

Examen – Session 2

Exercice 1 (8 points) : Questions courtes

Toute réponse doit être justifiée, soit par un petit calcul soit par des arguments (vous pouvez faire référence aux résultats du cours). Si une réponse vous prend plus que deux lignes, elle est probablement plus compliquée que nécessaire.

1. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux opérateurs sur un espace de Hilbert qui vérifient $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$. Soit $|\psi\rangle$ un vecteur propre de $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{B}|\psi\rangle \neq 0$.
Montrez : $\mathbf{B}|\psi\rangle$ est aussi vecteur propre de $\mathbf{A}$, avec la même valeur propre que $|\psi\rangle$.
2. Citez un exemple d'un système physique avec deux observables différentes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et un état $|\psi\rangle$ avec les caractéristiques de question 1.

Pour la suite, on regarde un oscillateur harmonique 1-dimensionnel de fréquence ω . Comme d'habitude, on dénomme par $\mathbf{H}$ le hamiltonien, par $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}^\dagger$ les opérateurs d'échelle et par $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) les états stationnaires normalisés.

3. Calculez $[\mathbf{H}, \mathbf{a}]$.
4. L'oscillateur est dans l'état normalisé $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + c|3\rangle$, où c est une constante réelle positive. Trouvez la valeur de c .
5. Pour l'état $|\psi\rangle$ de question 4., calculez $\langle \mathbf{H} \rangle$.
6. Pour le même état $|\psi\rangle$, donnez $\mathbf{a}|\psi\rangle$.

Enfin on regarde une particule en trois dimensions avec moment cinétique orbital $\vec{\mathbf{L}}$, impulsion $\vec{\mathbf{P}}$ et un hamiltonien qui ne dépend pas du temps et qui est invariant par rotations.

7. Calculez $[\mathbf{L}_i, \mathbf{P}_j]$.
8. Combien de quantités conservées indépendantes y a-t-il au minimum ?

Exercice 2 (4 points) : Représentation d'impulsion

On regarde une particule de masse m en une dimension dans un puits de potentiel profond et étroit que l'on assimile à une distribution delta de Dirac. L'expression du potentiel dans la représentation de position est alors $V(x) = -\lambda\delta(x)$, où $\lambda > 0$ est une constante réelle. Soit $|\psi\rangle$ un état stationnaire d'énergie $E < 0$.

1. Énoncez l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans l'espace des positions.
2. Montrez que la transformée de Fourier du terme $V(x)\psi(x)$ ne dépend pas de p et que, par conséquent, la fonction d'onde dans la représentation d'impulsion peut s'écrire

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{N}{p^2 - 2mE}, \quad N = \text{constante.}$$

Avec la condition $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, exprimez N en fonction de E et de m .

3. Calculez $\langle \mathbf{P} \rangle$, $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{P}^2 \rangle$ dans l'état $|\psi\rangle$. Sachant que $\langle \mathbf{X}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{-4mE}$, vérifiez que le principe d'incertitude pour les observables $\mathbf{P}$ et $\mathbf{X}$ est satisfait.

Indications : Les calculs se simplifient si on tient compte de la parité des intégrandes. La primitive de $f(p) = (ap^2 + b)/(p^2 + c^2)^2$ est $\frac{1}{2} \left(\frac{(b-ac^2)p}{c^2(c^2+p^2)} + \frac{b+ac^2}{c^3} \arctan \frac{p}{c} \right) + \text{const.}$, et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 (3 points) : Moment cinétique

On donne les trois matrices 4×4 par blocs

$$\mathbf{J}_k = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3),$$

où σ^1 , σ^2 et σ^3 sont les matrices de Pauli et “0” représente la matrice nulle 2×2 .

1. Montrez que $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = i\hbar\epsilon_{123}\mathbf{J}_3$.

De la même façon on peut montrer (pas demandé ici) que $[\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3] = i\hbar\epsilon_{231}\mathbf{J}_1$ et que $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_3] = i\hbar\epsilon_{132}\mathbf{J}_2$. Les matrices $\mathbf{J}_k$ forment alors une représentation du moment cinétique.

