

Ex. 1 (7P) = 1 P/question sauf pour 4.

$$1. S_{\pm} = S_1 \pm i S_2 = \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou bien } \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad S_- |\uparrow\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar |\downarrow\rangle$$

$$S_- |\downarrow\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3. [X_i, L_j] = \sum_{kl} [X_i, X_k P_l] \epsilon_{jkl} = \sum_{kl} X_k \underbrace{[X_i, P_l]}_{i\hbar \delta_{il}} \epsilon_{jkl} = i\hbar \sum_k \epsilon_{jki} X_k = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} X_k$$

$$4. \psi_{100}(\vec{x}) = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-|\vec{x}|/a_0} = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/a_0} \quad \text{est pair en } x_1, x_2, x_3$$

$$\Rightarrow \psi_{100}^*(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{100}(\vec{x}) \text{ est impair en } x_i \Rightarrow \langle \vec{P} \rangle = \int d^3x \psi_{100}^*(\vec{x}) (-i\hbar \vec{\nabla} \psi_{100}(\vec{x})) = \vec{0}$$

+1 point bonus pour la bonne réponse. Il n'est pas précisé qu'il faut regarder $\vec{P}$ en coord. cartésiennes.

$$5. \text{ on peut trouver } 0 \text{ (valeur propre de } L_3 \text{ pour } |\psi_{310}\rangle) \text{ ou } \hbar \text{ (val. propre pour } |\psi_{321}\rangle)$$

$$\text{avec probabilités respectives } \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{1}{5} \text{ et } \left| \frac{2}{\sqrt{5}} \right|^2 = \frac{4}{5}$$

$$6. |\psi\rangle \text{ est état propre de } H \text{ avec } n=3 \hookrightarrow \text{énergie } E_3 = \frac{E_1}{3^2} = \frac{13.6 \text{ eV}}{9} = 1.51 \text{ eV}$$

$$7. P(x \in]-\infty, 0[) = \int_{-\infty}^0 dx |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2}$$

$$8. \langle H \rangle = \langle \alpha | H | \alpha \rangle = \langle \alpha | (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \hbar \omega | \alpha \rangle = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle \right)$$

$$\text{avec } a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \text{ et } \langle \alpha | a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha | : \langle H \rangle = \hbar \omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right)$$

Ex. 2 (5P)

$$1. N^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = N^2 \int_{-a}^a \cos^4 \frac{\pi x}{2a} dx = N^2 \frac{2a}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 y dy = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\frac{1}{32} \sin(4y) + \frac{1}{4} \sin(2y) + \frac{3}{8} y \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{= \frac{3\pi}{8}} N^2 \frac{2a}{\pi} = 1 \Rightarrow N^2 = \frac{4}{3a} \Rightarrow N = \frac{2}{\sqrt{3a}}$$

QSP

$$2. \text{ état stationnaire en MQ} = \text{état propre de } H \quad 1P$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-2N \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \frac{\pi}{2a} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{N\pi}{a} \cos\frac{\pi x}{2a} \sin\frac{\pi x}{2a} \right) \\ &= -\frac{N\pi^2}{2a^2} \left(+\sin^2\frac{\pi x}{2a} - \cos^2\frac{\pi x}{2a} \right) = -\frac{N\pi^2}{2a^2} \left(1 - 2\cos^2\frac{\pi x}{2a} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow H\psi(x)$ n'est pas un multiple de $\psi(x)$ pour tout x

$\Rightarrow \psi(x)$ n'est pas fonction propre de H , pas un état stationnaire 0,5P

$$3. \quad \tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x) = N \int_{-a}^a dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \cos^2 \frac{\pi x}{2a} = N \int_{-a}^a dx \left(\cos \frac{px}{\hbar} - i \sin \frac{px}{\hbar} \right) \cos^2 \frac{\pi x}{2a}$$

impair $\rightarrow 0$ sous l'intégrale

$$= N \int_{-a}^a \cos^2 cx \cos kx dx \quad \text{avec } k = \frac{p}{\hbar}, \quad c = \frac{\pi}{2a}$$

