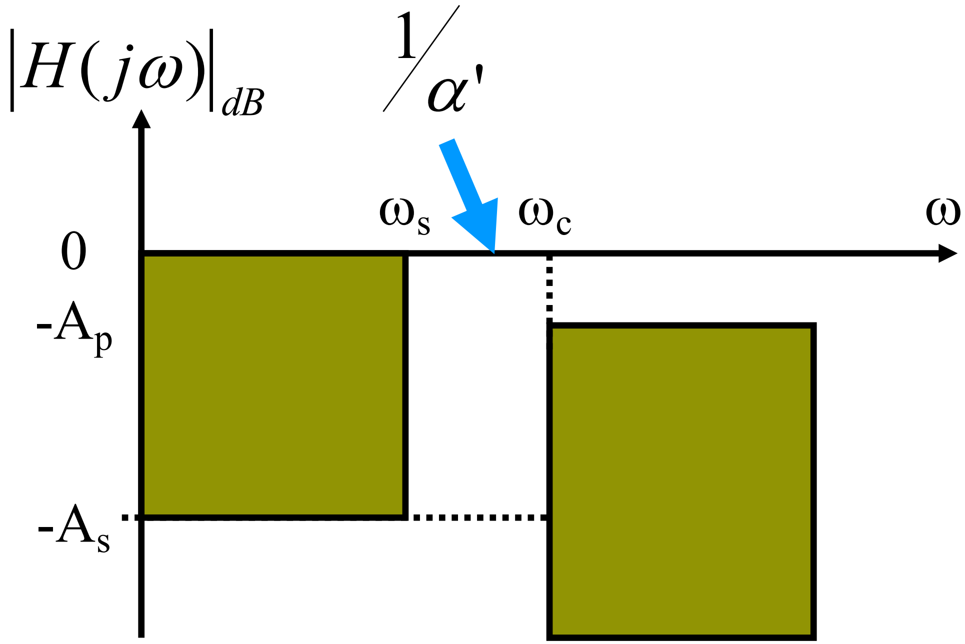
Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut



Sélectivité identique

A_p *et* A_s sont conservés

$$\frac{\omega_c(ph)}{\omega_s(ph)} = \frac{\omega_s(pb)}{\omega_c(pb)}$$



$$\alpha' \cdot \omega_c(ph) = \frac{1}{\alpha \cdot \omega_c(pb)}$$

Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut

- 1ère étape : transposition du filtre passe-haut

A_p et A_s identiques

$$\frac{\omega_c(ph)}{\omega_s(ph)} = \frac{\omega_s(pb)}{\omega_c(pb)}$$

- Exemple :

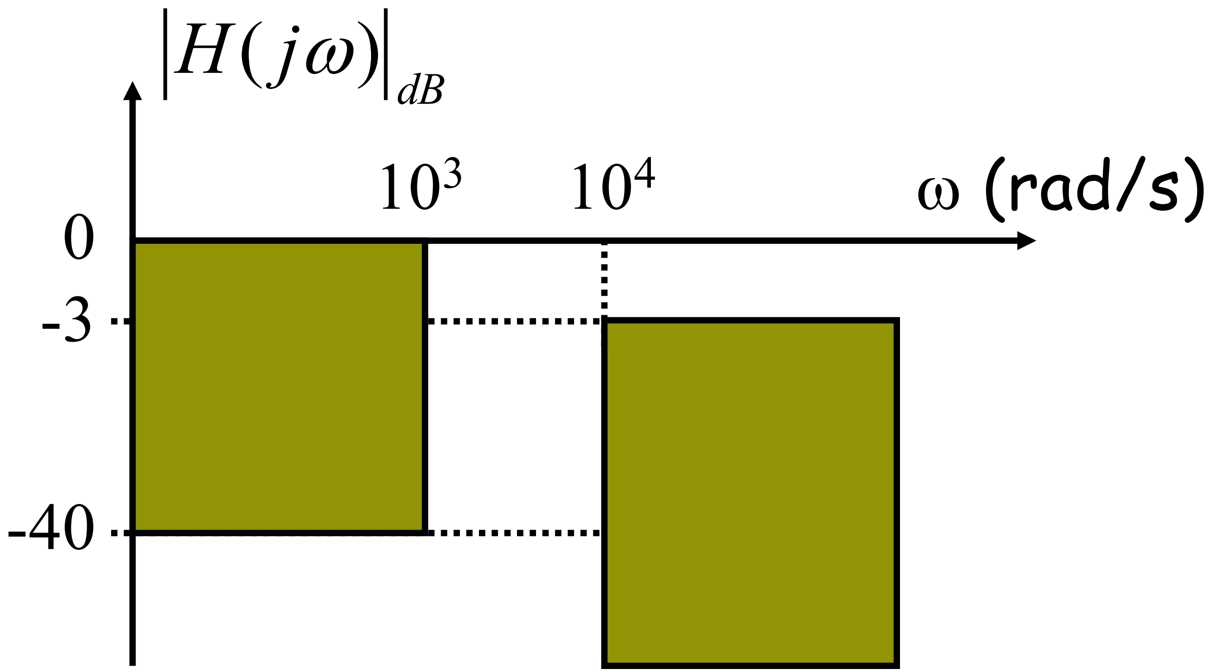
$$\omega_s(pb) = \omega_c(ph) \quad ; \quad \omega_c(pb) = \omega_s(ph)$$

- 2ème étape : calcul du filtre transposé (passe-bas)
  - Ordre du filtre nécessaire : ***n***
  - Calcul de $\alpha.\omega_c(pb)$
- 3ème étape : calcul de la constante de temps du filtre passe-haut

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha \cdot \omega_c(pb) \cdot \omega_c(ph)}$$

Exercice

- Calculer la fonction de transfert du filtre à amortissement critique correspondant au gabarit ci-contre.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.



Filtrage analogique

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Conclusions

Généralités

- Un filtre de Butterworth est un filtre linéaire conçu pour posséder un gain constant dans sa bande passante.
- Les filtres de Butterworth sont les seuls filtres linéaires dont la forme générale est similaire pour tous les ordres (sauf pente dans la bande de coupure)
- Les filtres de Butterworth ont les courbes de réponse les plus plates dans la bande passante (pas de rebond), ce sont les filtres les plus utilisés.

Généralités

- On réalise un filtre de Butterworth par la mise en cascade de sections du 2nd ordre avec éventuellement une section du 1er ordre pour les ordres impairs
- Un filtre de Butterworth d'ordre ***n*** est de la forme :

$$H_{pb}(p) = \frac{1}{B_n(p)} \quad \text{ou} \quad H_{ph}(p) = \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^n}{B_n(p)}$$

- Ou $B_n(p)$ est un polynôme de Butterworth dont les propriétés principales sont :

$$|B_n(j\omega)| = \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$$

  - $|B_n(j\omega)| = \sqrt{2} \ \forall$ n pour $\omega = \omega_0$
  - $|B_n(j\omega)|$ est une fonction strictement croissante

Les polynômes de Butterworth

POLYTECH MONTPELLIER

- Un premier ordre est un filtre de Butterworth
- Butterworth du 2nd ordre

$$|F(j\omega)| = \left|1 + 2m\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \frac{4m^2\omega^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{\omega^4}{{\omega_0}^4} + \frac{2\omega^2}{{\omega_0}^2}\left(2m^2 - 1\right)}$$

- avec m=0.707 : $|F(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$

Les polynômes de Butterworth

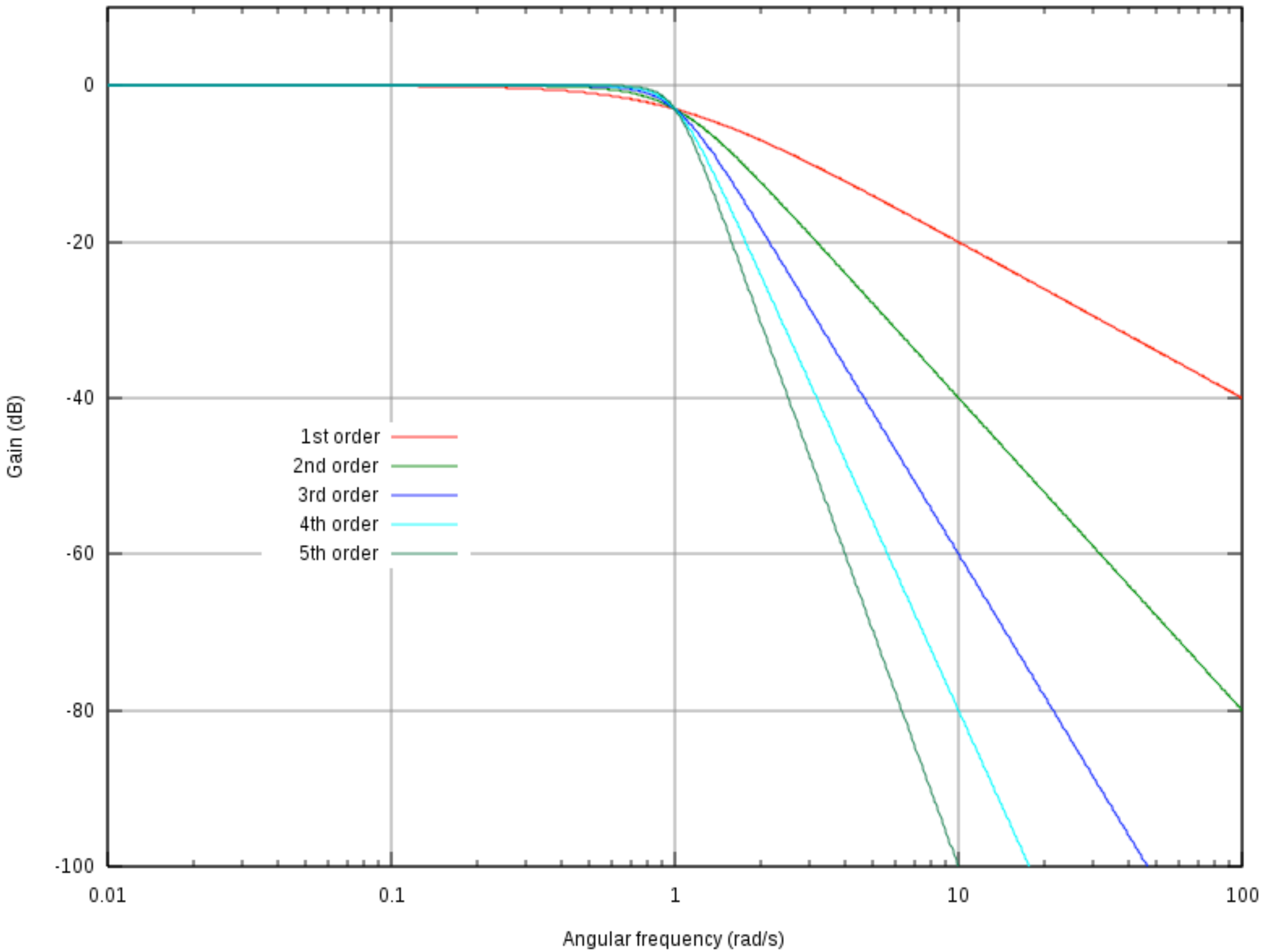
- Butterworth du 3ème ordre : une section du 2nd ordre avec m=0,5 et une section du premier ordre

$$|B(j\omega)| = \left| \left(1+\frac{j\omega}{\omega_0}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}+\frac{j\omega}{\omega_0}\right) \right| = \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}$$

- Les polynômes $B_n(p)$ principaux avec $p'=\frac{j\omega}{\omega_0}$
  - 2ème ordre : $(1+1.414p'+p'^2)$
  - 3ème ordre : $(1+p'+p'^2)\,(1+p')$
  - 4ème ordre : $(1+1.848p'+p'^2)\,(1+0.765p'+p'^2)$
  - 5ème ordre : $(1+1.618p'+p'^2)\,(1+0.618p'+p'^2)\,(1+p')$
- Passe-bas :

$$F(p) = \frac{1}{B_n(p)}$$

Synthèse d'un passe-bas



Synthèse d'un passe-bas

Pour les filtres de Butterwoth, on retiendra :

- Dans la bande passante, la réponse est la plus plate possible (il n'y a pas d'ondulation).