2. Calculez $\vec{\mathbf{J}}^2$. La représentation est-elle irréductible ? Si oui, à quel spin correspond-elle ?
3. Donnez une base de vecteurs propres communs de $\mathbf{J}_3$ et de $\vec{\mathbf{J}}^2$.

Exercice 4 (5 points) : Atome d'hydrogène

On considère les états $n = 2$ d'un atome d'hydrogène.

1. Donnez l'énergie de ces états en eV, sans prise en compte de la structure fine.
2. Quel est le degré de dégénérescence de ce niveau énergétique, si on prend en compte le fait que l'électron est une particule de spin- $\frac{1}{2}$?

On rappelle que le hamiltonien du couplage spin-orbite, dans la représentation de position et en coordonnées sphériques, peut s'écrire

$$\mathbf{H}_{\text{LS}} = -\frac{e^2}{2m_e^2 c^2 r^3} \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}, \quad \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_i \otimes \mathbf{S}_i.$$

3. Montrez que $\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{J}}^2 - \vec{\mathbf{L}}^2 - \vec{\mathbf{S}}^2)$, où $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$. Pour le calcul de l'effet du couplage spin-orbite sur les niveaux énergétiques, pourquoi est-ce que la base $|n, l, s, j, m_j\rangle$ d'états propres de $\vec{\mathbf{J}}^2$ et $\mathbf{J}_3$ est mieux adaptée qu'une base d'états propres de $\mathbf{L}_3$ et $\mathbf{S}_3$? Toujours pour $n = 2$, quelles sont les possibles valeurs de j et m_j ?
4. Calculez le décalage énergétique des états $|n = 2, l = 1, s = \frac{1}{2}, j, m_j\rangle$ induit par $\mathbf{H}_{\text{LS}}$, en fonction de j , au premier ordre en théorie des perturbations. On donne $R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24}a_0^5} r e^{-r/(2a_0)}$ et $\int_0^\infty r e^{-\beta r} dr = \frac{1}{\beta^2}$ ($\beta > 0$).

Formulaire : Matrices de Pauli $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Moment cinétique : $[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{J}_k$, valeurs propres de $\vec{\mathbf{J}}^2$: $\hbar^2 j(j+1)$ ($2j \in \mathbb{N}$), valeurs propres de $\mathbf{J}_3$: $\hbar m$ ($-j \leq m \leq j$), opérateurs d'échelle $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$ avec $\mathbf{J}_\pm |jm\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j(m \pm 1)\rangle$. MC orbital : $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{X}} \wedge \vec{\mathbf{P}}$ donc $\mathbf{L}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \mathbf{X}_j \mathbf{P}_k$.

Fonctions d'onde des états stationnaires de l'atome de H : $\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$.

Rayon de Bohr $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2)$. Spectre d'énergies $E_n = -\frac{e^4 m_e}{2\hbar^2 n^2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $E_1 = -13.6$ eV.

Oscillateur harmonique 1-dimensionnel : $\mathbf{H} = \hbar\omega(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2})$ avec $\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\mathbf{X} + \frac{i}{m\omega} \mathbf{P})$, $\mathbf{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ et $\mathbf{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$. $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$. Énergies $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. État fondamental $\langle x|0\rangle = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp(-m\omega x^2/2\hbar)$. États cohérents $\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Transformée de Fourier : $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^\infty dx f(x) e^{-ipx/\hbar}$ et son inverse $f(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi\hbar} \tilde{f}(p) e^{ipx/\hbar}$.

Principe d'incertitude : avec $(\Delta\mathbf{A})^2 = \langle \mathbf{A}^2 \rangle - \langle \mathbf{A} \rangle^2$, $(\Delta\mathbf{A})(\Delta\mathbf{B}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rangle|$.

Théorie des perturbations : pour $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{W}$ et avec $\langle \mathbf{W} \rangle_{mn} = \langle \psi_m^{(0)} | \mathbf{W} | \psi_n^{(0)} \rangle$, on a $E_n = E_n^{(0)} + \lambda \langle \mathbf{W} \rangle_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} |\langle \mathbf{W} \rangle_{kn}|^2 / (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$.