0,5P

$$= N \left(\frac{\sin(ka)}{k} + \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(\pi - ka)}{\frac{\pi}{a} - k} - \frac{\sin(\pi + ka)}{\frac{\pi}{a} - k} + \frac{\sin(\pi + ka)}{\frac{\pi}{a} + k} - \frac{\sin(\pi - ka)}{\frac{\pi}{a} + k} \right) \right) \quad 0,5P$$

$2ca = \pi$

$$= N \left(\frac{\sin(ka)}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(ka)}{\frac{\pi}{a} - k} - \frac{\sin(ka)}{\frac{\pi}{a} + k} \right) \right)$$

$$= N \sin(ka) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{a} - k} - \frac{1}{\frac{\pi}{a} + k} \right) \right) = N \sin(ka) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{a} + k - \frac{\pi}{a} + k}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2} \right)$$

$$= N \sin(ka) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2} \right) = N \sin(ka) \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2 + k^2}{k \left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2\right)} = \frac{N\pi^2}{a^2} \frac{\sin(ka)}{k \left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2\right)}$$

$$= \frac{N\pi^2}{a^2} \frac{\sin \frac{pa}{\hbar}}{\frac{p}{\hbar} \left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right)} \quad 1P$$

Ex 3 (5P)

$$1. \quad H = H_1 + H_2 + H_3 \quad H_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{m\omega^2}{2} x_i^2$$

$$\begin{aligned} H\psi &= (H_1 \psi_{n_1}(x_1)) \psi_{n_2}(x_2) \psi_{n_3}(x_3) + \psi_{n_1}(x_1) (H_2 \psi_{n_2}(x_2)) \psi_{n_3}(x_3) + \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) H_3 \psi_{n_3}(x_3) \\ &= \hbar\omega \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \psi + \hbar\omega \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \psi + \hbar\omega \left(n_3 + \frac{1}{2}\right) \psi \quad 0,5P \\ &= \hbar\omega \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) \psi \quad \hookrightarrow E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) \quad 0,5P \end{aligned}$$

2. H commute avec $\vec{L}$, en particulier avec L^2 et L_3 car potentiel central
 $\hookrightarrow$ il existe une base d'états propres communs (simultanément diagonalisables)
 1P

3.3 La fct. d'onde de l'état fondamental ne dépend que de r , pas de θ et ϕ (sphériquement symétrique) $\Rightarrow L = m_L = 0$ 1P

$$\Phi_{000}(r, \theta, \phi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} \quad 0,5P$$

$$\Psi_{000}(\vec{x}) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \quad 0,5P$$

4. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \vec{L}^2$, avec $\vec{L}^2 Y_L^{m_L} = \hbar^2 L(L+1) Y_L^{m_L}$

$$\text{et } \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) :$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2mr^2} + \frac{m\omega^2}{2} r^2 \right) u(r) = E u(r) \quad 1P$$

Ex. 4 (3P)

$$H = H_{\text{Coulomb}} + W$$

$$W = -\frac{e^2}{r} \left(-Mr + \frac{1}{2} M^2 r^2 + \mathcal{O}(M^3) \right) \\ = e^2 M - \frac{e^2 M^3 r}{2} + \dots \quad 1P$$

$$\langle W \rangle_{nlm, nlm} = e^2 M - \frac{e^2 M^2}{2} \langle r \rangle_{nlm, nlm} = e^2 M \left(1 - \frac{Ma_0}{4} (3n^2 - L(L+1)) \right) \quad 0,5P$$

$$\langle W \rangle_{nlm, n'l'm'} = \mathcal{O}(M^2) \quad \text{car } \underbrace{\langle e^2 M \rangle}_{\text{const.}}_{nlm, n'l'm'} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} e^2 M$$

($n'l'm' \neq nlm$) $\hookrightarrow$ ne contribue pas à l'ordre $\leq M^3$ 0,5P

$$E_{nl} = -\frac{e^2}{a_0} \left(\frac{1}{2n^2} - Ma_0 + \frac{(Ma_0)^2}{4} (3n^2 - L(L+1)) + \mathcal{O}(Ma_0^3) \right) \quad 1P$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{terme de Coulomb}}$