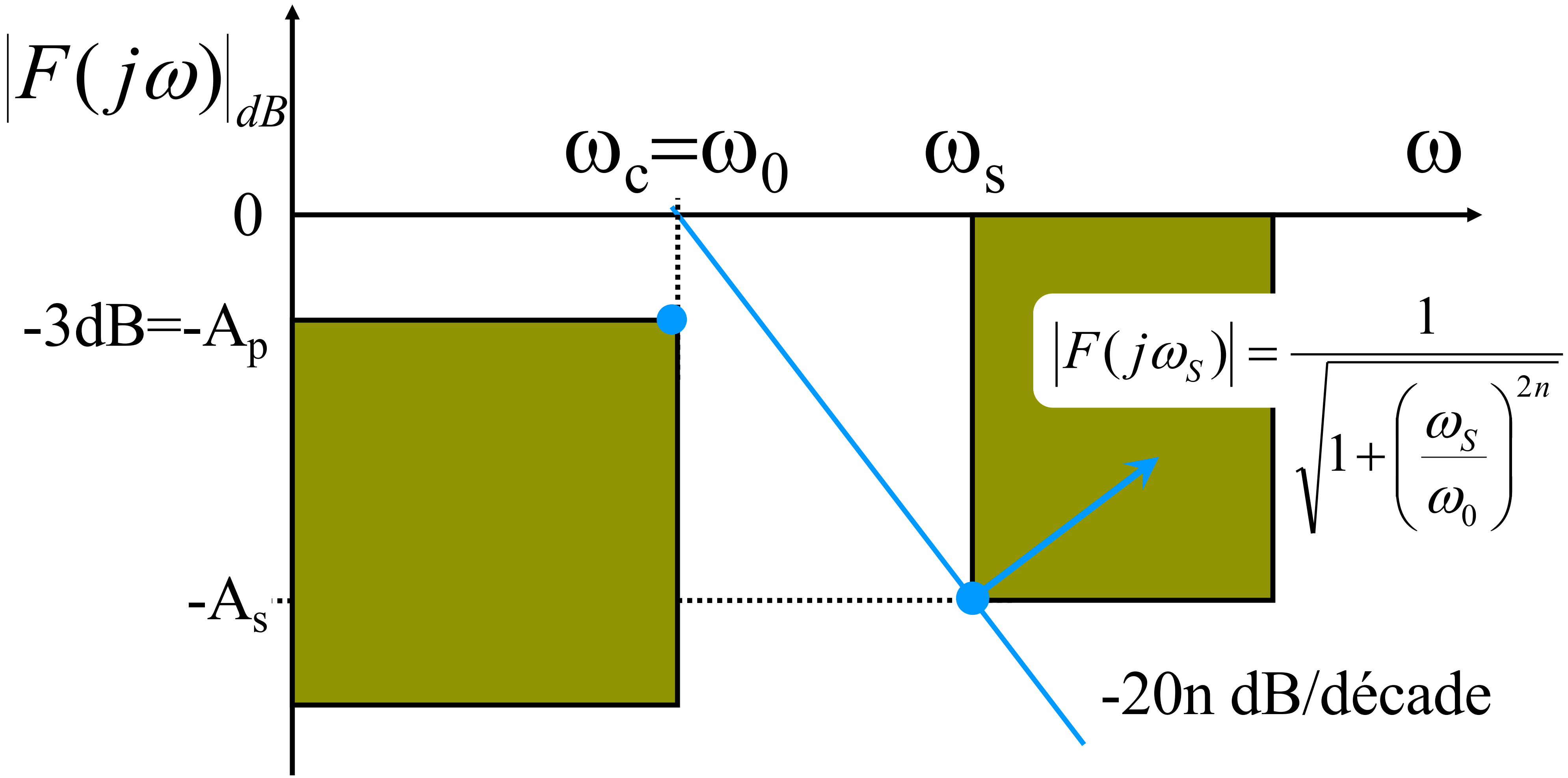
- En dehors de la bande transmise, et à des fréquences très supérieures à la fréquence de coupure, on retrouve les caractéristiques classiques d'un filtre d'ordre n, avec une croissance de 20.n dB/dec.

- Quelque soit la valeur de l'ordre n, l'affaiblissement à la fréquence de coupure est de -3dB.

- La phase est linéaire (les signaux ne sont pas déformés).

Synthèse d'un passe-bas

- Cas d'un filtre ayant une atténuation maximale de 3 dB dans la bande passante



Synthèse d'un passe-bas

- On calcule l'ordre du filtre à partir de l'atténuation souhaitée en limite de bande de transition (début de bande d'arrêt)

$$-20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n}}=-A_s \Rightarrow \log\left(1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n}\right)=\frac{A_s}{10}$$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n}=10^{A_s/10} \Rightarrow 2n\cdot\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)=\log\left(10^{A_s/10}-1\right)$$

$$\Rightarrow n=\frac{\log\left(10^{A_s/10}-1\right)}{2.\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)}$$

On choisit *n* comme l'entier immédiatement supérieur…

Exemple

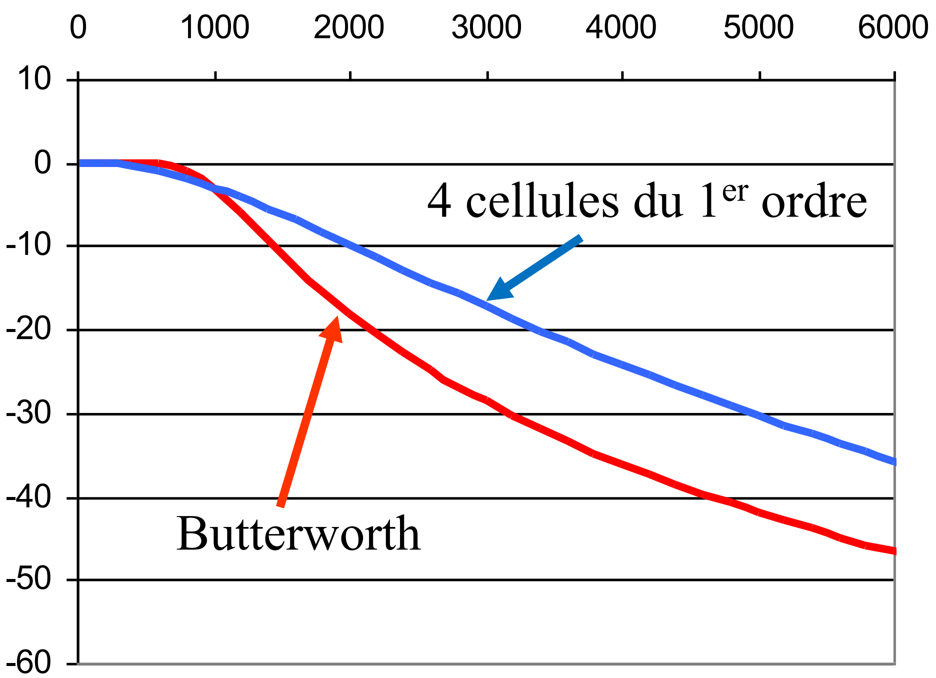
- Pulsation de coupure : $\omega_0 = 10^3$ rd/s (A_p = -3dB)
- Bande atténuée : $\omega_s = 5.10^3$ rd/s (A_s = -30dB)
- Il suffit de déduire l'ordre nécessaire de l'atténuation souhaitée **A_s** et du rapport entre ω_s et ω_0

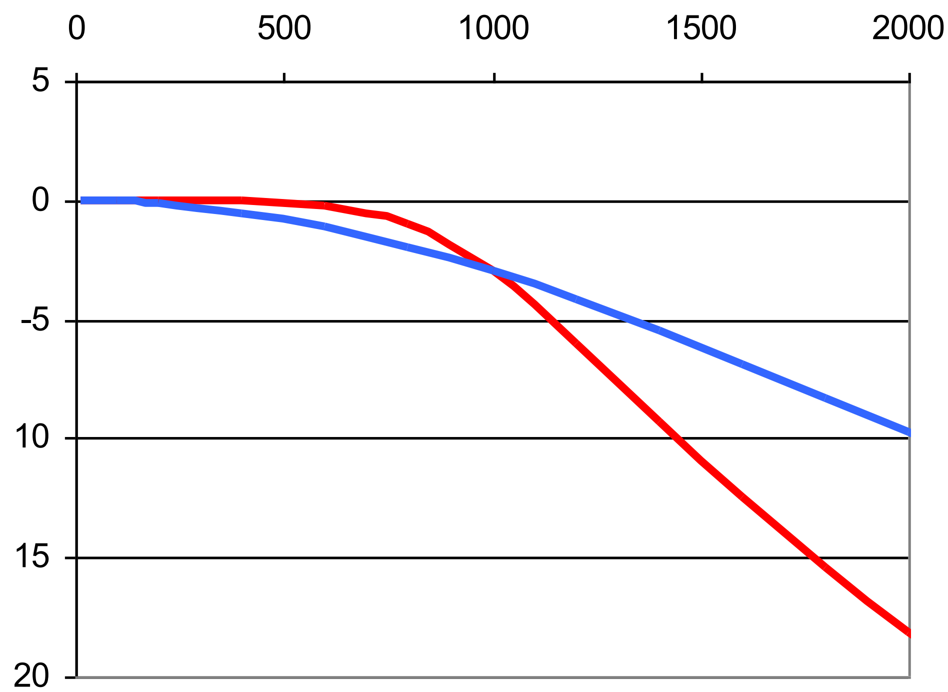
$$n = \frac{\log\left(10^{A_s/10} - 1\right)}{2.\log\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_0}\right)} = \frac{\log\left(10^3 - 1\right)}{2.\log(5)} = \frac{\log(999)}{2.\log(5)} = 2{,}15$$

- On choisit l'ordre entier immédiatement supérieur → n=3

Exemple

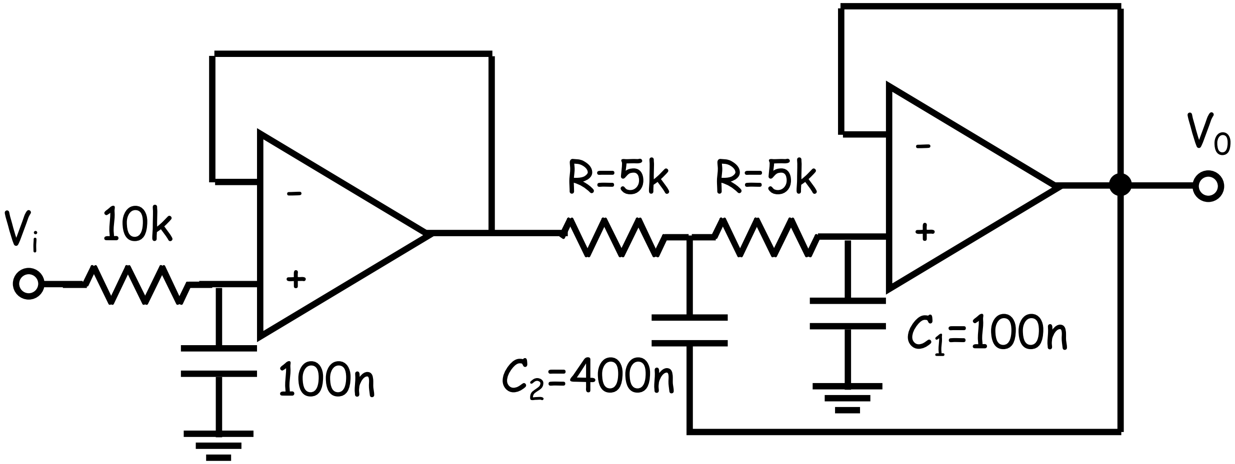
- Par rapport à l'utilisation de sections du premier ordre :
  - 3ème ordre suffit - Gain dans la bande plus stable - Bande de transition plus faible





Exemple

- avec gain unitaire



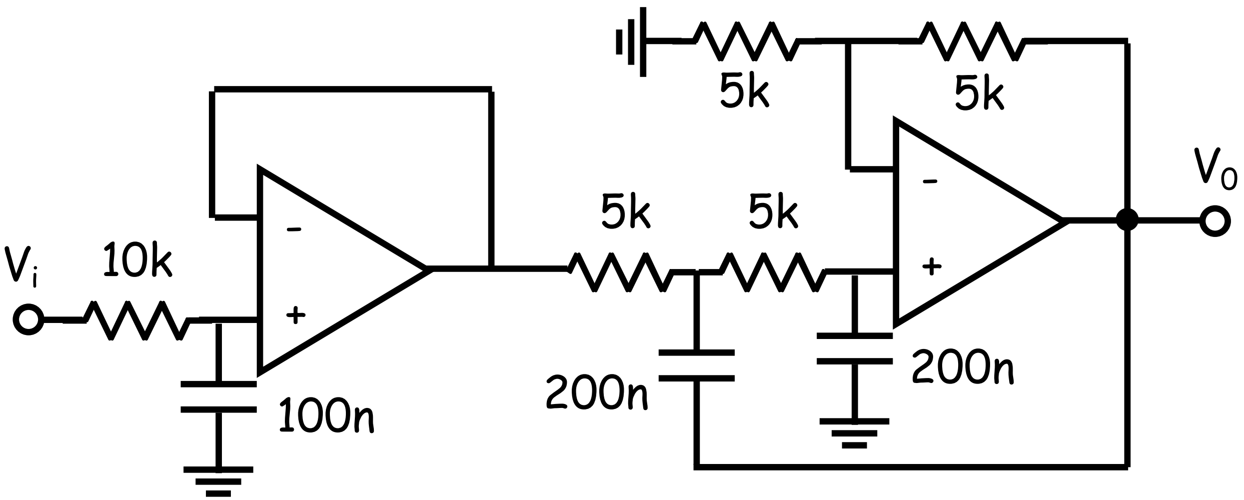
Nous ne pouvons pas afficher l'image.

Nous ne pouvons pas afficher l'image.

Nous ne pouvons pas afficher l'image.

Exemple

- avec gain égal à 2



Nous ne pouvons pas afficher l'image.

Nous ne pouvons pas afficher l'image.

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 1000\text{rd/s}$$

Filtres de Butterworth généralisé

- On souhaite fixer librement l'atténuation dans la bande passante → polynôme généralisé

$$|B_n(j\omega)| = \sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 1ère étape : calcul de ε à $\omega=\omega_c$ donnant une atténuation $\mathbf{A_p}$ en limite de bande passante

$$20\log\sqrt{1+\varepsilon^2} = A_p \Rightarrow \log\left(1+\varepsilon^2\right) = \frac{A_p}{10} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10}-1}$$

Filtres de Butterworth généralisé

- 2ème étape : on calcule l'ordre du filtre à partir de l'atténuation souhaitée en limite de bande de transition

$$20\log\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}} = A_s \Rightarrow \log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right) = \frac{A_s}{10}$$

$$\Rightarrow 1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{A_s/10} \Rightarrow 2n\cdot\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right) = \log\left(\frac{10^{A_s/10}-1}{\varepsilon^2}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{10^{A_s/10}-1}{\varepsilon^2}\right)}{2.\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

- 3ème étape : calcul de ω_0

$$|B_n(j\omega)| = \sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\omega_c^{2n}} = \frac{1}{\omega_0^{2n}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_c}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

Exemple de synthèse d'un passe-bas dans le cas général ($A_p \neq 3dB$)

- Exemple :
  - Pulsation de coupure : $\omega_c = 10^3$ rd/s ($A_p = -1$dB)
  - Bande atténuée : $\omega_s = 5.10^3$ rd/s ($A_s = -30$dB)
- 1ère étape : calcul de ε à $\omega = \omega_c$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0,509$$

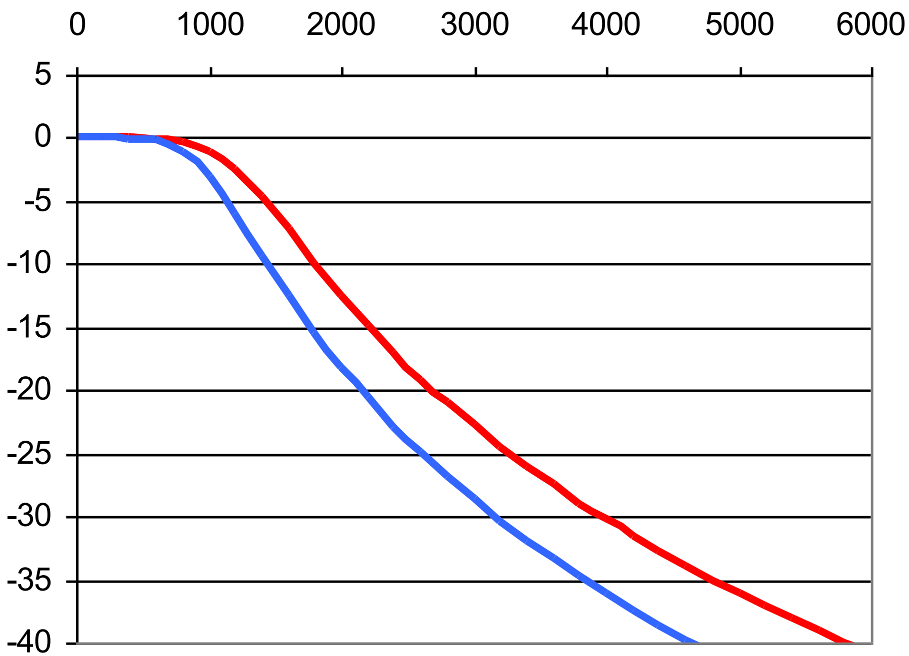
- 2ème et 3ème étape : calcul de **n** puis calcul de ω_0

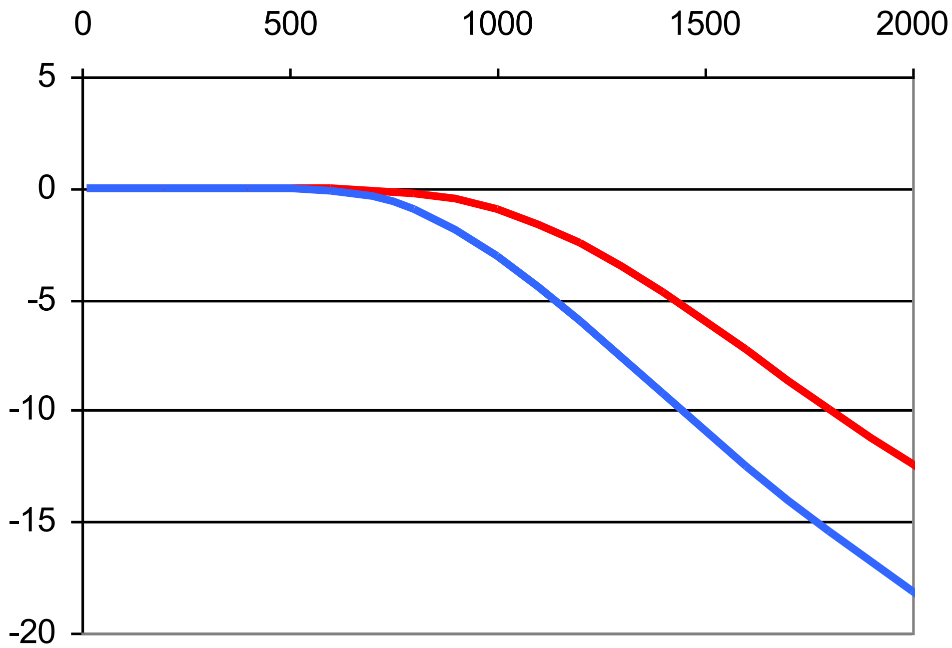
$$n = \frac{\log\left(\frac{10^3 - 1}{\varepsilon^2}\right)}{2.\log 5} = 2,565$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_c}{\sqrt[n]{\varepsilon}} = 1252 rd/s$$

Exemple de synthèse d'un passe-bas dans le cas général ($A_p \neq 3dB$)

- On utilise alors le polynôme classique pour un ordre 3





Autres types de réponses

- Réponse de type passe-haut
  - On calcule le passe-bas **de même sélectivité** et de même pulsation de coupure
  - On détermine ε et n pour le passe-bas
  - On calcule alors ω_0
  - On assemble alors les cellules passe-haut correspondant au polynôme de degré n

A_p *et* A_s sont conservés

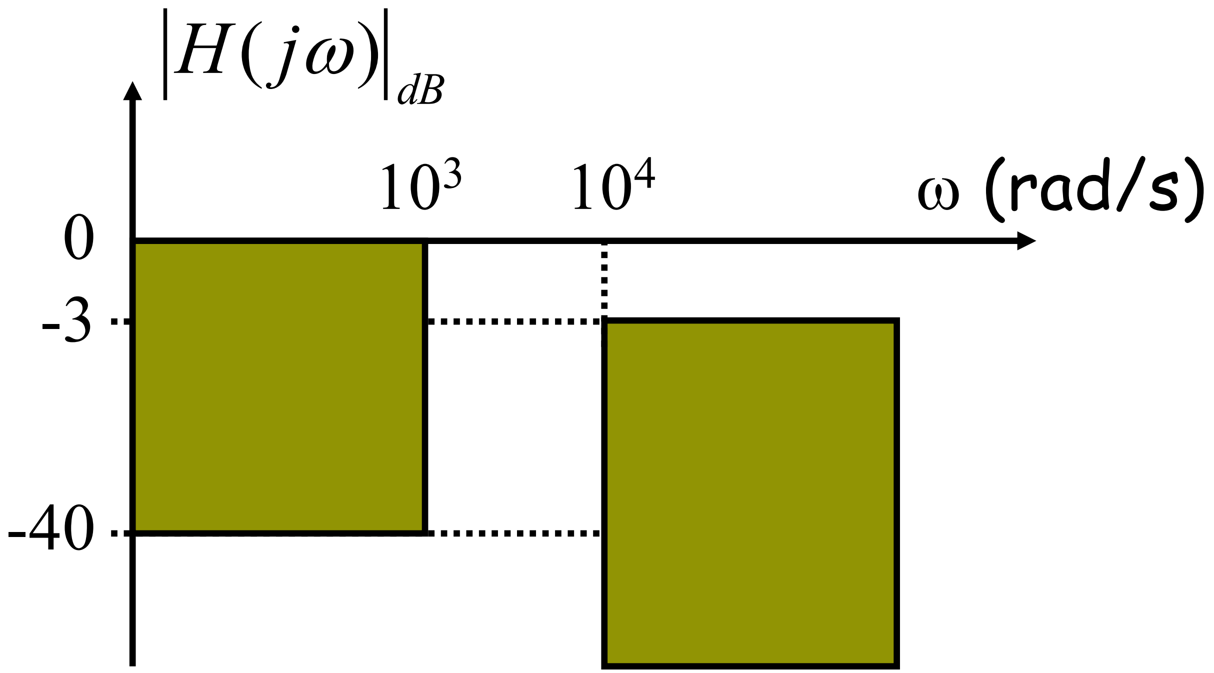
$$\frac{\omega_c}{\omega_s(ph)} = \frac{\omega_s(pb)}{\omega_c}$$

$$\omega_0 = \omega_c \sqrt[n]{\varepsilon}$$

- Réponse de type passe-bande et réjecteur
  - On calcule un filtre passe-bas et un filtre passe-haut que l'on met en cascade ou en parallèle

Exercice

- Calculer la fonction de transfert du filtre de Butterworth correspondant au gabarit ci-dessous.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.



Filtrage analogique

- Rappels & compléments
  - Généralités
  - Filtres actifs du 1er ordre
  - Filtres actifs du 2nd ordre
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Conclusions

Filtres de Chebyshev

- Il existe deux types de filtres de Chebyshev et donc deux types de fonction de transfert pour des filtres passe-bas :
  - Chebyshev de type 1 qui présente des oscillations dans la bande passante

    $$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}}$$

    → ε permets de régler le taux d'ondulation
  - Chebyshev de type 2 qui présente des oscillations dans la bande d'arrêt

    $$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\varepsilon \cdot C_n(\omega_c/\omega)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_c/\omega)}}$$

  - $C_n(x)$ est un polynôme spécifique d'ordre n

Filtres de Chebyshev

- Les polynômes de Chebyshev

$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

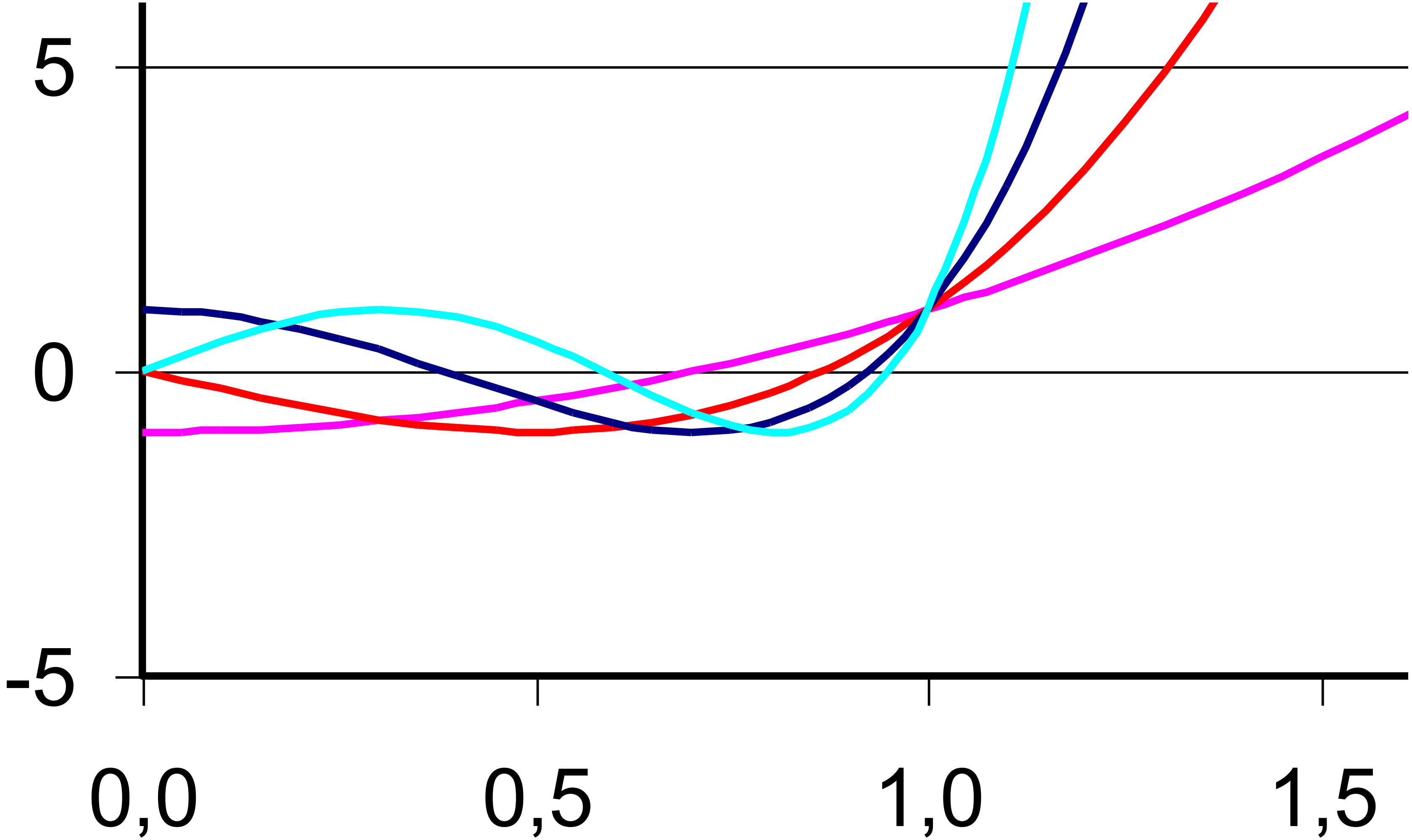
$$C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

...

- Propriétés de ces polynômes
  - $C_n(1) = 1$ quel que soit n
  - $C_n(0) = 0$ pour les ordres impairs
  - $C_n(0) = \pm 1$ pour les ordres pairs
  - Oscillations entre ±1 du polynôme entre x=0 et x=1
  - augmentation monotone du polynôme pour x>1

Filtres de Chebyshev

- Les polynômes de Chebyshev pour n = 2 à 5



Filtres de Chebyshev passe-bas de type 1

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}}$$

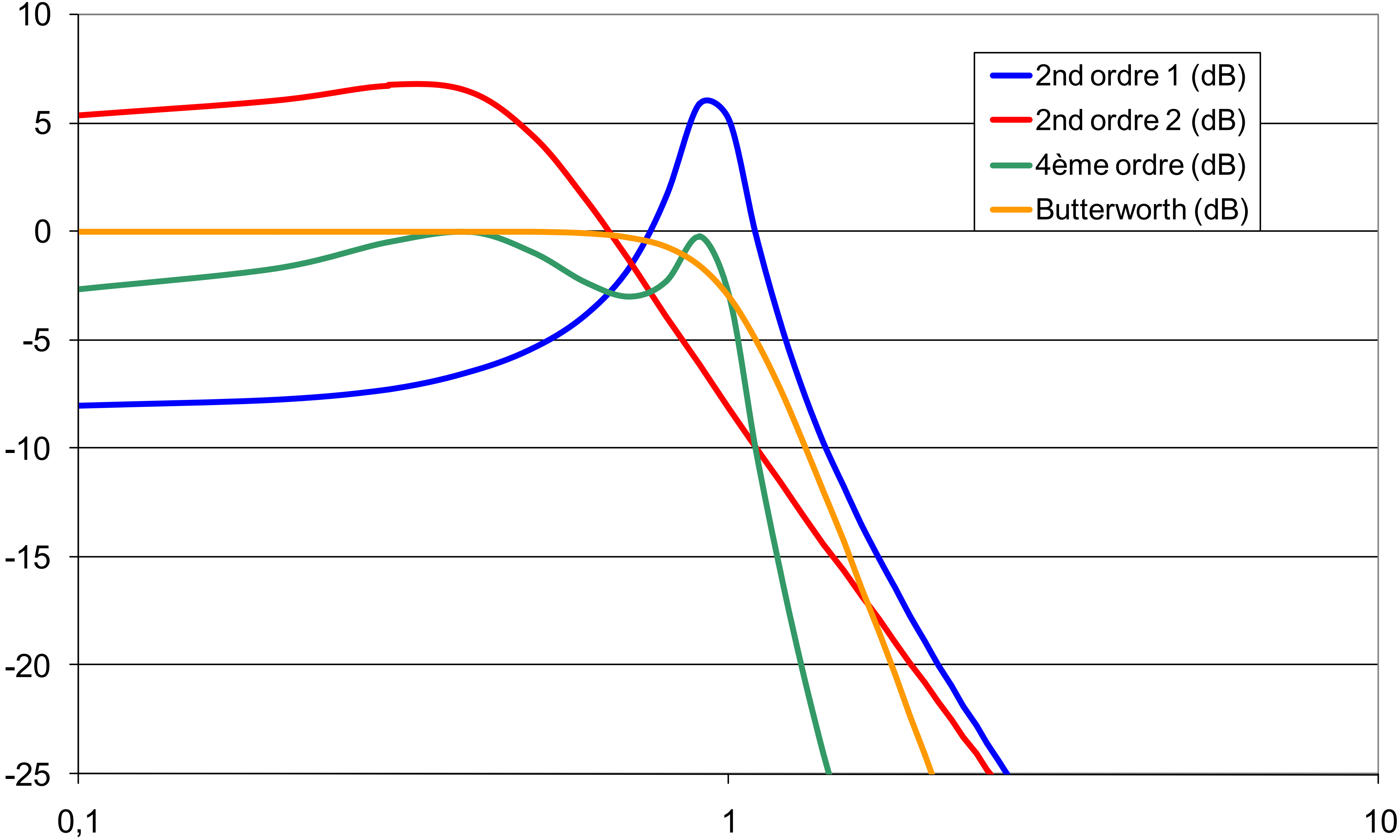
- Variations dans la bande passante
  - $\omega/\omega_c \leq 1 \rightarrow C_n^2(x)$ est toujours inférieur à 1

$$H_0 > |H(j\omega)| > \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

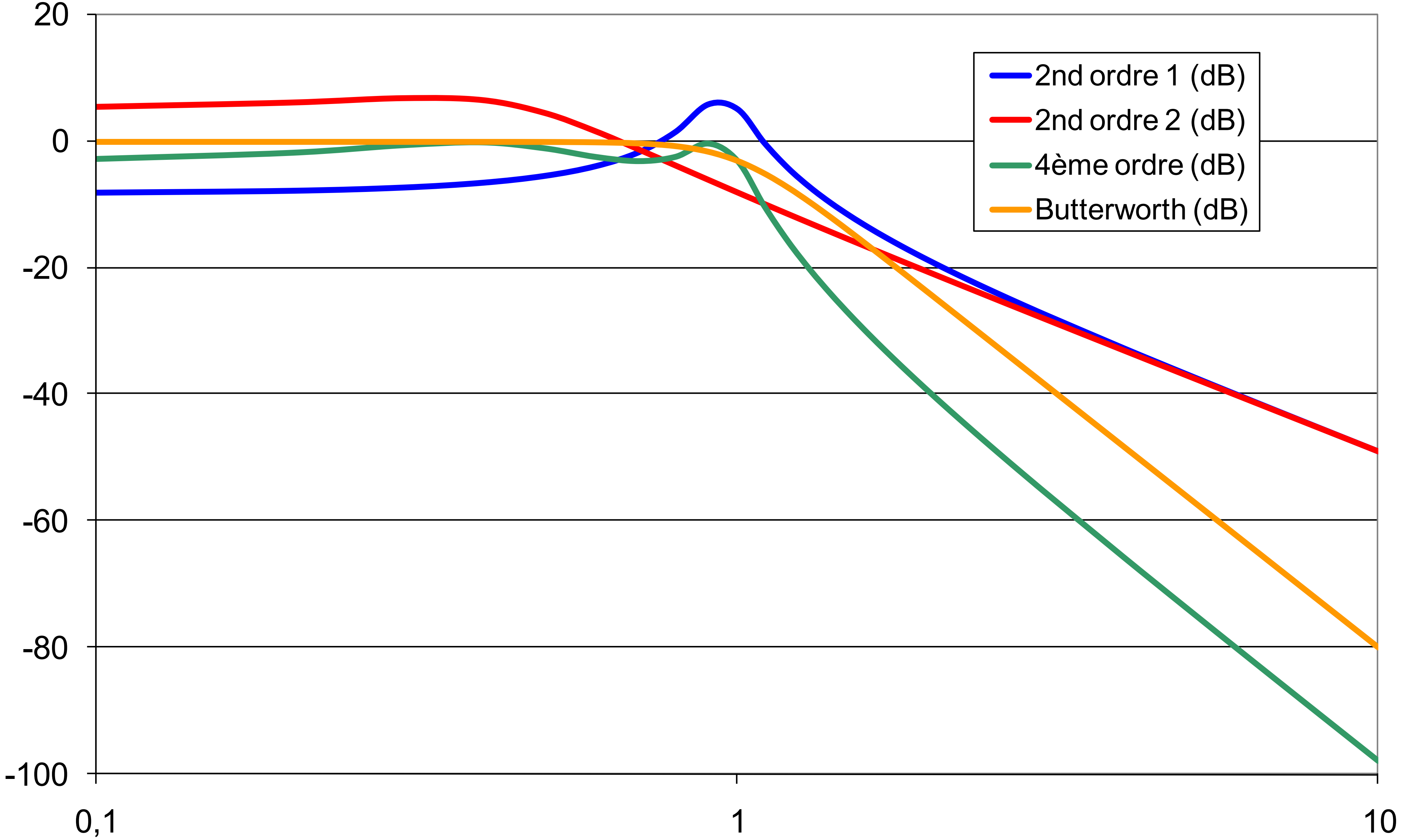
- Variations en dehors de la bande passante
  - $\omega/\omega_c > 1 \rightarrow C_n(x)$ est positif et croissant

$$|H(j\omega)| \rightarrow \frac{H_0}{\varepsilon \cdot C_n(\omega/\omega_c)}$$

Chebyshev type I : 4ème ordre (-3dB)



Chebyshev type I : 4ème ordre (-3dB)



Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\omega/\omega_c\right)}}$$

- Etape 1 : le taux d'ondulation A_p (en dB) dans la bande passante permet de calculer ε

$$C_n^2(0 < x \leq 1) \leq 1 \Rightarrow \left|H(0 < x \leq 1)\right| \geq \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$10\log\left(1+\varepsilon^2\right) = 0{,}5dB \Rightarrow \varepsilon = 0{,}3493$$

$$10\log\left(1+\varepsilon^2\right) = 1dB \Rightarrow \varepsilon = 0{,}5089$$

$$10\log\left(1+\varepsilon^2\right) = 3dB \Rightarrow \varepsilon = 0{,}9976$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

- Etape 2 : détermination de l'ordre du filtre à partir de la largeur de la bande de transition et de l'atténuation requise en limite de bande d'arrêt.

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{\omega_c} \qquad \left|H(j\omega_s)\right| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_r)}}$$

- Solution 1

$$\Rightarrow 10\log\left(1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_r)\right) > A_s$$

$$\Rightarrow \text{On cherche } n \text{ tel que } C_n(\omega_r) > \sqrt{\frac{10^{A_s/10}-1}{\varepsilon^2}} = g$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

- Solution 2, on calcule

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{\omega_c}$$

$$g = \sqrt{\frac{10^{As/10} - 1}{\varepsilon^2}}$$

$$n = \frac{\log\left(g + \sqrt{g^2 - 1}\right)}{\log\left(\omega_r + \sqrt{\omega_r^2 - 1}\right)}$$

- On choisit alors la valeur de n entière et immédiatement supérieure

TABLE 9.5-2 NORMALIZED CHEBYSHEV POLYNOMIALS

n	Polynomial
	0.5-dB Ripple ($\epsilon = 0.3493$)
1	$j\omega + 2.863$
2	$(j\omega)^2 + 1.426(j\omega) + 1.516$
3	$(j\omega + 0.626)[(j\omega + 0.313)^2 + 1.022^2]$
4	$[(j\omega + 0.175)^2 + 1.016^2][(j\omega + 0.423)^2 + 0.421^2]$
5	$(j\omega + 0.362)[(j\omega + 0.112)^2 + 1.012^2][(j\omega + 0.293)^2 + 0.625^2]$
6	$[(j\omega + 0.078)^2 + 1.009^2][(j\omega + 0.212)^2 + 0.738^2][(j\omega + 0.290)^2 + 0.270^2]$
7	$(j\omega + 0.256)[(j\omega + 0.057)^2 + 1.006^2][(j\omega + 0.160)^2 + 0.807^2][(j\omega + 0.231)^2 + 0.448^2]$
8	$[(j\omega + 0.044)^2 + 1.005^2][(j\omega + 0.124)^2 + 0.852^2][(j\omega + 0.186)^2 + 0.569^2][(j\omega + 0.219)^2 + 0.200^2]$
9	$(j\omega + 0.198)[(j\omega + 0.034)^2 + 1.004^2][j\omega + 0.099)^2 + 0.883^2][(j\omega + 0.152)^2 + 0.655^2]$
	$[(j\omega + 0.186)^2 + 0.349^2]$
	1.0-dB Ripple ($\epsilon = 0.5089$)
1	$j\omega + 1.962$
2	$(j\omega)^2 + 1.098j\omega + 1.103$
3	$(j\omega + 0.494)[(j\omega + 0.247)^2 + 0.966^2]$
4	$[(j\omega + 0.140)^2 + 0.983^2][(j\omega + 0.337)^2 + 0.407^2]$
5	$j\omega + 0.289)[(j\omega + 0.090)^2 + 0.990^2][(j\omega + 0.234)^2 + 0.612^2]$
6	$[(j\omega + 0.062)^2 + 0.993^2][(j\omega + 0.170)^2 + 0.727^2][(j\omega + 0.232)^2 + 0.266^2]$
7	$(j\omega + 0.205)[(j\omega + 0.046)^2 + 0.995^2][(j\omega + 0.128)^2 + 0.798^2][(j\omega + 0.185)^2 + 0.443^2]$
8	$[(j\omega + 0.035)^2 + 0.997^2][(j\omega + 0.100)^2 + 0.845^2][(j\omega + 0.149)^2 + 0.564^2][(j\omega + 0.176)^2 + 0.198^2]$
9	$(j\omega + 0.159)[(j\omega + 0.028)^2 + 0.997^2][(j\omega + 0.080)^2 + 0.877^2][(j\omega + 0.122)^2 + 0.651^2]$
	$[(j\omega + 0.150)^2 + 0.346^2]$
	2.0-dB Ripple ($\epsilon = 0.7648$)

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

- Exemple :
  - Pulsation de coupure : ω_c = 10^3 rd/s (A_{max}=3dB)
  - Bande atténuée : ω_s= 5 10^3 rd/s (A_{min}=30dB)
- 3dB → ε=1 :

$$g = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{\varepsilon^2}} \approx 31{,}6$$

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{\omega_c} = 5$$

$$\left.\right\} \quad n = \frac{\log\left(g + \sqrt{g^2 - 1}\right)}{\log\left(\omega_r + \sqrt{\omega_r^2 - 1}\right)} = 1{,}808$$

$$\left|H(j\omega_s)\right| = \frac{2}{\sqrt{1 + (2 \times 25 - 1)^2}} = \frac{2}{49} \rightarrow 20\log(49) = 33{,}8dB$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

- On choisit le polynôme correspondant à *n* et ε et on effectue le remplacement suivant :

$$p \to \frac{j\omega}{\omega_c} \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2 + 0{,}645\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right) + 0{,}708}$$

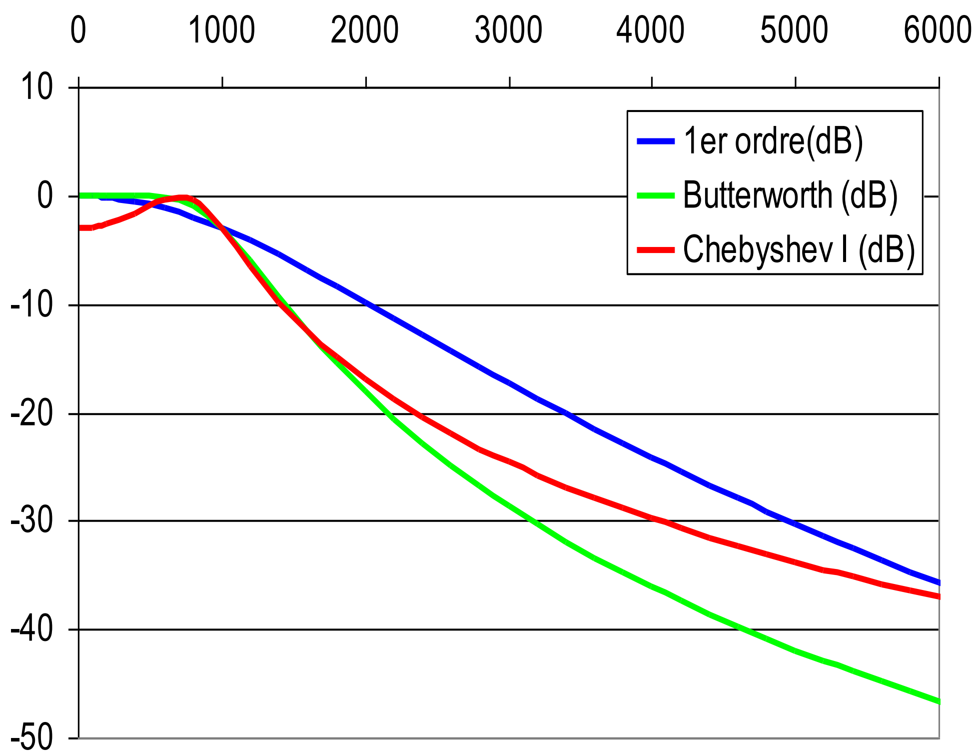
- On vérifie :

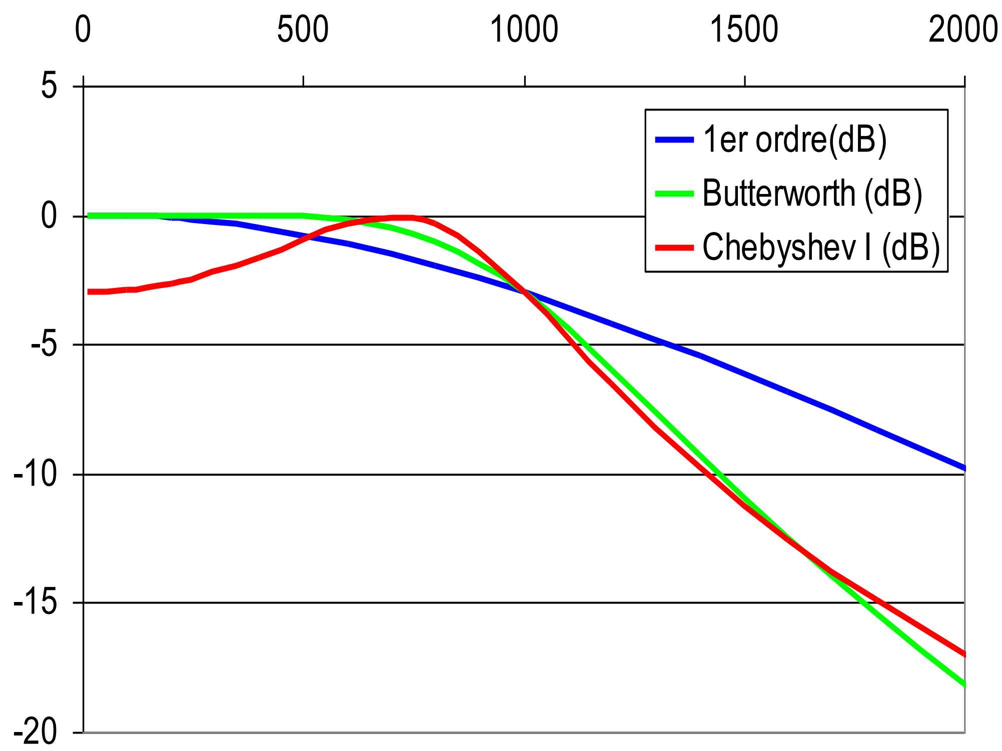
$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(0{,}645\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(0{,}708 - \frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(0{,}645^2 - 2\times 0{,}708\right)\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}} + 0{,}708^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}}\right)^2}}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(-1)\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}} + 0{,}708^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{-4\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}} + 2 + 4\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(2\frac{\omega^2}{\omega_c^{\,2}} - 1\right)^2}}$$

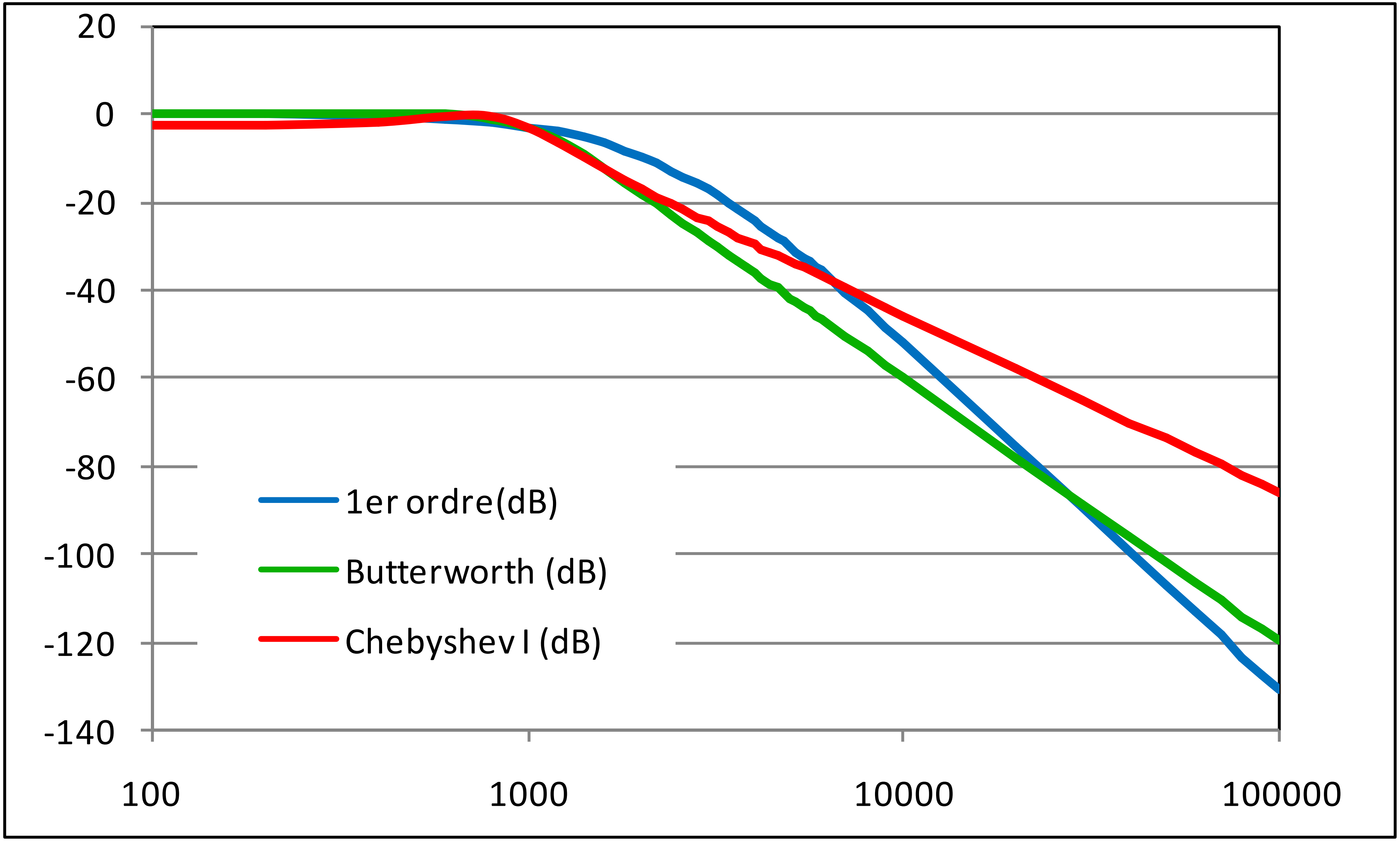
Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

- Par rapport à l'utilisation de sections du premier ordre ou d'un filtre de Butterworth:
  - 2^{nd} ordre suffit - Gain dans la bande moins stable





Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I



Implantation matérielle

- On part de la fonction de transfert du 2nd ordre

$$H(j\omega)=\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2+0{,}645\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)+0{,}708}$$

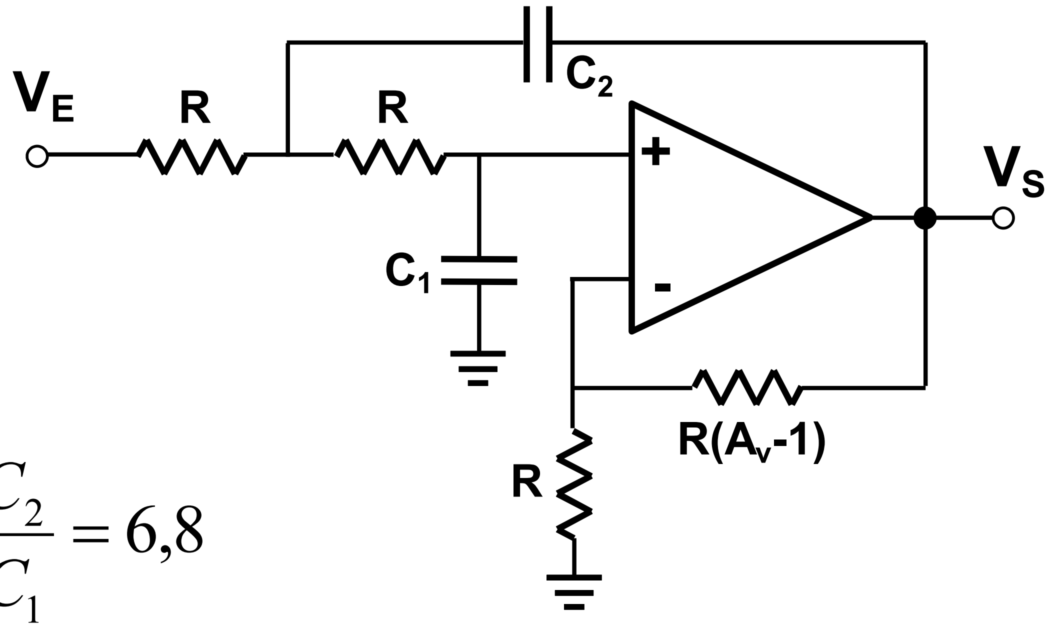
- On fait ensuite apparaître le dénominateur caractéristique d'un 2nd ordre synthétisable

$$H(j\omega)=\frac{1/0{,}708}{\frac{1}{0{,}708}\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2+\frac{0{,}645}{0{,}708}\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)+1}=\frac{1{,}412}{\left(\frac{j\omega}{0{,}841\cdot\omega_c}\right)^2+0{,}767\left(\frac{j\omega}{0{,}841\cdot\omega_c}\right)+1}$$

$$\Rightarrow \omega_0=0{,}841\cdot\omega_c \qquad \Rightarrow 2m=0{,}767 \Leftrightarrow Q=1{,}304$$

Implantation matérielle

- Sallen-Key
  Passe-bas à
  gain unitaire (A_v=1)



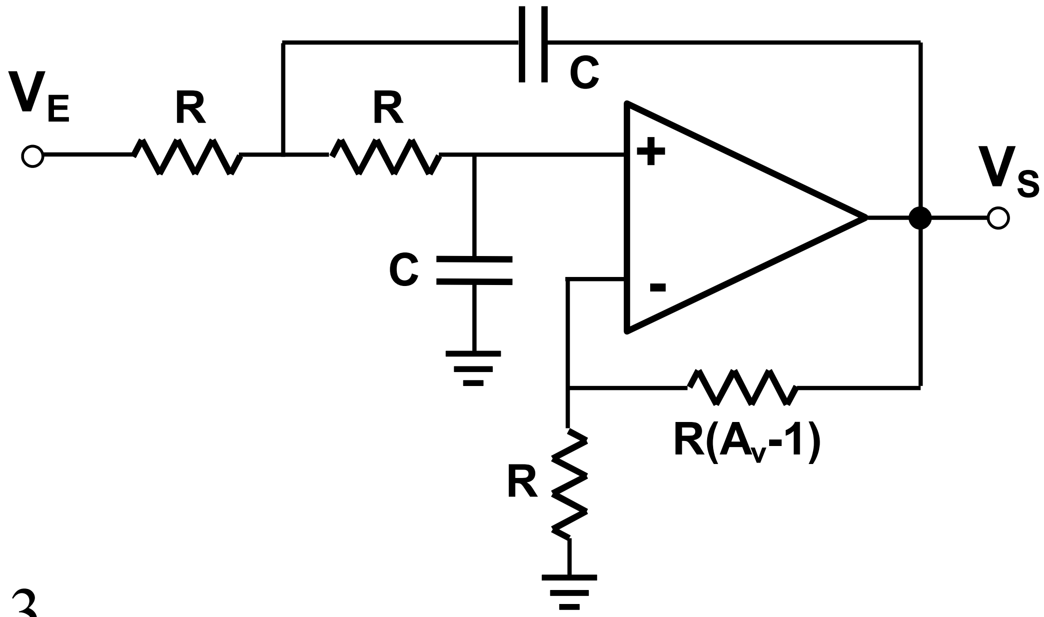
$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = 1{,}304 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = 6{,}8$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{1}{RC_1\sqrt{6{,}8}} = 841\,\mathrm{rd/s} \Rightarrow \frac{1}{RC_1} = 2193\,\mathrm{rd/s}$$

$$R = 10k\Omega \Rightarrow C_1 = 46nF \Rightarrow C_2 = 310nF$$

Implantation matérielle

- Sallen-Key
  Passe-bas
  symétrique



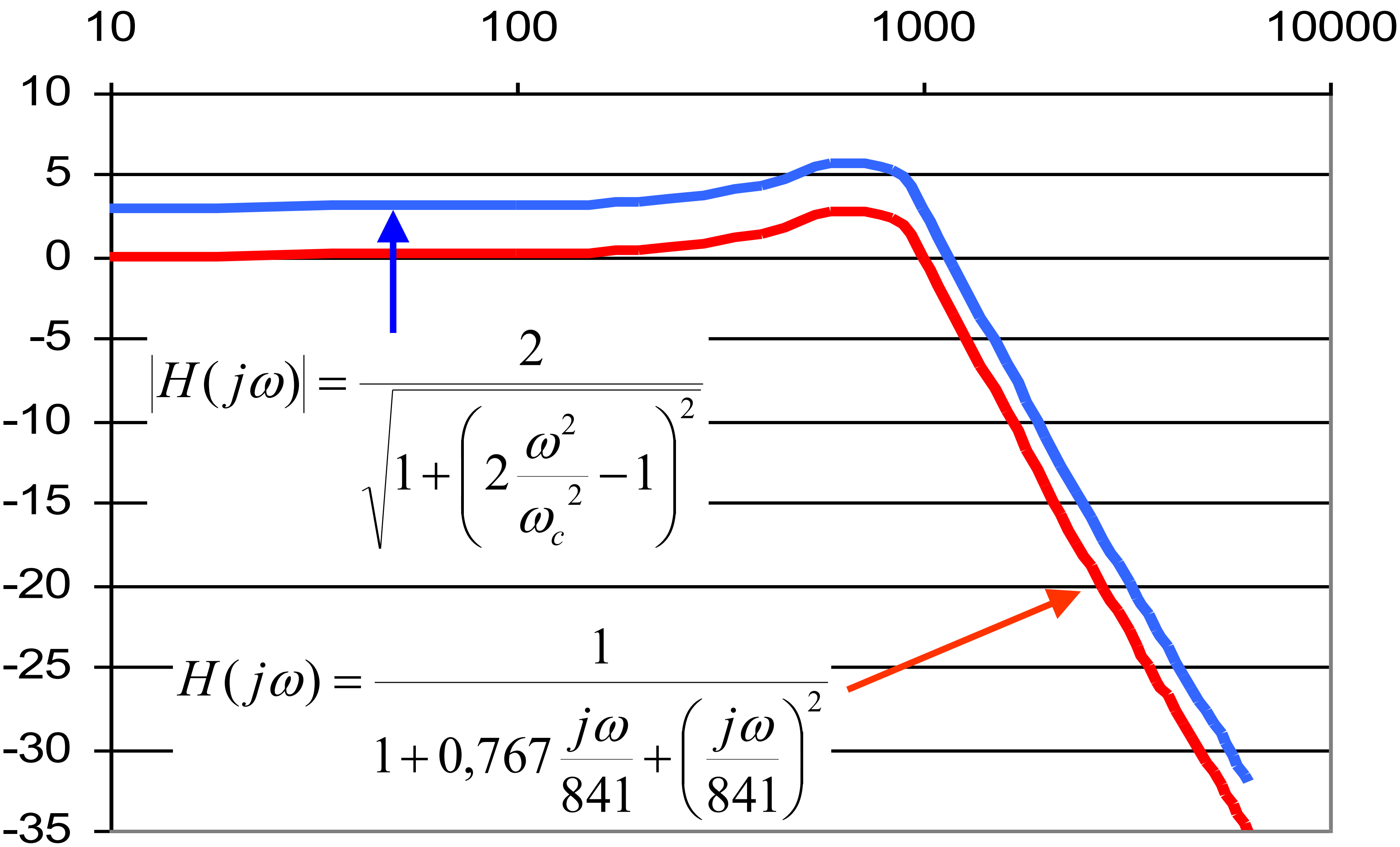
$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{3 - A_v} = 1{,}304$$

$$\Rightarrow 3 - A_v = 0{,}767 \Rightarrow A_v = 2{,}233$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 841 \mathrm{rd/s}$$

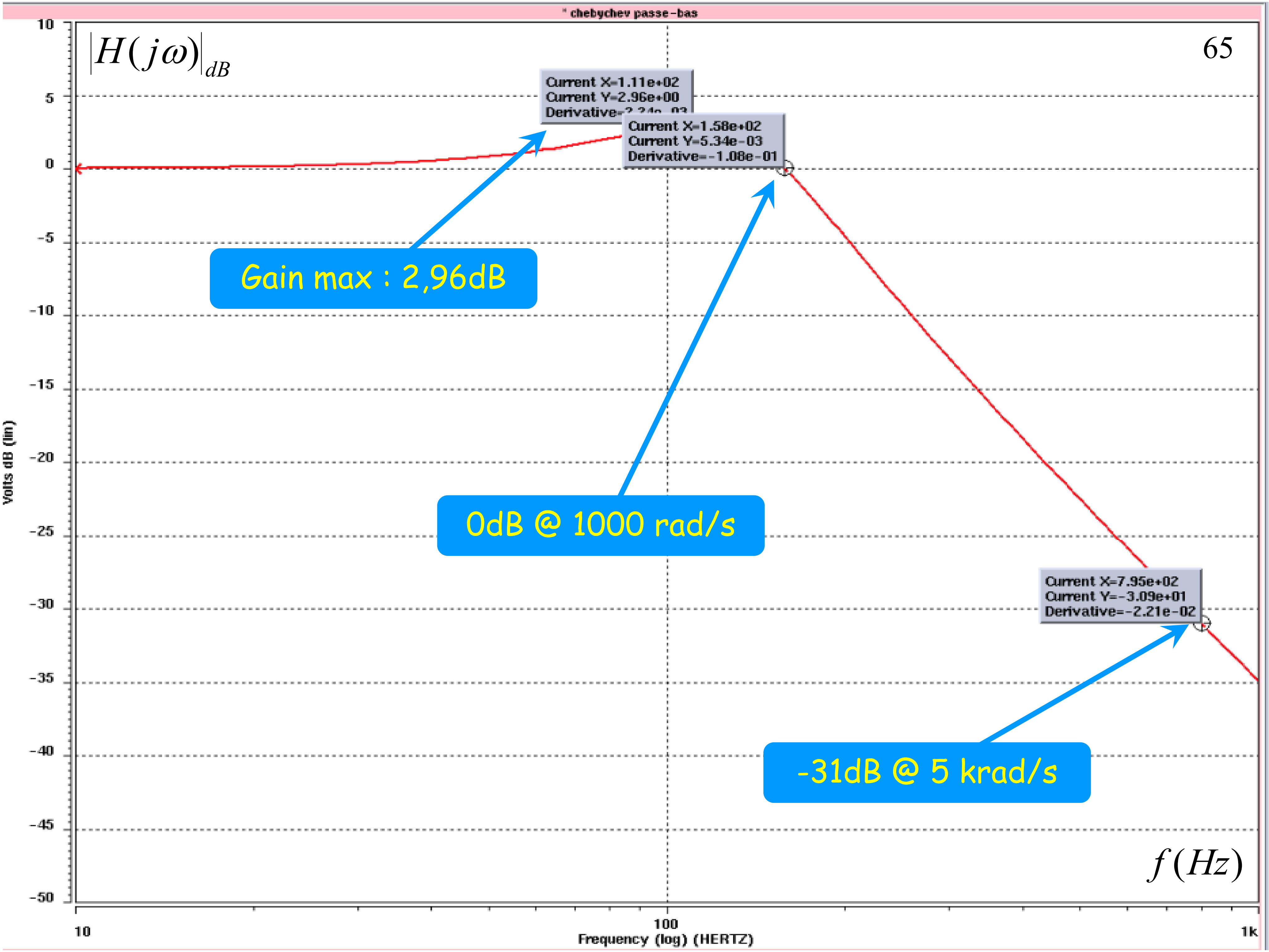
$$R = 10k\Omega \Rightarrow C = 120nF$$

Implantation matérielle



$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{2}{\sqrt{1+\left(2\dfrac{\omega^2}{\omega_c^{\ 2}}-1\right)^2}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+0{,}767\dfrac{j\omega}{841}+\left(\dfrac{j\omega}{841}\right)^2}$$


* chebychev passe-bas
$|H(j\omega)|_{dB}$
Current X=1.11e+02
Current Y=2.96e+00
Current X=1.58e+02
Current Y=5.34e-03
Derivative=-1.08e-01
Current X=7.95e+02
Current Y=-3.09e+01
Derivative=-2.21e-02
Gain max : 2,96dB
0dB @ 1000 rad/s
-31dB @ 5 krad/s
Volts dB (lin)
Frequency (log) (HERTZ)
$f(Hz)$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-haut de type I

POLYTECH MONTPELLIER

- On détermine l'ordre du filtre passe-bas de même sélectivité.

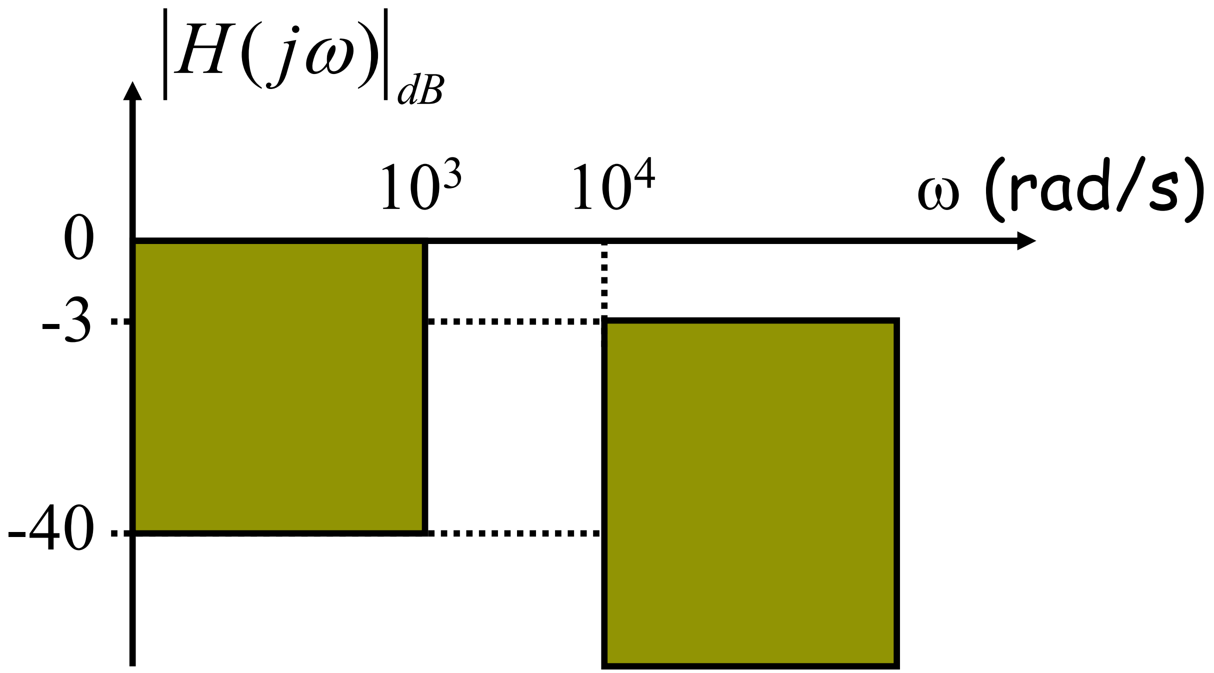
$$\left.\begin{aligned} \omega_r &= \frac{\omega_c}{\omega_s} \\ g &= \sqrt{\frac{10^{As/10}-1}{\varepsilon^2}} \end{aligned}\right\} \qquad n = \frac{\log\left(g+\sqrt{g^2-1}\right)}{\log\left(\omega_r+\sqrt{\omega_r^2-1}\right)}$$

- On choisit le polynôme correspondant à *n* et ε mais cette fois-ci on effectue le remplacement suivant :

$$p \to \frac{\omega_c}{j\omega}$$

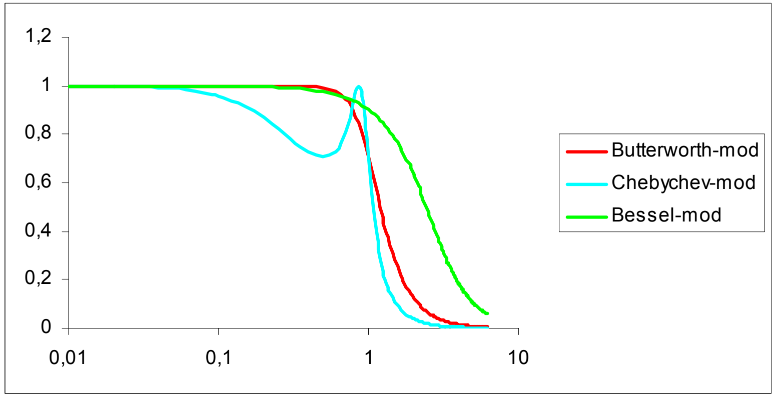
Exercice

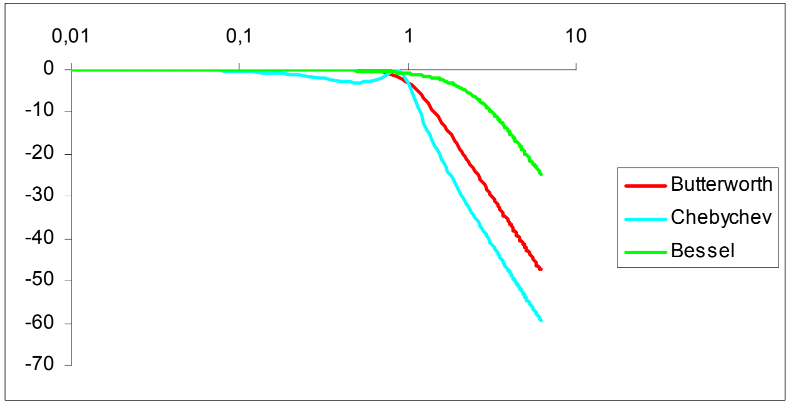
- Calculer la fonction de transfert du filtre de Chebyshev correspondant au gabarit ci-dessous.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.

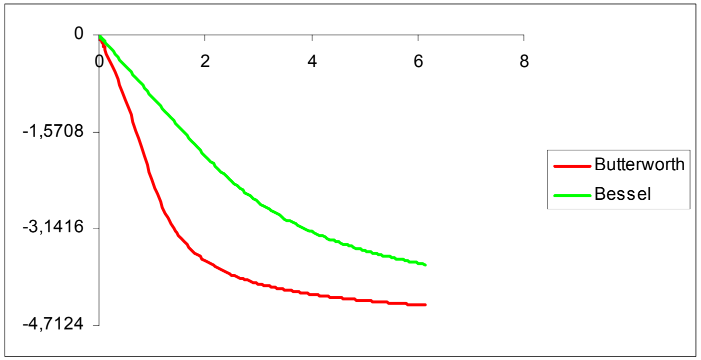


Comparaison des fonctions de transfert

Comparaison des fonctions de transfert (filtres d’ordre 3)







Phase comparée
des filtres de Butterworth
et de Bessel

Filtrage analogique

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Filtres de Bessel
  - Conclusions

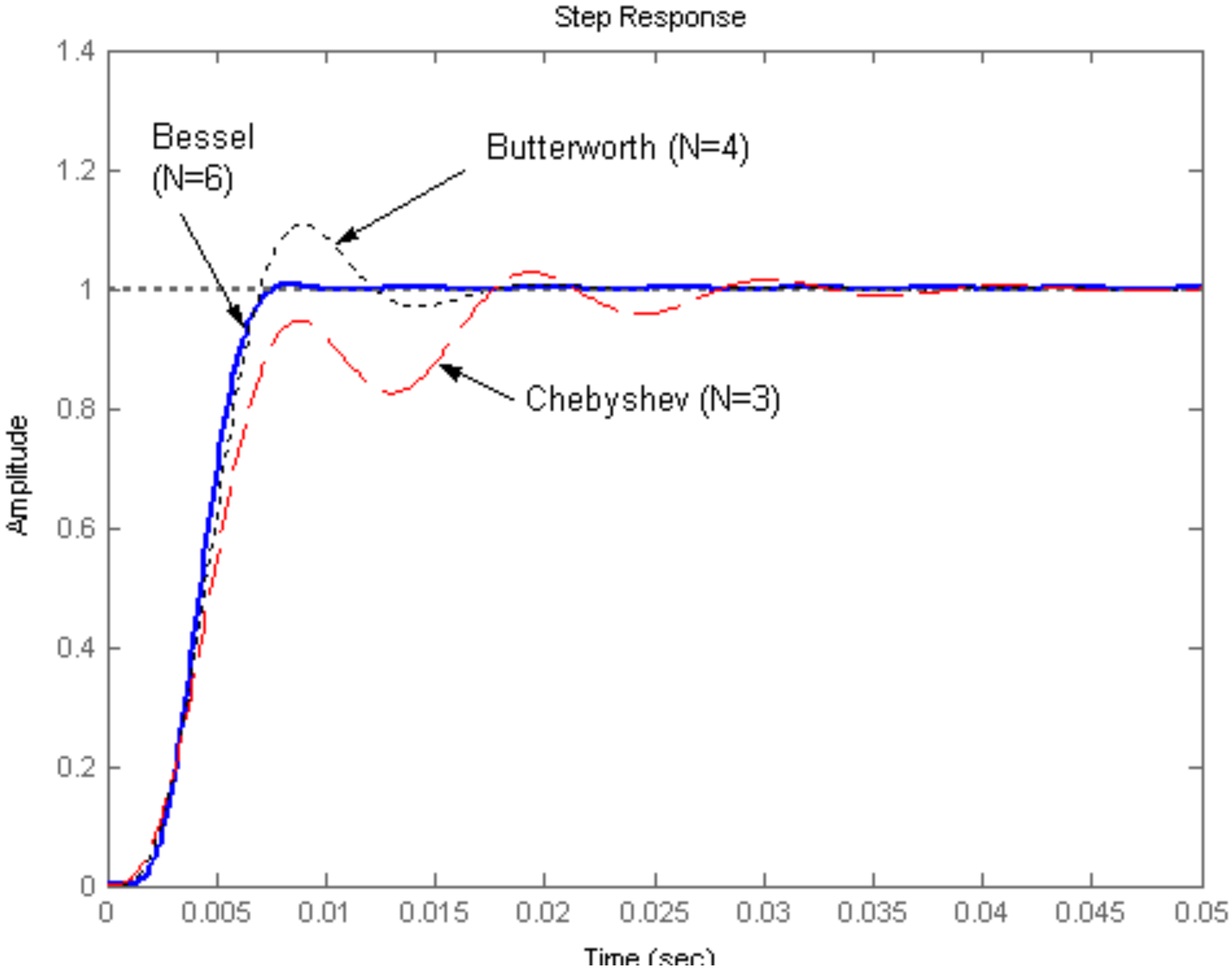
Filtres de Bessel (ou Thompson)

- Réponse en amplitude dans la BP sans ondulation
- Déphasage linéaire
- Distorsion minimale sur les signaux non sinusoidaux
- Fonction de Bessel
  - $F(p) = e^{-p} = 1/\ (Ch(p) + Sh(p))$
- Polynomes de Bessel
  - $P_0 = 1$
  - $P_1 = P+1$
  - $P_n = (2n-1)\ P_{n-1} + P^2\ P_{n-2}$

Filtres de Bessel (réponse indicielle)

Réponses indicielles comparées pour 3 types de filtres répondant au même gabarit

(Amax=3dB, Amin=40 dB, fp=100 Hz, fa=300 Hz)



Pôlynome de Bessel

Après normalisation

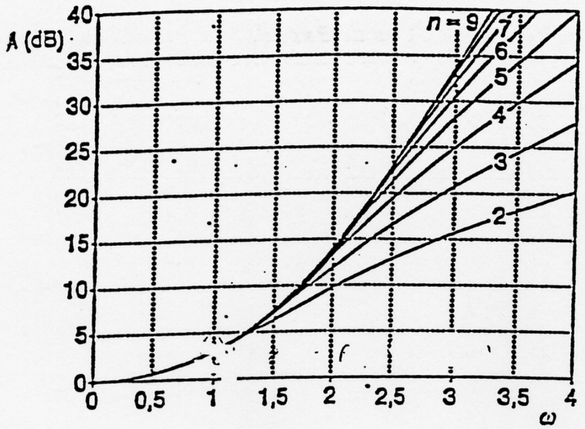
n	polynômes de Bessel normalisés en gain et en pulsation
2	$D_2 = 0{,}618P^2 + 1{,}361P + 1$
3	$D_3 = 0{,}3607P^3 + 1{,}2328P^2 + 1{,}7556P + 1$
4	$D_4 = 0{,}1901P^4 + 0{,}8995P^3 + 1{,}9149P^2 + 2{,}1138P + 1$
5	$D_5 = 0{,}08911P^5 + 0{,}5506P^4 + 1{,}588P^3 + 2{,}6174P^2 + 2{,}4266P + 1$
6	$D_6 = 0{,}03754P^6 + 0{,}2916P^5 + 1{,}0788P^4 + 2{,}3944P^3 + 3{,}3216P^2 + 2{,}7033P + 1$

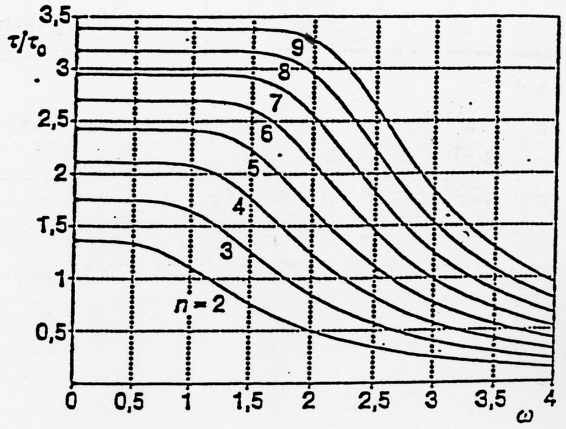
Tableau 4 : polynômes de Bessel normalisés

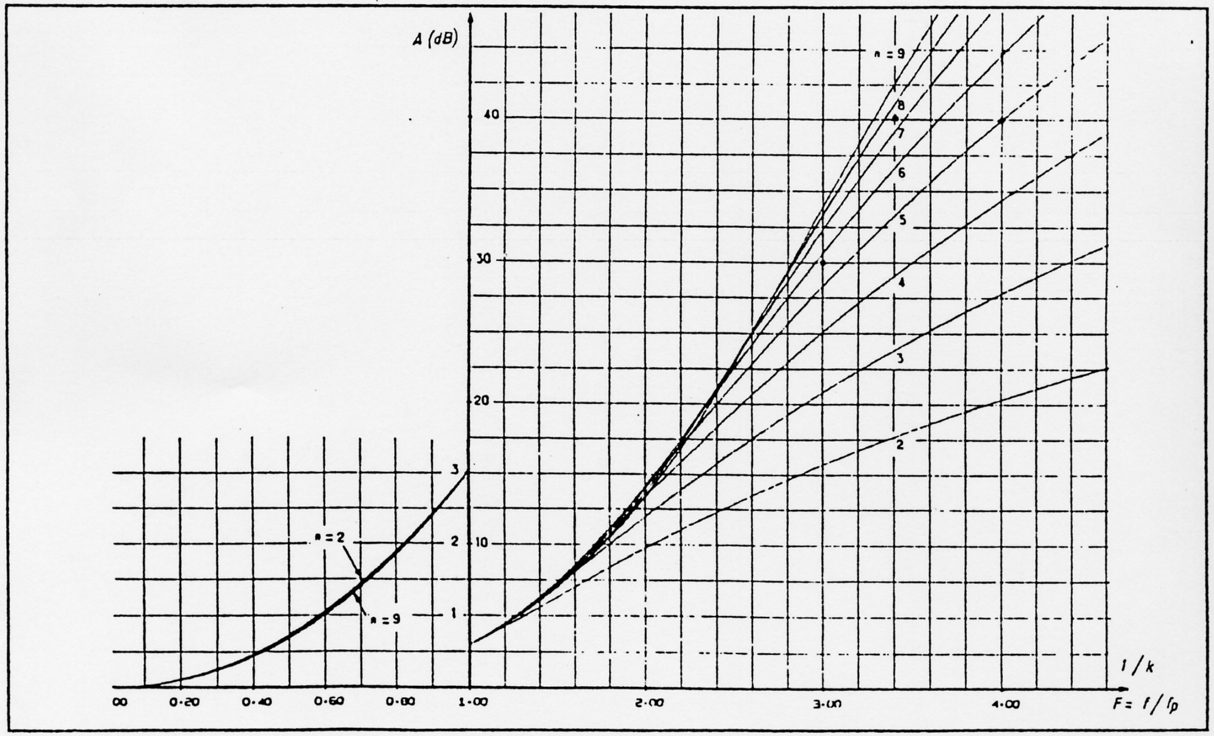
n	polynômes de Bessel normalisés en gain et en pulsation
2	$D_2 = 0{,}618P^2 + 1{,}361P + 1$
3	$D_3 = (0{,}756P + 1)(0{,}4771P^2 + 0{,}9996P + 1)$
4	$D_4 = (0{,}4883P^2 + 1{,}3389P + 1)(0{,}3885P^2 + 0{,}7738P + 1)$
5	$D_5 = (0{,}665P + 1)(0{,}4128P^2 + 1{,}1401P + 1)(0{,}3245P^2 + 0{,}621P + 1)$
6	$D_6 = (0{,}3891P^2 + 1{,}2224P + 1)(0{,}3509P^2 + 0{,}9691P + 1)(0{,}2759P^2 + 0{,}5133P + 1)$
7	$D_7 = (0{,}594P + 1)(0{,}3396P^2 + 1{,}0946P + 1)(0{,}3012P^2 + 0{,}8305P + 1)(0{,}2382P^2 + 0{,}4333P + 1)$
8	$D_8 = (0{,}3166P^2 + 1{,}112P + 1)(0{,}2984P^2 + 0{,}976P + 1)(0{,}2625P^2 + 0{,}721P + 1)(0{,}209P^2 + 0{,}373P + 1)$

Tableau 5 : forme quadratique des polynômes de Bessel normalisés

ANNEXE 5 – Filtres de Bessel





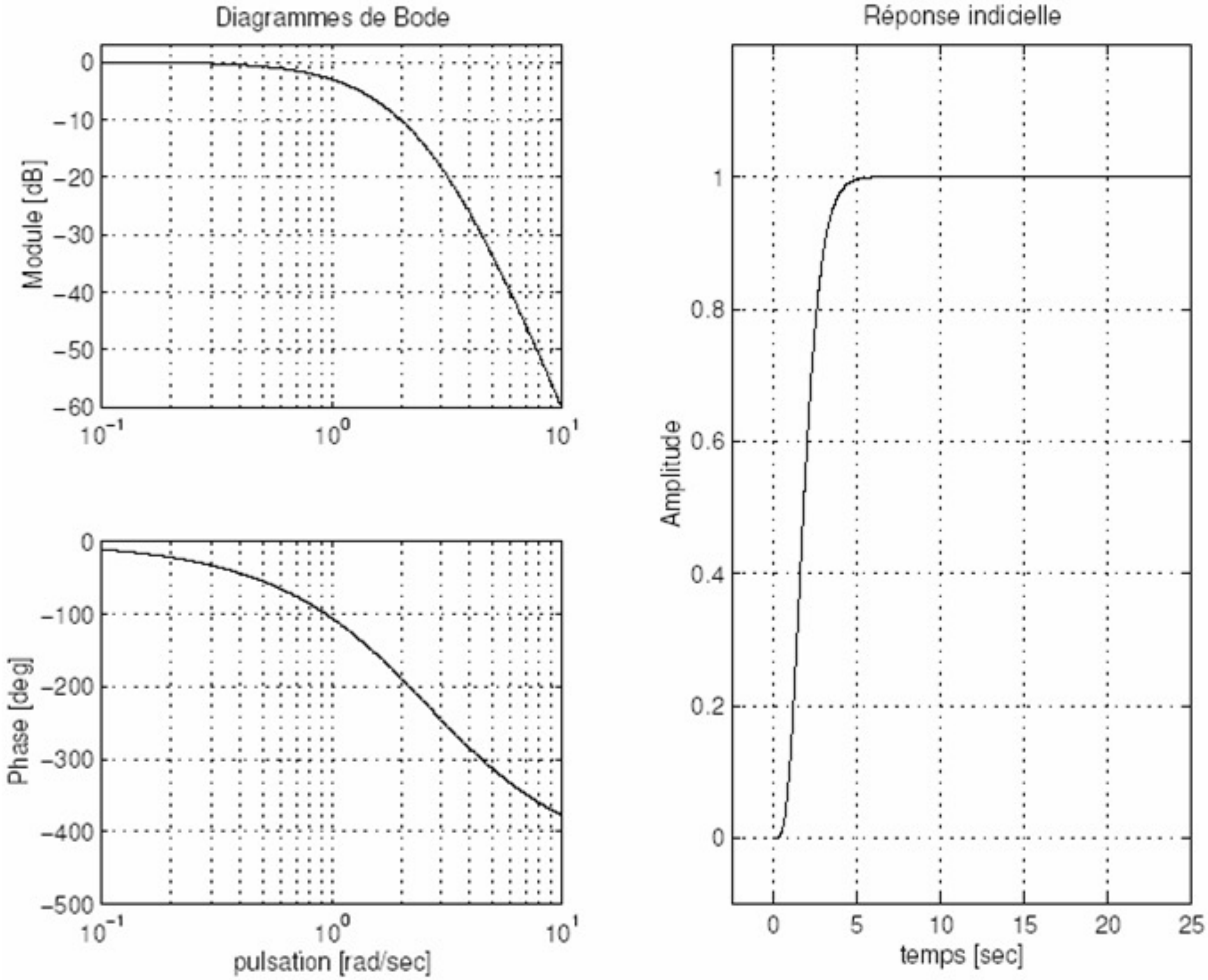


Courbes de l'atténuation en fonction de la fréquence des filtres de Bessel.

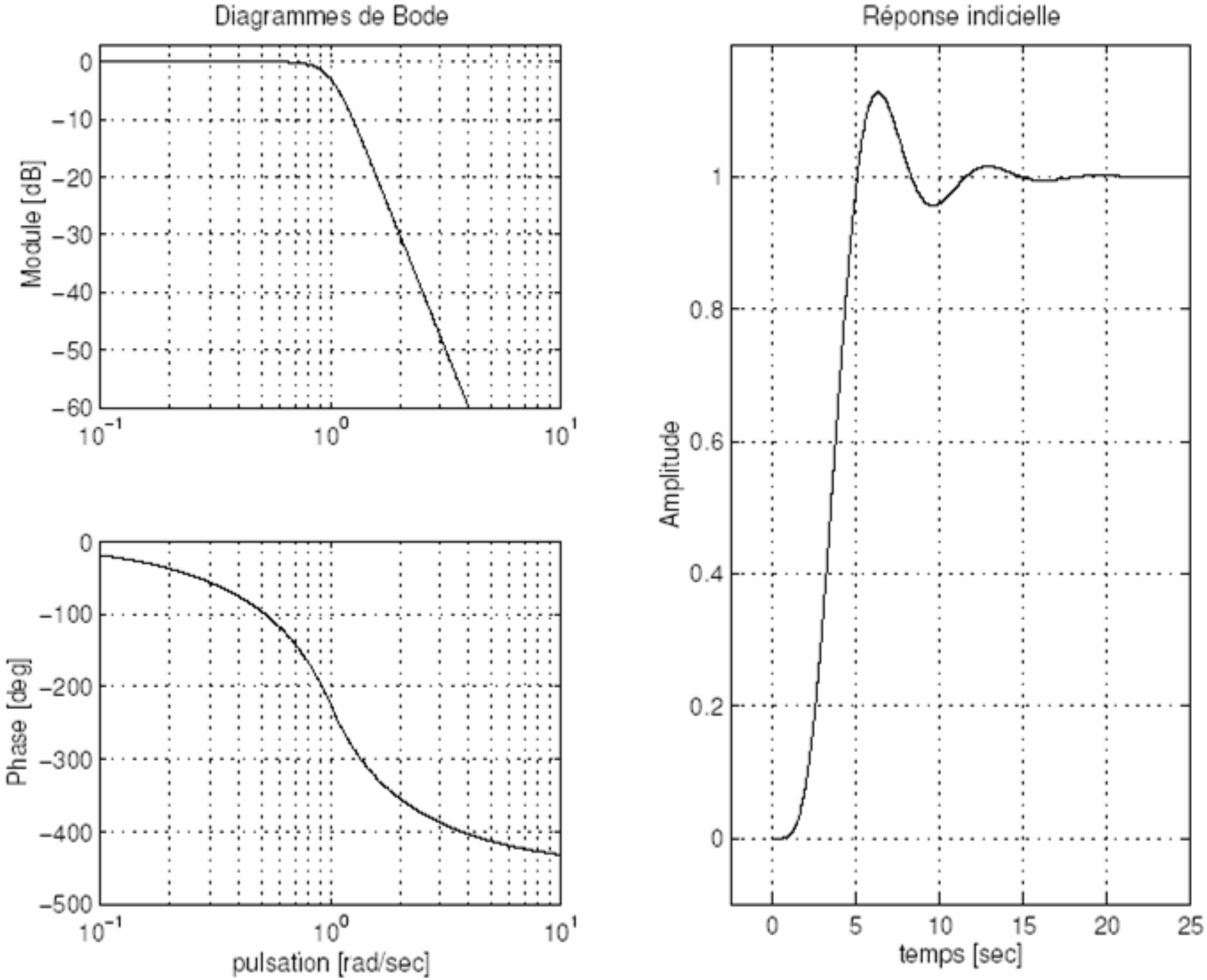
Comparaison des filtres

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff
Réponse fréquentielle : Régularité de la courbe d'amplitude Raideur de la transition	 excellente (+) satisfaisante	 moyenne faible (–)	 ondulations (–) bonne (+)
Réponse temporelle : Régularité du temps de propagation Qualité de la réponse temporelle	 faible moyenne	 excellente (+) excellente (+)	 mauvaise (–) mauvaise (–)
Caractéristiques : Facteurs de qualité Disparité de la valeur des composants	 moyens faible	 faibles (+) très faible (+)	 élevés (–) forte (–)

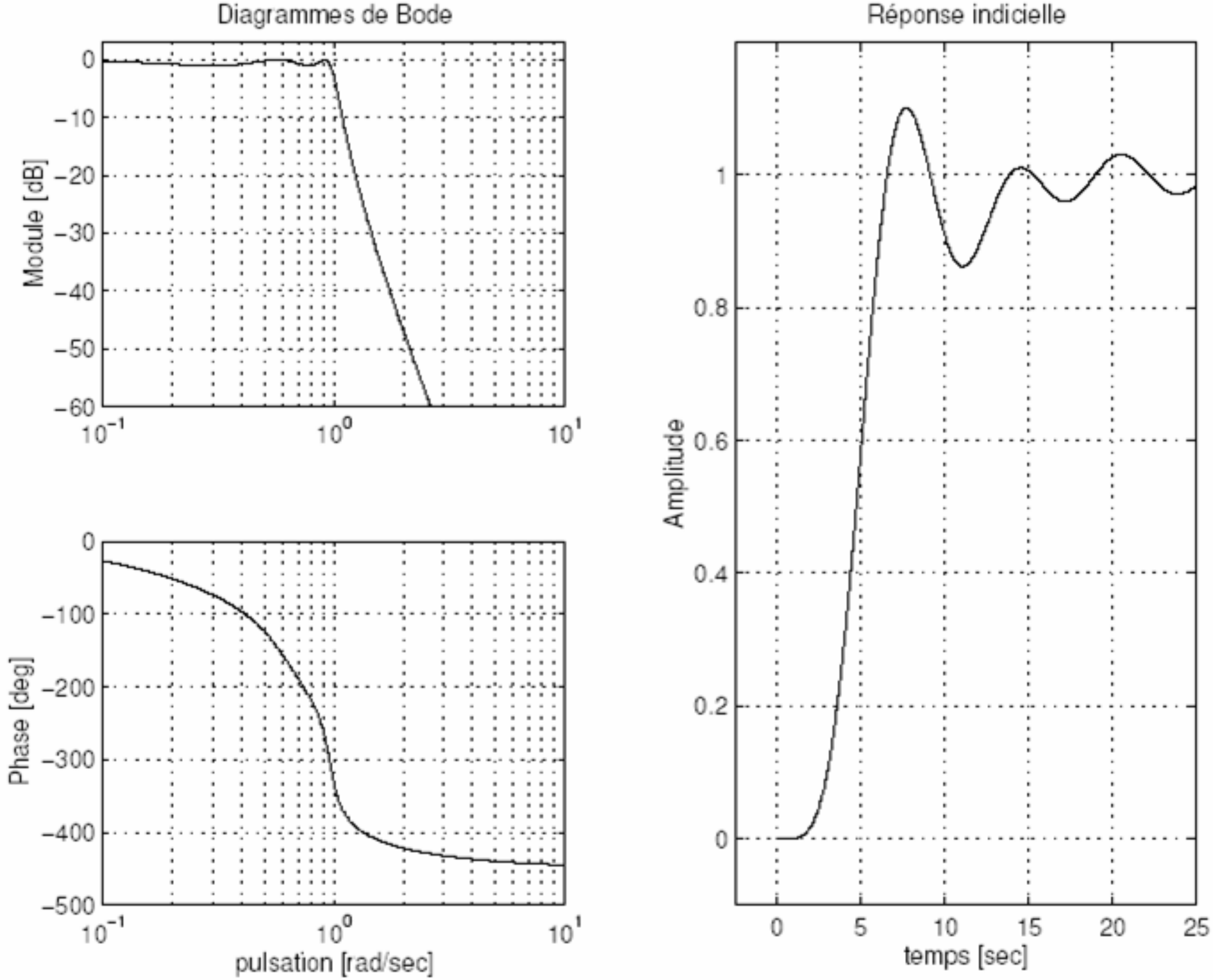
5 sections du 1er ordre



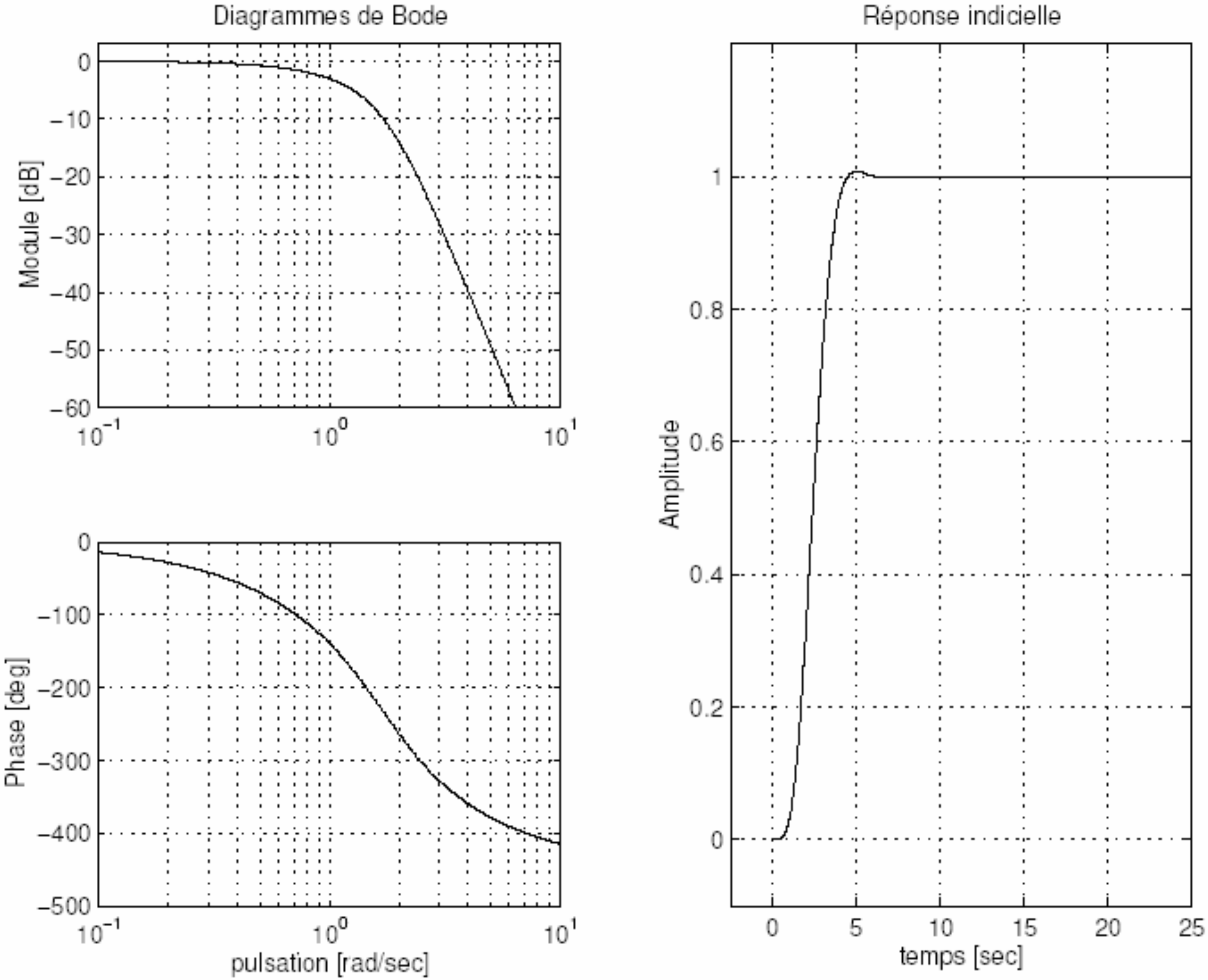
Filtres de Butterworth (n=5)



Filtres de Chebyshev type I (n=5)



Filtres de Bessel (n=5)



Les filtres actifs principaux

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff I	Tchebycheff II
Régularité de la courbe d'amplitude	excellente	satisfaisante	ondulations	bonne
Raideur de la transition	faible	médiocre	bonne	moyenne
Régularité du temps de propagation	faible	excellente	médiocre	faible
Qualité de la réponse temporelle	satisfaisante	excellente	mauvaise	bonne
Facteurs de qualité	moyens	faibles	élevés	moyens
Disparité des composants	faible	très faible	forte	faible